國　立　中　央　大　學

學　習　與　教　學　研　究　所

博　士　論　文

國中機率課程：設計與實踐

Probability Curriculum for the Junior Level: Design and Practice

研 究 生：許 哲 毓

指導教授：張 佩 芬、單 維 彰

中 華 民 國　109　年　6　月

國立中央大學圖書館學位論文授權書

填單日期：_109__/_07_/_24_.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2019.9 版

授權人姓名	許哲毓	學 號	102187001
系所名稱	學習與教學研究所	學位類別	□碩士　☑博士
論文名稱	國中機率課程：設計與實踐	指導教授	張佩芬 單維彰

學位論文網路公開授權

授權本人撰寫之學位論文全文電子檔：

・在「**國立中央大學圖書館博碩士論文系統**」.

(　)同意立即網路公開

(V)同意 於西元 2022 年 7 月 31 日網路公開

(　)不同意網路公開，原因是：____________________

・在**國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」**

(　)同意立即網路公開

(V)同意 於西元 2022 年 7 月 31 日網路公開

(　)不同意網路公開，原因是：____________________

依著作權法規定，非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統與國家圖書館，不限地域、時間與次數，以文件、錄影帶、錄音帶、光碟、微縮、數位化或其他方式將上列授權標的基於非營利目的進行重製。

學位論文紙本延後公開申請 (紙本學位論文**立即公開者此欄免填**)

本人撰寫之學位論文紙本因以下原因將延後公開

・**延後原因**

(　)已申請專利並檢附證明，專利申請案號：

(V)準備以上列論文投稿期刊

(　)涉國家機密

(　)依法不得提供，請說明：____________________

・**公開日期**：西元 2022 年 7 月 31 日

※繳交教務處註冊組之紙本論文(送繳國家圖書館)若不立即公開，請加填「國家圖書館學位論文延後公開申請書」

研究生簽名：許哲毓　　　　　指導教授簽名：

*本授權書請完整填寫並親筆簽名後，裝訂於論文**封面之次頁**。

編號：

國家圖書館學位論文延後公開申請書
Application for Embargo of Thesis/Dissertation

申請日期：民國 109 年 7 月 24 日

Application Date: 2020 / 7 / 24 (YYYY/MM/DD)

申請人姓名 Applicant Name	許哲毓	學位類別 Graduate Degree	□碩士 Master ☑博士 Doctor	畢業年月 Graduation Date (YYYY/MM)	民國 109 年 6 月 /
學校名稱 University	國立中央大學		系所名稱 School/Department	學習與教學研究所	
論文名稱 Thesis / Dissertation Title	國中機率課程：設計與實踐				
延後公開原因 Reason for embargo	□申請專利並檢附證明，專利申請案號： Filing for patent registration. Registration number: ☑準備以上列論文投稿 Submission for publication. □涉及國家機密 Contains information pertaining to the national secret. □依法不得提供，請說明： Withheld according to the law. Please specify.			公開日期 Delayed Until	民國111年7月31日 2022/7/31 (YYYY/MM/DD)

申請人簽名：
Applicant Signature: 許哲毓

指導教授簽名：
Advisor Signature:

學校認定/審議單位章戳：
Seal of the Authorization Institute:

【說明】
1. 以上所有欄位請據實填寫並檢附證明文件，經由學校向本館提出申請，缺項或簽章不全，恕不受理。
2. 論文尚未送交國家圖書館，請於提送論文時，夾附親筆簽名申請書1份。
3. 論文已送達國家圖書館，請將親筆簽名申請書一式2份掛號郵寄10001臺北市中山南路20號國家圖書館館藏發展及書目管理組，並於信封註明「學位論文延後公開申請書」。

【Notes】
1. Please fill in all blanks and deliver to your university. The application form will not be accepted for processing until all information, signatures, and stamps are included.
2. If the thesis or dissertation is not yet submitted to the NCL, please attach the signed application form to the thesis or dissertation.
3. If the thesis or dissertation has been submitted to the NCL, please send a registered letter with 2 copies of the signed application form attached. The letter should be addressed to “Collection Development Division”, National Central Library with a note in the envelope indicating “Application for delay of public release” to the following address. No.20, Zhongshan S. Rd., Zhongzheng District, Taipei City 10001, Taiwan (R.O.C.)

(以下由國圖填寫 For Internal Use)

承辦單位_館藏組：__________ 日期/處理狀況：

典藏地：__________ 登錄號：__________ 索書號：

會辦單位_知服組：__________ 日期：__________ □移送並註記，原上架日期：

論文系統：__________ 日期：

國立中央大學博士班研究生

論文指導教授推薦書

學習與教學 研究所 **許哲毓** 研究生所提之論文 **國中機率課程：設計與實踐** 係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 張佩芬 (簽章)

共同指導教授 單維彰 (簽章)

109 年 04 月 28 日

國立中央大學博士班研究生

論文口試委員審定書

學習與教學 研究所 **許哲毓** 研究生所提之論文 **國中機率課程：設計與實踐** 經本委員會審議，認定符合博士資格標準。

學位考試委員會召集人 楊德清

委　　　　　員 林原宏

秦爾聰

單維彰

張佩芬

中　華　民　國　109　年　5　月　22　日

國中機率課程：設計與實踐

摘要

過去十多年，臺灣國中階段機率課程內容顯得較為獨尊「古典機率」而缺乏豐富度，學習時程亦較同儕國家的國民教育階段為晚，故本研究提議為此階段設計新式機率課程內容。研究團隊將自編教材《許氏機率 I》和《許氏機率 II》並進行教學實驗，實徵檢驗學生的學習成效與新課程之適切性。

本研究為自身檢驗之兩年期縱貫研究，國中階段學生接受前述兩份機率教材的實驗教學，從八年級延續至九年級，並分別施以學習成效測驗與延宕測驗。研究證實我國八、九年級學生可理解主觀、古典與頻率機率之觀點，並處理進階機率概念之問題，如獨立性。研究亦發現藉由樹狀之結構，學生可由圖像理解、使用同階層樹枝上的機率相加、不同階層路徑樹枝上的機率相乘之運算規則。此外，本研究並從機率概念構圖中，發現樹狀圖與獨立性是學習進階機率之基礎。

不過，從學生的作答文本中，本研究發現樹狀結構的學習，可能有兩項錯誤類型。（1）機率值誤植與運算規則之混淆：學生在解讀題意時，未能聯結文字語意與機率間的關係，導致機率值誤植，以及加法、乘法算則時之誤用。（2）無法繪製多組獨立、成對樣本的樹狀圖：學生對於辨識、歸類多組獨立、成對樣本產生困難，導致無法繪製正確圖形。

最後，本研究建議我國國中階段之數學課程設計，可調整機率內容。在教材設計上，多以「生活經驗」連結機率概念，設計不同情境之例題。在教法設計上，可一致利用樹狀圖建立概念並發展算法。在教學活動的設計上，宜讓學生有口語詮釋機率概念的練習，提升學生機率思考。本研究設計的兩份實驗教材，可作為前述課程設計的初步參照；此教材亦為機率概念與圖形思維之連結、機率迷思概念之預防，提出一份基本的設計方案。

關鍵詞：主觀機率、頻率機率、古典機率、樹狀圖、獨立性、概念詮釋結構模式

Probability Curriculum for the Junior Level: Design and Practice

Abstract

Over the decades, the probability curriculum at junior high stage in Taiwan has been characterized exclusively by "classical probability" which misses the richness of probability concepts. Comparing with the national curricular plan of peer countries, the introduction of probability in Taiwan is scheduled relatively late. Therefore, this research proposes to design a new probability course for the secondary stage. The research team will compile textbooks "Hsu's probability I" and " Hsu 's probability II" and conduct teaching experiments, so as to test the students' learning effectiveness and suitability of the new course.

This study is a two-year longitudinal study justified by self-examinations. Junior high school students received experimental teaching according to the forementioned texts from grade 8^{th} to grade 9^{th}, followed by a performance test and a delay test. The results verified that students in grades 8^{th} and 9^{th} can understand the subjective, classical, and frequency probabilistic viewpoints. They can also deal with advanced probabilistic concepts such as independent events. The research also found that with the tree diagram, students can understand and use the principles of adding branches at the same level and multiplying branches on a path of different levels from the tree diagram. In addition, from interpretive structural modeling, it can be seen that tree diagram and independence are the basis for learning advanced concepts in probability.

However, from the students' texts, this study found that students learning tree diagrams might have two types of difficulties. (1) The confusion between probability value misplacement and operational rules: Students fail to connect the relationship between literal meaning and probability when interpreting the meaning of the question, resulting in probability value misplacement and misuse of addition and multiplication principles. (2) Graph-text conversion of drawing multiple independent and paired sample tree diagrams: Students have difficulties in identifying and classifying multiple independent and paired samples, resulting in the inability to draw correct tree diagrams.

Finally, this study suggests that the curriculum design of junior high school mathematics can be adjusted to include probability content. In the design of teaching materials, the concept of "daily experience" is often used to link the concept of probability and design examples of different situations. In the design of teaching method, the concept of tree diagram can be established and the algorithm can be developed consistently. In the design of teaching activities, it is advisable to allow students to practice oral interpretation of the probability concepts, so as to improve students' probability of thinking. The experimental texts designed for this study also proposes a basic design plan for the connection between the concept of probability and graphical thinking, and the prevention of the misconceptions of probability.

Keywords: subjective probability, frequency probability, classical probability, tree diagram, independence, interpretive structural modeling

致謝辭

這是一趟精彩豐富的學習旅程，現在只是一個階段性的結束，還有未知的明天等著我。但在成就時刻應放慢腳步，感謝一路支持我的人們。

首先，張佩芬老師與單維彰老師不遲辛勞，秉持耐心一步一步教導我，讓我重新練好研究的基本功，設計、組織出有社會價值與貢獻之研究。同時，也給予我犯錯空間，並從中提出改善方式。因為有你們的付出，讓我更加精進研究的實力。

第二，萬分感謝這七年來，所有合作學校的師長們。國坤主任、派峰老師，沒有你們沒有今天的我。兩年來，你們無私的付出與配合，讓研究過程中沒有遭遇太多困難，並穩健朝向預定目標前進，完成這機率研究。以及感謝這些參與研究的同學們，你們總是樂在課程中，讓我與研究團隊有十足信心，帶領你們成功學習機率知識。

第三，感謝實驗室所有的學弟妹們，一路與我完成各項研究與計畫。特別是，許芷雲與我共同完成入班實驗教材「許氏機率 I」、「許氏機率 II」。開發過程中，熬了不知道多少次的夜，看了不知道多少次的日出，完成研究之主軸文本。回想起這段歲月，總是令人懷念與感謝。

第四，感謝口試委員楊德清老師、林原宏老師與秦爾聰老師，在口試上給予我指導，提出眾多具有研究價值的修改意見，讓這本論文可以更加精進。並為我設想畢業後的學習旅程，讓我更有機會邁向一位數學教育學者。

最後，感謝我的家人，一路培養我成為博士。家人總是我最強力的靠山，讓我不需為了經濟而煩惱，能夠全神投入在研究之中。這份養育之恩，不是這輩子能夠回報的。在此，期許自己在未來能夠發光發熱，做出有價值之社會貢獻，讓家人能共享榮耀。

許哲毓 謹誌

中華民國 109 年 7 月 27 日

目錄

摘要 .... **I**

ABSTRACT .... **III**

致謝辭 .... **V**

目錄 .... **VII**

表目錄 .... **IX**

圖目錄 .... **XIII**

第一章 緒論 **1**

第一節 研究動機與背景 1

第二節 研究問題 5

第三節 預期的影響 6

第四節 研究範圍和限制 6

第五節 名詞釋義 7

第二章 文獻探討 **11**

第一節 機率研究 11

第二節 樹狀圖與圖象表徵 15

第三節 機率迷思 19

第四節 臺灣數學課綱之機率單元 22

第五節 外國數學課綱之機率單元 24

第六節 詮釋結構模式 27

第三章 研究方法與課程設計 **35**

第一節 研究架構 35

第二節 研究對象 35

第三節 研究人員與研究時程 37

第四節 實驗課程之教材設計 38

第五節 實驗課程之教法設計 50

第六節 研究工具 55

第七節 資料收集與編碼 73

第八節 資料分析......75
第四章 結果分析......77
第一節 九年級學前初始狀態分析......77
第二節 九年級後測與延宕測分析......87
第三節 九年級學生之的答題特徵......90
第四節 九年級學生之概念結構圖......117
第五節 討論......126
第五章 結論與建議......135
第一節 結論......135
第二節 建議......137
參考文獻......139
附錄一. 八年級機率測驗......147
附錄二. 九年級機率測驗......149

表目錄

表 1 臺灣現行教科書機率例題範例（XXX 版）..........2
表 2 七年級生物課本 XXX 版（2016）..........4
表 3 樹狀圖之棒球隊例題..........17
表 4 機率迷思相關研究..........20
表 5 XX 書籍之範例..........27
表 6 學生反應矩陣..........29
表 7 試題屬性矩陣..........29
表 8 歷年相關學位論文..........34
表 9 研究對象之說明..........37
表 10《許氏機率 I》之課程設計說明..........41
表 11《許氏機率 II》之課程設計說明..........47
表 12 傳統課程與許氏機率課程之比較..........51
表 13《許氏機率 I》課程之教法說明..........52
表 14《許氏機率 I》活動課程之教法說明..........53
表 15《許氏機率 II》活動課程之教法說明..........54
表 16「不確定性」知識向度各概念細項的定義..........55
表 17「不確定性」認知向度各概念細項的定義..........56
表 18 機率概念之細目..........56
表 19 樹狀圖之繪製標準..........58
表 20 樹狀圖之逐步解析表..........59
表 21 八年級試題測驗之內容分析..........61
表 22 八年級試題分析..........62
表 23 九年級機率測驗之內容分析..........65
表 24 九年級試題分析..........66
表 25 八年級機率測驗試卷評分規準表..........67
表 26 九年級機率測驗試卷評分規準表..........71
表 27 八、九年級機率試卷收集與編碼..........74

表 28 八年級延宕測驗對教學後測驗之比較 78
表 29 八年級使用樹狀圖之次數統計 79
表 30 八年級計算第二題 80
表 31 八年級計算第五題 81
表 32 八年級計算第七題 82
表 33 八年級計算第八題 83
表 34 八年級計算第九題 84
表 35 樹狀圖之繪製類型 85
表 36 九年級機率測驗之成對樣本 T 檢定統計結果 88
表 37 九年級機率測驗第一題 91
表 38 九年級機率測驗第一題獨立性之數學詞彙詮釋 92
表 39 九年級機率測驗第一題之錯誤範例 92
表 40 以頻率機率趨近古典機率觀點之範例 93
表 41 九年級機率測驗第二題 93
表 42 九年級機率測驗第二題獨立性之數學詞彙詮釋 94
表 43 九年級機率測驗第二題之錯誤範例 95
表 44 九年級機率測驗第三題 96
表 45 九年級機率測驗第三題條件機率之數學詞彙詮釋 96
表 46 九年級機率測驗第三題之錯誤範例 98
表 47 九年級使用樹狀圖之次數統計 99
表 48 計算題第一題之古典機率 100
表 49 九年級第一題樹狀圖類型統計 100
表 50 計算題第一題之樹狀圖分析 101
表 51 計算題第二題之古典機率 104
表 52 九年級第二題樹狀圖類型統計 104
表 53 計算題第二題之樹狀圖繪製分析 105
表 54 計算題第三題之頻率機率 108
表 55 九年級第三題樹狀圖類型統計 108
表 56 計算題第三題之樹狀圖繪製分析 109

表 57 繪製樹狀圖產生樣本混淆的錯誤 111
表 58 計算題第四題之頻率機率 112
表 59 九年級第二題樹狀圖類型統計 112
表 60 計算題第四題之樹狀圖繪製分析 113
表 61 G9 高分組 117
表 62 G9 一般組 119
表 63 G9 低分組 121
表 64 低分組之概念階層結構圖 121
表 65 G9 高分組 122
表 66 得分皆為 38 分之概念階層結構圖 122
表 67 得分皆為 37 分之概念階層結構圖 123
表 68 G9 一般組 123
表 69 得分皆為 35 分之概念階層結構圖 124
表 70 G9 低分組 125
表 71 得分皆為 14 分之概念階層結構圖 125
表 72 八年級機率測驗之解題策略 126
表 73 八年級機率測驗之解題策略 127
表 74 九年級機率測驗之錯誤類型 128
表 75 無法聯結樹狀結構之同層相加、不同層相乘之規則之錯誤範例 128
表 76 多組獨立、成對樣本間之樹狀圖轉換之錯誤範例 130
表 77 樹狀圖上機率之誤植、或解題時遺漏題目所求之條件之錯誤範例 133

圖目錄

圖 1 南一版 105 學年度-樹狀圖內容 3
圖 2 GWCISM 演算流程圖 30
圖 3 八年級延伸至九年級之機率教學實驗與延宕測驗流程 36
圖 4 三階樹狀圖之範例（XXX 版） 40
圖 5 許氏機率課程分組座位模式 51
圖 6 樹狀圖之使用情況 78
圖 7 八年級學生能使用乘法原理或者獨立性概念解題 86
圖 8 八年級學生能使用樹狀圖解決不對稱事件之問題 87
圖 9 無法判斷樹狀圖上方分類與樹枝節點間差異 87
圖 10 九年級機率學後測驗 vs 九年級延宕測驗 89
圖 11 九年級高分組平均答對率之差異 89
圖 12 九年級中分組平均答對率之差異 90
圖 13 九年級低分組平均答對率之差異 90
圖 14 S4 的概念階層結構圖 117
圖 15 S13 的概念階層結構圖 118
圖 16 S21 的概念階層結構圖 118
圖 17 S25 的概念階層結構圖 119
圖 18 S34 的概念階層結構圖 120
圖 19 S49 的概念階層結構圖 120

第一章 緒論

第一節 研究動機與背景

早在民國 94 年，中小學數學科課程綱要評估與發展研究就發現國外的不確定性（uncertainty）教育時程規劃比臺灣早，且內容較豐富（陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005）。回顧林福來教授等人做的十二年國教數學領域課程綱要內容前導研究，整合近十年的教學與數學教育研究經驗，為數學課程之規劃提出八項建議，其中第一項就是包含機率、統計、數據素養的「不確定性」議題（林福來、單維彰、李源順、鄭章華，2013）。所謂不確定性，本研究採用經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Co-operation and Development，OECD）的定義：「理解生活中各種造成變異的成因、測量時所隱含的不確定性，具有量化和解釋變異的能力，以及處理機率統計問題的能力」。在此定義中，OECD 將機率與統計概括在不確定性的概念下（臺灣 PISA 國家研究中心，2013）。確實在我們所能預見的未來，數位模型與數據資料鋪天蓋地而來，我國國民有非常高的機會，在其生活中遭遇「不確定性」知識的需求。而這一類新知識與新技能的培養，將牽涉個人與整個臺灣社會的經濟與文化發展，應當在中小學課程中有其學習機會。

由上可知，十二年國教所談之數學素養之中，最需面對的就是新興的「數據素養」：處理不確定之大型數據的知識、能力與態度。這也就應該成為數學課程之中「不確定性」教育的內涵。Schmidt、Mcknight、Houang、Wang、Wiley 及 Cogan（2001）指出課程與學習成就呈現正向關係，即課程的品質越高會使學生的成就越高。因此，每位國民在基本教育的期間，應有機會學習不確定性思維。雖然張鎮華教授領導的十二年國教數學領綱工作，確實在數學領域課程綱要（以後簡稱「108 課綱」）裡回應了前導研究的多項議題（教育部，2018），但機率課程仍屬於未能完全實現的主要議題之一（單維彰，2016）。簡單地說，在國中階段，108 課綱僅變革了統計課程，未修改機率課程。

以下，作者先對國中教材做初步檢視，以表明本研究的動機。因為目前 108 課綱版本的教科書尚未上市，故以 97 課綱的教科書為例。研究者發現國中數學教科書的機率單元以單一事件的古典機率為主。在文字內容上，也只涉及古典機率之描述；頻率機率隱藏在多數教師不會教學的操作活動中，沒有文字或是定義上的解說，而主觀機率則是

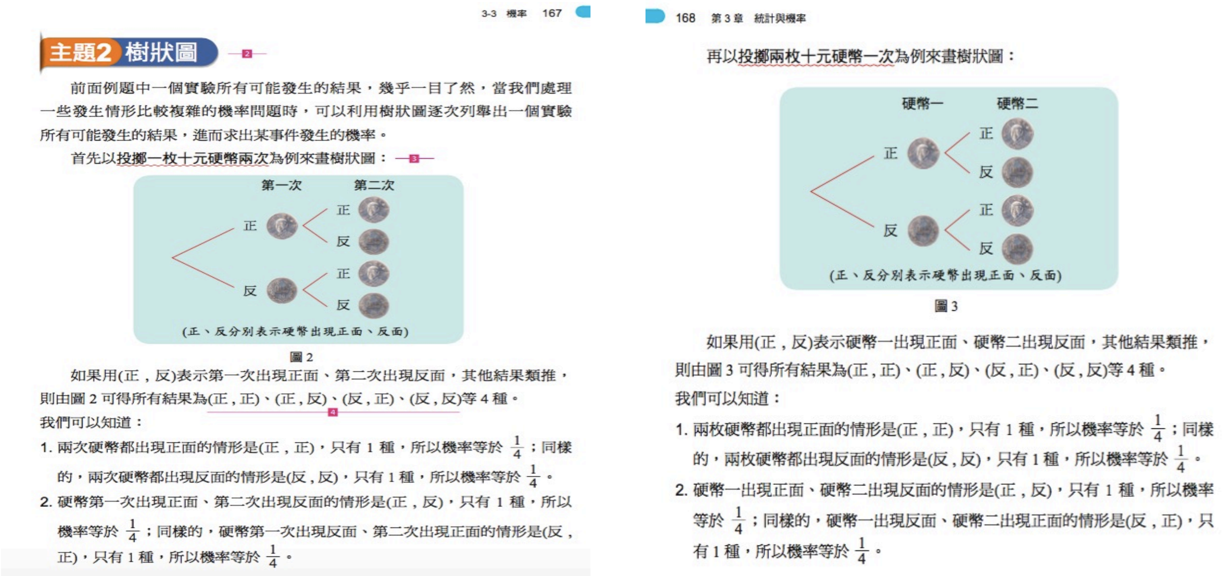
毫無蹤跡。表 1 從教科書的問題探索、例題、隨堂練習與自我評量中，舉幾道範例，呈現教材中涉及但未講述的機率概念。若涉及專有名詞，請參閱第五節名詞釋義。

表 1

臺灣現行教科書機率例題範例（XXX 版）

章節/題號	解析
3.3 問 1.1 3.3 問 1.2	（1） 丟硬幣的次數達 100 次，其目的在於出現正反面的機率各接近機率值 0.5。 （2） 第二題要求學生紀錄 1-6 組擲硬幣出現正反面的累積次數，使出現正反面的機率更接近機率值 0.5。 此題使用了「頻率機率」的概念，但課本中卻毫無文字敘述或定義。
3.3 隨 2.2	此題問「抽到不是 4 的機率是多少」，此問法常見於「餘事件」的概念題型，亦即可用 1-（抽到 4 的發生機率）的方式來計算，但課本仍使用單一事件的方式解題。
3.3 例 6.1	課程內容提到的樹狀圖僅是排除可能性的思考過程，並非機率思維的發展。
3.3 自 4.1 3.3 自 4.2	此題隱含「獨立性」的概念，但課本使用樹狀圖解題，亦可用獨立性概念解題。

此外，研究者發現餘事件觀念與「機率總和為 1」的概念，在現有的國中教材，是沒有正式出現過的內容；而國小階段沒有機率課程，所以此概念並未在國中小出現。經詢問國中現職數學教師，老師們表示的確大多會提到「機率總和為 1」之概念，但是教科書並沒有此項；而且國中教師通常不會講「餘事件」之概念。以 105 年版的教科書為例，仔細查閱課本內容，並沒有提及互斥性，也沒有闡述機率總和為 1，如圖 1。在機率知識的學習中，倘若因涉及集合概念，將此內容屏除，似乎並不合乎邏輯。因為在單一事件的機率運算中即會有這樣的思維可以做練習，例如表 1 中「抽到不是 4 的機率」即可自然地以餘事件的思維處理，會比正面表列的想法簡單許多，而且並非國中階段學生無法理解之概念。


3-3 機率 167

主題2 樹狀圖

前面例題中一個實驗所有可能發生的結果，幾乎一目了然，當我們處理一些發生情形比較複雜的機率問題時，可以利用樹狀圖逐次列舉出一個實驗所有可能發生的結果，進而求出某事件發生的機率。

首先以投擲一枚十元硬幣兩次為例來畫樹狀圖：

圖 2

如果用(正，反)表示第一次出現正面、第二次出現反面，其他結果類推，則由圖 2 可得所有結果為(正，正)、(正，反)、(反，正)、(反，反)等 4 種。

我們可以知道：

1. 兩次硬幣都出現正面的情形是(正，正)，只有 1 種，所以機率等於 $\frac{1}{4}$；同樣的，兩次硬幣都出現反面的情形是(反，反)，只有 1 種，所以機率等於 $\frac{1}{4}$。
2. 硬幣第一次出現正面、第二次出現反面的情形是(正，反)，只有 1 種，所以機率等於 $\frac{1}{4}$；同樣的，硬幣第一次出現反面、第二次出現正面的情形是(反，正)，只有 1 種，所以機率等於 $\frac{1}{4}$。

168 第 3 章 統計與機率

再以投擲兩枚十元硬幣一次為例來畫樹狀圖：

圖 3

如果用(正，反)表示硬幣一出現正面、硬幣二出現反面，其他結果類推，則由圖 3 可得所有結果為(正，正)、(正，反)、(反，正)、(反，反)等 4 種。

我們可以知道：

1. 兩枚硬幣都出現正面的情形是(正，正)，只有 1 種，所以機率等於 $\frac{1}{4}$；同樣的，兩枚硬幣都出現反面的情形是(反，反)，只有 1 種，所以機率等於 $\frac{1}{4}$。
2. 硬幣一出現正面、硬幣二出現反面的情形是(正，反)，只有 1 種，所以機率等於 $\frac{1}{4}$；同樣的，硬幣一出現反面、硬幣二出現正面的情形是(反，正)，只有 1 種，所以機率等於 $\frac{1}{4}$。

圖 1 南一版 105 學年度-樹狀圖內容

再者，觀察國際間「不確定性」教育的改變，已從過去重視的演算程序，轉移到強化思維與推理方式。以此觀點檢視我國之機率課程安排，則設計思維顯得落後。Rumsey（2002）認為教育工作者應培養學生成為優質的「統計公民」，亦即能應用統計知識處理生活中遭遇的問題。這不是追求標準答案的模式，而是在過程中考量如何提高成功的機率並提供使人信服的證據。在數學教育的脈絡中，統計的實用性必須奠基於機率理論的紮實。這意味著「不確定性」教育正在建立新的內涵，而課程設計也該隨之制定新的方向，但我國課程綱要中「不確定性」之相關能力指標，多是「認識」、「了解」知識性內容的論述，缺乏國際間主張之「應用」及「推論」指標。究其原因，研究者認為無非是課綱規劃委員對於機率課程的看法以及機率之適學年齡有歧見，因為缺乏可靠的實徵研究證據，所以不能達成修改機率課綱的決議，故影響我國「不確定性」教育的發展甚鉅。

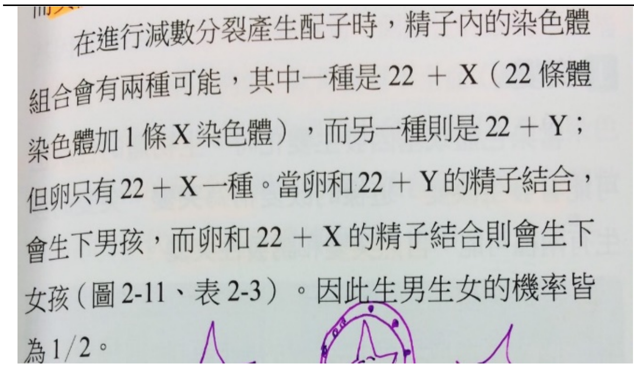
近年，我國對於「不確定性」教育之研究並不多，如單維彰、許哲毓與陳斐卿在 106 年完成了一份機率自發性概念研究，論文於 2018 年刊登在臺灣數學教育期刊。該研究提供的證據顯示：九年級上學期未經機率教學的學生，展現出餘事件、獨立事件概念、條件機率（不對稱事件），但無解題之能力。另一方面，前述研究亦發現現行國中階段七年級的生物課程，在遺傳主題不但引用機率概念，而且還應用了獨立事件概念，如表 2 之中所擷取的生物課文。在此具體情境下，並未有研究指出臺灣七年級學生在學習機率時有所挫折，可見學生的認知能力已經準備好接受獨立事件教學。上述研究之發現，

可支持本研究嘗試將「餘事件」、「互斥和事件」、「獨立事件」、「相依事件」這些概念前移到九年級，重新規劃機率課程。

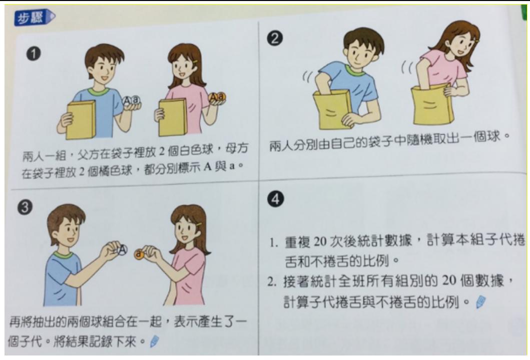
表 2

七年級生物課本 XXX 版（2016）

解釋機率概念	建立頻率機率概念的教學活動



在進行減數分裂產生配子時，精子內的染色體組合會有兩種可能，其中一種是 22 ＋ X（22 條體染色體加 1 條 X 染色體），而另一種則是 22 ＋ Y；但卵只有 22 ＋ X 一種。當卵和 22 ＋ Y 的精子結合，會生下男孩，而卵和 22 ＋ X 的精子結合則會生下女孩（圖 2-11、表 2-3）。因此生男生女的機率皆為 1/2。



因應以上狀況，研究者參考國外教科書之設計，以及相關樹狀圖文獻之探討（詳見第二章），擬以「樹狀圖」作為主要工具，引導學生運用樹狀圖蘊含的資訊，來思考抽象的機率概念。樹狀圖（tree diagram）的名稱來自於：以「樹」的造型來表現物件之間的結構關係。它是一種能系統化地細分主題、區分階層、觀看整體，做邏輯性的列舉，並以圖像方式表現出來的方法。根據《牛津英語詞典》，樹狀結構與樹狀圖這兩個名詞，在 1965 年首次出現於杭士基的著作中（Chomsky, 1965），用來看整體、並做邏輯性的列舉。「樹狀圖」不僅解決機率問題，更能藉由它的圖像化表徵自然地呈現互斥的「或」與「獨立」等概念。「樹狀圖」也改變「集合論」與「排列組合」必須是「機率論」的先備知識這項課程習慣。未來，更可作為數學的集合論與排列組合之一項重要基礎，甚至可延伸到大學階段的圖論與資料結構。它的價值是促使所學能夠將知識應用至真實生活，而非知識上的理論。

另一方面，為使本研究所設計課程能夠符合現代機率之發展，特別要在教學目標中包含貝氏機率。本研究也試圖在機率實驗課程的內容上提出一項理念：即機率的頻率觀點（frequentist）和貝氏觀點（Bayesian）並列。這兩種觀點的建立，在西方已經有 200 年的歷史了，可是我國一般國民的機率觀念還是僅有頻率觀點，亦即「大數法則」的觀點。這或許是因為，過去的國、高中機率課程全都以「重複試驗所發生的相對次數」當作機率的標準詮釋，導致我國國民缺乏貝氏機率觀點的素養。這是值得探討的，因為貝

氏觀點在生活中非常有用，更是學習有母數的機率分布的基礎概念。例如 2020 年初爆發的冠狀病毒 COVID-19 疫情，就明白顯示有一些不確定現象，無法使用重複實驗，也很難使用大規模抽查來估計機率值，因此就有採用貝氏機率觀點的必要。本研究將在八年級、九年級的實驗教材中，試驗以上兩種機率觀點的教學；並以「主觀機率」導引貝氏觀點，運用樹狀圖建立其模型。

如今 108 課綱已經完成審查並實施，針對此代課綱的工作已經完成，而作為教育研究者，能做的工作之一，便是為未來的課綱修訂繼續做創新或前瞻的研究。本研究便是在如此的背景下籌思而成，而首要目的為驗證臺灣學生機率的適學年齡與機率教學內容層次。本研究涵蓋國中階段八年級和九年級機率課程之課程規劃、教材設計和實驗教學，屬於縱貫性研究。意欲進行教學實驗的內容，則包括古典機率、頻率機率和主觀機率的教學活動，以及涉及餘事件、獨立事件、相依事件觀念的跨領域學習。

第二節 研究問題

基於第一節之論述，本研究在限制條件之下，能實現之目的是想驗證臺灣國中階段學生可習得的機率內容，藉以重新規劃八年級和九年級之機率課程，並提出一批經過實徵教學實驗的教材教法設計。

以下臚列四個研究問題：

（1） 對於現行機率課程之狀態，包括獨重古典機率而忽視其他機率類型的侷限性，以及相對國際同儕較晚開始機率的學習，可否設計出適用於八年級學生，且能綜合介紹古典機率、主觀機率與頻率機率相之教材？

（2） 若機率實驗教材以樹狀圖作為機率學習之主要工具，是否能讓八年級學生以三種機率觀點，並從樹狀之結構中，理解單一事件、餘事件等概念，並用於解決問題？

（3） 若八年級之機率實驗課程可行的話，可以設計怎樣的後續機率課程，使能提升不確定性的素養，並且適用於九年級學生？

（4） 經過兩年八、九年級的機率實驗教學課程，學生是否存在迷思或錯誤的類型，以及在樹狀圖的學習過程中，會遭遇哪些困難點？

第三節 預期的影響

其一，臺灣數學教育，對於樹狀圖在國中階段的使用，只以計數方式來確定事件發生之數量，關注在分類事件上，並沒有運用樹狀圖的特徵來增強機率的學習。與其他國家教科書相比，顯示臺灣教科書忽略樹狀圖在機率教學上的妙用。本研究創造之實驗教材，將可示範樹狀圖如何幫助國中階段學生將機率概念具體化，減輕認知負荷，以及建立理解貝氏機率之基礎。簡而言之，機率的抽象概念能藉樹狀圖之結構，有具體化之詮釋。

其二，本研究所設計之課程模組，能提供下一代課程綱要設計的實徵證據，促使改變機率主題在數學課程中的安排，提升全體國民在不確定性思維上的素養，並縮小國中階段與高中階段之機率課程差距。改編後的課程綱要，可望在不確定性的學習方面，不但符合銜接性與妥適性，亦實現螺旋式的課程設計。

第四節 研究範圍和限制

本研究之教學實驗執行期為兩年，屬縱貫性研究。研究對象的人數與班級數都不算少（約涉及 5 校 300 生），且維持兩年勢必遭遇一些難處，以下說明困難與解決方案。

一、 由於現場教師不論在求學或是職場期間，皆是以古典機率、頻率機率之觀點來解釋機率現象，而機率實驗教材添加主觀機率之觀點進行解說，以利學生往後面對貝氏機率的學習。另外，過往在高中階段之獨立事件、相依事件、條件機率等內容，向來以集合運算作為工具，若改以樹狀圖為解題工具，則可排除集合語言之限制，藉由樹狀結構之互斥性，可處理除了交集外之所有問題，故提前於國中階段學習在理論上是可行性，只是教師並未接觸此種教法。這樣的實驗目的，限制研究者找尋合作學校、教師的意願。研究者與教師雙方必須有良好對話與共同概念，才能使教學模組確實進行。故需與現場教師進行推廣會議，進行課程展示與說明，取得教學內容之共識，將理念拓展到教師之教學思維。

二、 機率課程模組對於教師來說,是增加教學時間的,即是限制實驗教學時數的難點。由於八年級學習機率時與段考內容不同，而九年級則是面臨升學壓力，迫近國中會考，不宜再進行教學實驗。因此，如何使用有限時間，在八、九年級進行教學

實驗，考驗研究者對於機率教材與教學法之設計能力。有鑑於此，研究者將以「實作」機率概念為導向，活化課程與縮短學習時數，避免教師因考試壓力而無法進行教學，以及配合合作教師之課程時間安排。

三、 在進行教學實驗時，研究對象的學習意願也是需要考量的。由於學生的學習經歷與學習性向的差異性大，以及機率課程模組對學生而言是多學的知識，因此如何在教材與教法設計上，讓學生產生共鳴，則顯得重要。研究者除了在教材與教學活動上力求有趣以外，也給予刺激物，例如禮品、獎品、食物等，提升學生的參與意願。

四、 本研究使用複本測驗，複本法是指測驗的題材都取自相同範圍，測驗內容、題型、題目數、難易度、鑑別度、指導語、例題、測驗時間限制等，都必須非常類似。因此為了避免受測者接受複本測驗時，產生記憶效果的干擾，實施複本測驗的時間間隔不應太近。本研究所處的環境，僅能設計其間隔為 4 個月或 6 個月。

五、 本研究既然希望對全國性的課程綱做出建議，當然應該對全國學生實驗。然而，實驗對象涉及十幾萬學生，且班級數規模等等不同因素下，如此龐大規模的工作，非研究團隊的人力資源可及。綜合考量不影響正規課程學習以及實驗的方便性等因素，故研究者採用便利抽樣的方法選擇實驗對象。

第五節 名詞釋義

為了使本研究討論的範圍與主題更加明確，以下界定所涉及的相關重要名詞。

（一） 機率教學成效測驗

「機率教學成效測驗」的意義為測驗學生經過完整的機率教學後，其機率思維的提升。「學前測驗」在機率教學前實施，測驗的是學生在接受正式的機率教學前，擁有的機率直覺概念與解決問題能力。而它會對應「學後測驗」和「延宕測驗」，以檢視經過正式機率教學後的學習成效和保留效果（許芷雲，2019）。

（二） 機率類型

（1） 古典機率（Laplace probability）

古典機率是根據理論假設及推理的規則計算而來的機率值。假設有一個隨機性試驗，其所有可能結果（稱為樣本空間 S）能被窮舉列出，且其樣本空間中的每一個樣本點發生的可能性均等，則定義事件 A 在樣本空間 S 中發生的機率為 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$，其中$n(*)$表示為樣本個數。因為古典機率必須接受「可能性均等」的前提，所以亦稱為理論機率或先驗機率。

（2） 頻率機率（frequentist probability）

在彼此「獨立」的前提下，觀察一個隨機試驗，重複無窮多次或實驗調查，將某事件發生之相對次數（即「頻率」）極限，作為該事件的機率。即一個事件的機率值 $P(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$，亦即在 n 次的試驗中，事件 A 出現的次數為 n_A，當試驗次數越接近無限多次時，相對次數 $\frac{n_A}{n}$ 越趨近於實數 *P(A)*。人們當然無法執行無窮多次的實驗，因此實際上乃是根據有限的執行結果而決定機率的估計值。而頻率機率以實驗結果為依據，所以又稱為實驗機率（experimental probability）。

（3） 主觀機率（subjective probability）

個人對於可能性或可信度的評估，也可以說是「把握」的評估，這是貝氏機率分布觀點的直觀狀態。主觀機率為近代 20 世紀發展的概念，源自於財務金融領域對於風險（期望值）的考量，是一種以直觀思維評估機率的作法：直觀且主觀地評估不確定性事件的可能性，其機率值以個人信念程度或既有的生活經驗而決定，是人們與生俱來的能力。主觀機率的數值可以隨著新訊息的出現而調整其判斷，用來解釋人們獲得新資訊之後，如何合理化自身信念的形成和改變（Borovcnik, Bentz, & Kapadia, 1991; Fischbein, 1975）。相對於主觀機率，古典機率和頻率機率又統稱為客觀機率。

除了各國中小學機率課程中常見的以上三種機率類型以外，至少還有一種類型的存在：形式機率（formal probability）。這是專業人士的機率概念，屬於大學以上的課程，不在中小學的素養導向課程範圍內，因此本研究不提它。

（三） 對稱與非對稱事件

「對稱」事件的定義為事件結果之發生機率為公平、均等。如公正六面骰子，每個點數出現機率皆為$\frac{1}{6}$，或是袋中有 2 粒黑球、2 粒白球，假設每球被抽取之機率相等，從中抽取一球為黑色之機率為$\frac{2}{4}$，而白球亦是$\frac{2}{4}$。反之「非對稱」事件的定義為事件結果之發生機率為不公平、不均等。如袋中有 5 粒黑球、3 粒白球，假設每球被抽取之機率相等，從中抽取一球為黑色之機率為$\frac{5}{8}$，而白球則是$\frac{3}{8}$。

第二章 文獻探討

本章先回顧機率學習與教學的研究，從文獻分析學者們對於機率教學方向、機率迷思概念、機率學習時程之看法，並反思國內近年研究，以作為本研究實驗內容設計的立足點。接著，回顧臺灣的機率課程發展史、十二年國民基礎教育，再比對國外課綱或教科書，做為本研究課程安排、設計之參照基礎。最後介紹本研究為探究、診斷學生機率概念的建立模式，而使用之統計分析法：概念結構模式。

第一節 機率研究

機率是一門抽象化的知識，學習上不僅限於習得數學的技術，更需考量學習者對於非具體概念的建立。心理學家認為機率學習與學生的心智發展強度有所關聯，不能忽視學習者之認知發展。故在設計教材教法、實徵研究上，執行者皆需關注上述之觀點。對於研究者與團隊而言，可避免機率教材在難度設計、教學模式上不違理論主張之標準，並使研究實務上更加穩健。以下分為兩小節說明機率認知與相關實證研究。

（一）機率認知與學習研究

機率認知相關研究，最早由 Piaget 和 Inhelder（1975）提出的機率認知發展三階段（劉秋木，1996），可獲致分析不確定性的概念發展看法如下。運思前期（二至七歲）：無法區分事件之必然性和可能性，沒有證據顯示其具有不確定的概念。具體運思期（七至十一歲）：能分辨因果律，但尚無系統性地產生一系列機率的能力。形式運思期（十一至十六歲）：能列舉實驗的所有可能結果，發展組合分析的才能，瞭解相對次數（之極限）的機率概念，具有（主觀）機率概念。從 Piaget 的觀點看來，「比率概念」是兒童認知發展進入形式操作期的指標，並決定機率概念發展。

Fischbein（1975）提出人們面對不確定性問題時，不論概念上對與錯，腦中最快出現是自然產生的想法，這樣直觀的思維是機率概念的最初雛形。心理學界在 1950 年代即開始研究直觀的機率思維，並確認這種認知型態的存在（Cohen & Hansel, 1956）。簡言之，人們為了在不確定的環境中做出適當的決定，必須運用一種與生俱來或是從經驗中養成的認知型態（單維彰、許哲毓、陳斐卿，2018）。Konold（1991）認為上述之認知結果是不證自明的，而 Fischbein（1975）在數學理論與直觀之間，發展了互動的觀點，

提出了初始直觀（primary intuition）和第二直觀（second intuition）。所謂初始直觀即是使用生活經驗所自發性形成的晦隱知識（implicit knowledge），進行機率問題的思考。而第二直觀通常是透過有系統化的教學，改變初始直觀的概念。這個轉化的過程並非自發性或是後設認知的結果，而是經由學校教學介入做為媒介轉化，Fischebin（1975）亦強調，機率教學對學生機率概念形成是必須的。若無目標性的介入，則學生之機率概念將難以發展，特別是成年人也一樣。

Bognar 和 Nemetz 於 1977 年提出的機率教學架構，列出兒童在不同年齡階段可進行的機率概念教學。七至八歲：確定事件（certain events）、不可能事件（impossible events）及互斥事件（mutually exclusive events）。九至十歲：較可能事件（more likely events）、較不可能事件（less likely events）及次序事件（order events）。十一至十二歲：相對次數（relative frequencies）、畫出可表示機率事件的圖表（diagrams），如樹狀圖。十三至十四歲：可以教導獨立（independent）、相關（correlated）的實驗及事件。

Jones、Thornton、Langrall 與 Tarr（1999）等人在 1999 年從澳洲國小三年級兒童學習樣本空間、單一事件、機率比較和條件機率的實驗中，分析三年級兒童的機率認知發展，並建立了機率認知架構。其認知次序為：層次一：主觀思考期。在此層次的兒童多以個人的主觀意識或喜好來處理機率問題。層次二：過渡期。在此層次的兒童思考介於主觀和質樸的量化思考之間，但其思考結果最後往往又會回到主觀的想法。層次三：非形式量化期。在此層次的兒童已能做量化思考，但尚未具備足夠的數量概念。層次四：量化推理期。此為發展的最高層次，兒童可完全使用生產性策略來描述結果，並能用數字完整的表現出數量的推理。

前面引述各家學者們對於不確定性概念之綜合描述，涵蓋了 Shaughnessy 在 1990 年代的統整。Shaughnessy 認為機率包含統計的隨機事件（random event）與經驗的可信程度（degree of belief），提出四項概念形式（引自李源順，1994；陳欣民、劉嘉茹、柳賢，2011）。1. 無統計的模型（Non-statistical）：無法理解隨機性和機會，故而根據主觀的意識做出判斷。這種判斷通常為因果關係或確定性的單一化解釋。2. 天真統計的模型（Naive-statistical）：能初步理解隨機性的意義。並使用一些捷思策略做判斷。3. 自然統計的模型（Emergent-statistical）：能理解並使用正規模式解決一些簡單問題。能分辨直觀思維和數學化的差異性，可以理解機率的數學表徵。4. 實用統計的模型（Pragmaticstatistical）：能理解並運用各種機率的模型。面對不確定性問題時，能分辨出最佳的機率模型，以解決問題。

再者，Shaughnessy 將上述四點概念形式歸納出四大類機率類型，分別為主觀機率、古典機率、頻率機率與形式機率。但形式機率屬於大學階段之課題，故本文不予討論，其餘皆是本研究可以處理的機率類型。而這三種機率類型彼此間是互有聯繫的，古典機率倚賴於主觀的先驗假設：樣本空間中每個樣本的發生機率均等。顯示古典機率隱含著主觀機率概念，此假設本身倚賴於個人的主觀評估。而機率思維常用的大數法則，就是頻率機率的體現。故 Shaughnessy（1992）認為學習者思考機率問題時，應能靈活善用三種機率類型的轉換，而非固守某一類型。

Shaughnessy 所統整的機率概念類型很難區分深淺層次，但純就算術來看，這三類概念涉及的數學技術僅為有理數運算，確實不難處理，而機率看似不需要由教師正式教學。不過，參照文獻，多數研究者指出青少年階段之學生，認知才逐漸達到抽象思考能力，而機率概念牽涉多種抽象思維，確實不易學習。Fischbein（1975）亦指出機率教學對兒童的機率概念形成具有關鍵性影響，特別是機率迷思概念可經由教學以改正（Fischbein, 1984）。倘若輕忽正式的機率學習，將影響機率概念形成的歷程（Fischbein, 1975）。可見不能因其使用之數學技術，而省略機率概念相關之教材與教法。

綜上所述，本研究將參照 Shaughnessy 所統整的三種機率概念類型，進行教材教法上的設計，著重三種機率類型間的觀點轉換。這亦考驗學生是否能真正理解機率的意涵，在面對問題時，能夠判斷與推論其機率值。另一方面，研究者保守估計臺灣學生之機率學習年齡，應落在中學階段。雖研究上指出國小即可進行教學，但考量文化差異與現今數學課程編制，研究對象將選定八年級與九年級。而排除七年級年段之因，乃是根據教學現場教師與研究者之班級經營之觀點，即七年級為基礎算數技術之培養階段，以及學生剛轉換學習環境需要適應期，故不適合作為研究對象。接續，第二小節探討機率相關實徵研究，釐出八年級與九年級學生可發展之機率概念與在教材教法須注意之要點。

（二）機率相關實徵研究

對於各家學者的研究中，機率學習年齡學者們各有定見，從小學三年級至中學九年級都有不同的研究成果。但教學實驗操作之經驗中，學者們大致認同給予學生正式的機

率教學是有意義的、且必須的（Fischbein, 1975）。以下說明在各種機率概念之學習與教學上之觀點。

「樣本空間」（Sample Space）在機率概念的學習中扮演了極其關鍵的角色，是決定事件機率最關鍵的因素，也是驅動機率思考的重要角色（Nikiforidou & Pange, 2007; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1997; Abu- Bakare, 2008; Nikiforidou & Pange, 2007）。特別是，列出完整樣本空間的推理，牽涉加法和乘法基模的高階層推理，並非簡單的概念，容易產生樣本空間之錯誤認知（Bataneero, Navarro- Pelayo & Godino, 1997; Shin & Steffe, 2009）。例如 Borovcnik、Bentz 與 Kapadia（1991）皆指出七至十歲的兒童，甚至十一歲尚可能無法完整列出一維樣本空間。Schroeder（1988）的研究指出四至六年級的兒童尚無法列出完整的二維樣本空間。陳欣民、劉嘉茹、柳賢（2011）指出對小六學童對於處理相同物的樣本空間是有困難的。

不過，並非所有學者看法一致。Piaget 與 Inhelder（1975）主張兒童在較低年級時就能寫出一維樣本空間的所有可能結果。Watson 與 Kelly（2007）指出透過教學六、七年級的學童可能已能進展到能列出部份樣本點，或能系統性的列出完整樣本空間（陳欣民，2011）。陳欣民、劉嘉茹、柳賢（2011）在小學階段之樣本空間教學實驗（包含二維與三維），發現所有的學童皆能根據樣本空間觀點解決機率問題，大部份的學童皆能列出二維、甚至三維樣本空間。

前述文獻觀察，不難發現心智年齡未達十二歲的小學階段之學生，確實不易掌握「樣本空間」這項入門卻關鍵的機率概念。不過在中學階段的學生，學者們普遍認為學生具備足夠的心智來學習。而有效方法是使用「樹狀圖」建立樣本空間（Aspinwall & Shaw, 2000）。此外，教學設計上應結合主觀機率、古典機率與頻率機率靈活地交互應用，以及讓學生體會真實情境中使用機率推論或解決問題。

另一方面， Jones 等人（1999）參考 Biggs 和 Collis (1982, 1991)，發展了兩個維度的機率概念分析：機率概念類型和思考層次。提出學童不論在何種機率概念之下，都會產生一種有序性的思考發展層次。後續又結合以預測和實驗為主的頻率機率和條件機率引伸出的獨立事件的分析。English 與 Watson（2014, 2016）針對四至六年級進行頻率機率和古典機率的教學實驗，其中涉及獨立事件的思維，他們發現此年齡階段是可以學習獨立事件的。Watson（2005）回顧六至九年級學生機率思維的研究文獻，亦指出複合

事件的困難性以及它通常需要伴隨獨立事件的概念。上述研究證實國小階段確實可處理單一事件，且獨立性概念影響複合事件的建立。故中小學階段之學生其機率概念的學習層次可達獨立性。反思我國現行課程在九年級（十五歲左右）僅呈現單一事件層次的古典機率，內容顯得不足，且時機太晚了些。

就中文的語意而言，獨立性與餘事件都是容易望文生義的概念。學生對於「獨立」這個詞不但不陌生，反而常在生活中提及，例如「獨立思考」意即自己的思考不受前後左右同學的影響。對照於機率觀念，獨立性意即事件的機率不受前後事件的影響。學生對「餘」亦不陌生，例如「全」班 30 人，女生 17 人，其「餘」為男生，故有$30-17=13$人。對照於機率觀念，只要先明白「全」機率為 1，則若 A 事件發生機率為 0.4，其「餘」是 A 事件不發生的機率，故為$1-0.4=0.6$。

綜上所述，本研究在機率學習上，參考 Jean Piaget、David Green、Graham Jones、Michael Shaughnessy 及 Jane Watson 等學術先進的研究結果，試圖作為在八、九年級綜合發展三種機率類型之概念外，並且達到單一事件、餘事件、互斥和事件、獨立事件、相依事件與條件機率之概念層次的學理基礎。雖後幾項機率概念層次較高，但根據文獻皆指出國中階段對於學習餘事件、複合事件（特指「互斥和」事件）、獨立事件及相依事件具有可行性。故本研究教學上的起始點將以融合生活文化與搭配主觀機率、古典機率與頻率機率觀點下，設計適當的活動來詮釋較高層次之概念。

第二節 樹狀圖與圖象表徵

「計數」是學習機率推理之基礎（Maher & Ahluwalia, 2014）如何正確的找出樣本空間，成為機率課程首要問題。然而，樣本空間概念的建立，並非如此具體有序。它是抽象且混亂的，上節文獻也指出不同年齡學生所發生之難點。機率概念之習得確實需要一套系統化的方式來詮釋，樹狀圖即是適合的教學工具（English, 1993）。

（一）樹狀圖於機率學習

Fischbein 與 Gazit 的合作研究（1984）都認為兒童對於機率的初始直覺經驗仍很薄弱，需要藉由正式課程教學來引導其發展與進步。對此在教學中，Fischbein（1987）表示樹狀圖是有效的教學工具，它能將抽象機率概念轉換成直觀，且有效率的繪製出二元

序對，甚至是三元序對。但 Fischbein 亦指出樹狀圖並不是人的直覺、本能可以自發性的建立，還是需要教學的介入。上述中提供一項證據，即是樹狀圖的教學需要將抽象機率概念連結於具體、直觀上，而非僅限於處理序對之思維。

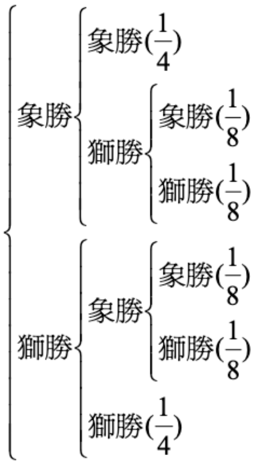
英國數學教育學者 Green（1983, 1984）指出，在 1980 年代以 3000 名十一到十四歲的英國學生所做的研究顯示，運用有系統的教學方法，可以建立機率知識外，並減少學生在學習上產生迷思概念。如今，四分之一世紀之後，英國在 Pearson 版本的教材中，以樹狀圖處理樣本空間外，更利用樹狀結構導入乘法原理。如此系統化的內容引導，研究者推論現代的英國學生應有具備更佳的機率概念，並培養出正確的不確定性思維（許哲毓、單維彰、劉柏伸，2016，頁 3）。

近年，Leslie 和 Kenneth（2000）針對兒童機率直觀概念，設計一個包涵七個活動之教學模組，在活動分析時，以樹狀圖為教學模型，說明真實的樣本空間，改善兒童的直觀概念。Aspinwall 和 Shaw（2000）說明樹形圖是啟發學生視覺的工具，有助於他們改變對機率活動的看法和直覺。學生不再僅依靠快速、直觀的反應，而是通過更全面的分析來影響他們的直覺。Maher 和 Ahluwalia（2014）認亦談到樹狀圖為分析機率事件之重要工具，能使學生有效學習機率思維。Nguyen（2015）針對加拿大 12 年級學生之應用數學課程中學習機率歷程中，發現應用樹狀圖能增加學生對於機率的思考，有效發展機率思維。

此外，國內陳彥廷、劉祥通（2001）在多元智慧對數學教學之啟示，提出一道問題，如表 3。

上題之說明為若樹狀圖所標之隊伍是代表獲勝之隊伍，則其可能路徑有以下各種。最後括號乃代表此一路徑發生之機率，在此樹狀圖可發現：樣本空間各種情形的機率和為 1。以及樣本空間的每一種情形其機率未必相等（陳彥廷、劉祥通，2001）。對此，陳彥廷、劉祥通（2001）表示教師若引用路徑圖（Vertex-Edge Graphs）與樹狀圖，不僅可以打破孩子「樣本空間中每種情形的機率都相等」的迷思概念，亦可培養其分析之能力。

表 3
樹狀圖之棒球隊例題

題目	圖解
統一獅、兄弟象兩棒球隊過去比賽勝負各占一半，今兩隊採三戰兩勝制，如果其中任一隊連勝二場，第三場就取消不比了，預訂三場球賽分別在台北、台南、高雄舉行。試問： 1. 統一獅隊連勝兩場的機率是多少？ 2. 高雄有舉行比賽的機率是多少？ 3. 高雄沒有舉行比賽的機率是多少？	

綜上所述，學者們皆認為以樹狀圖之圖像表徵作為學習機率工具，可進而降低學習抽象概念之負擔。而 Lowe（1994）亦指出圖是一種經過高度選擇的表徵形式，能夠幫助解題者獲取資訊以及便於理解與記憶資訊，圖像表徵就是一種解題方法（Schoenfeld, 1979, 1980），特別是樹狀圖在機率上之使用。此外，Freudenthal（1973）亦強調排列與組合是樣本空間的脊柱，而排列組合推理的基礎則是加法與乘法原理（Polaki, 2002; Shin & Steffe, 2009）。上述再次凸顯樹狀圖之圖像表徵作為學習高層次機率概念之價值，接續第二小節將探討圖象表徵如何於應用於本研究之教材教法。

（二）圖象表徵於機率學習

鑑於圖像在數學、機率解題中扮演關鍵的輔助工具，文獻上亦指出透過簡單的線條與空間關係，傳遞特定的數學意義或啟發先備知識，其中包括代數、函數、幾何與統計機率等關係（Polya, 1957; Larkin & Simon, 1987; Arcavi, 2003; Roth & Bowen, 2003）。因此，教學者在設計教材與教學活動時，應先清楚瞭解人們處理訊息的認知架構（cognitive architecture），才能設計出降低學習者認知負荷的學習活動。在認知心理學中，以「認知負荷理論」為核心，將個體如何處理訊息的觀點，融入教學活動的教學設計中。例如 Schnotz 與 Bannert（2003）指出圖形或文字的訊息經由接收、組織後皆會而形成一個圖文整合心智模式，而且不同表徵所呈現的意涵是可以相互補充、加深學生對知識的理解。

Paivio（1971, 1986, 1991）提出雙重編碼理論（dual coding theory），認為圖像與文字是透過不同的認知子系統進行訊息處理與編碼：分別為語文系統（logogens）和圖像系統（imagens）。而語文系統以語文元（logogens）為基本單位編碼儲存在文字記憶區；圖像系統以意象元（imagens）為基本單位儲存在圖像記憶區，並同時也在語言記憶區留下相對應的文字訊息。因此，若知識以圖像呈現，可為文字的理解提供輔助，降低語言之認知負荷。因此許多學者認為雙重編碼理論強調有圖形相隨的文字（Clark & Mayer, 2003; Schnotz and Bannert, 2003），更有助於學習。

Jitendra（2002）指出圖像表徵可以減輕學習者在認知處理的負擔，且能製造有用的訊息，分析和解決問題。Uesaka 和 Manalo（2011）在研究中指出，學生能從學習的經驗中獲得畫圖的技能，並期望藉由使用圖示策略使數學學業進步。因此，在教學的過程中，要不斷地鼓勵學生將問題視覺化（Hegarty and Kozhevnikov, 1999）。林秀燕（2004）及陳柏如（2005）也指出利用圖像表徵可以幫助學生理解題目。本研究發展之樹狀圖，將依據文獻上的要點做為教學重點之一。

在不確定性知識上，Scheaffer、Watkins 與 Landwehr（1998）認為讓學生理解表格和圖像所表達的意義，以及如何決定使用它們來解決問題都是重要的學習歷程。而在理解圖像的模式上，Roth 和 Bowen（2003）認為圖像包含四元參數關係（four-parameter relation），分別是內容、符號、情境脈絡與規則。Friel、Curcio 與 Bright（2001）亦提出理解圖表的四個關鍵因素，包括圖表目的（the purposes for using graphs）、任務特徵（task characteristics）、學科特徵（discipline characteristics）和讀圖者特徵（reader characteristics），並發展出圖感觀念（graph sense）。

機率教學最為困擾之處，無非是機率概念過於抽象、無法理解，機率問題在感受上不夠貼近生活。上述文獻中所表明圖像表徵是較具體的表徵方式，可以詮釋抽象的不確定性概念，會讓概念變得更為意義化。這些徵皆是幫助研究者或教師進行圖像教學或教材設計時，所需考量之因素。不過，現階段瀏覽臺灣的課程，圖文整合並不常在教科書中出現，對臺灣學生來說，確實較少培育圖感的機會。從教育現場給予回饋時，教師多次提起學生對於畫圖有相當的不適應，甚至有懼怕畫圖的情況，以及懶惰的心態。學生在解題的當下，都從公式開始著手，雖然並非每道題目都能畫圖幫助理解，但若都以公式解決問題，實非理想的學習方法。

有鑑於此，研究者認為基礎的機率教育中，應著重和循序樹狀圖之結構，以圖像思考讓學習者之思維與機率概念能夠連結，從視覺經驗提升機率概念的學習成效，建立一套機率課程模組。不單只是列出樣本空間，更利用樹狀結構，從中解釋機率概念，如互斥性、獨立性等，並能接續到排列與組合等高層次的機率課程。同時，藉由不確定性情境脈絡，引導學生理解如何將圖像與文字之搭配學習，進而達到抽象化概念轉化為具體的機率思維。

第三節 機率迷思

自古以來不論學習哪些科目，總是遭遇不同因素導致思維的盲點。這些不適的反應稱作為迷思概念（misconception），意指學生面臨學科之現象或問題時，為了要瞭解、解釋問題的合理性，不當地使用自身經驗、信念、方法和「內在架構」做詮釋（陳欣民、劉祥通，2002）。特別是學習抽象化概念時，更容易發生這樣的狀況。而機率的學習歷程中確實有此特性存在，若事先找出其迷思概念，則可在課程內容中設計相關「迷思概念」之思辨機會，使教師在教學時能有所察覺，並讓學生能夠除去迷思，建立正確的機率思維。

從文獻中可知，學者們從教學實驗中，發現眾多機率迷思。茲將學者在過去研究中已發現之機率迷思概念，分述與舉例如下，歸納如表 4（Tversky & Kahneman, 1973, 1983; Shaughnessy, 1992; Tversky & Kahneman, 1974; Shaughnessy, 1977; Fischbein & Gazit, 1984; Konold, 1991；陳欣民、劉祥通，2002）。

代表性捷思策略（representativeness heuristics）表示在預測時，其判斷依據基於事件發生的情況是否能符合隨機的母體分配（Kahneman & Tversky, 1974; Shaughnessy, 1977; Fischbein & Gazit, 1984）。例如籃球選手在過去十場比賽，平均場上失誤 9.5 次。故在下次比賽時，將認為他失誤次數接近 10 次，甚至超過。可獲性捷思策略（availability heuristics）表示人們在預測時，其判斷過度依賴狹隘經驗與個人醒目觀點之法則 (Fischbsin & Gazit, 1984; Tversky & Kahneman, 1973; Tversky & Kahneman, 1974) 。例如當各國新冠肺炎確診率居高時，自己會感覺所在的地區相當危險，但事實上臺灣防疫措施有效並沒有造成大規模感染。

表 4

機率迷思相關研究

機率迷思	特徵說明
代表性捷思策略	1. 符合母群體隨機過程分配典型。 2. 符合理想母群體分配典型。 3. 正時近效應（positive recency effect）。 4. 負時近效應（negative recency effect）。
可獲性捷思策略	人們基於容易建構、記得或從記憶中喚起的例子來做對事件做預測。也就是說「內心對特定例子的相信程度來估計事件發生的可能性」。
結果取向	過於把注意力放在「結果」上，而忽略了「機率」的真正意涵。
忽視樣本空間大小對預測準確性之影響	在面對樣本點分配均勻，或樣本點次數比值相同的不同試驗時，會依其所呈現出的比例關係來做為判斷機率大小的依據，而未考慮其試行次數的不同。因為不同的試行次數，代表不同的樣本空間大小。
對稱性機率實驗與非對稱性機率實驗	無法分辨對稱性與非對稱性事件其差異。而都將事件視為均勻、公平之概念。
判斷事件發生的可能性時，所使用的錯誤想法	複合事件之判斷

結果取向（outcome approach）表示在預測時，把注意力放在「結果」上，認為事件中的每一個試驗都是分開的個別現象，而忽略了「機率」的真正意涵。例如以 50%的機率做為指標，用來判斷某事件是否發生的依據（Konold, 1991）。忽視樣本空間大小對預測準確性之影響，表示有些人在公平事件下或相對次數之比值相同時，會依其結果之比例關係來做為判斷機率大小的依據，卻忽略上述可能是不同的試驗（Schrage,1983），而未考慮真實樣本空間。例如有些人會將「投擲一顆骰子 10 次出現 6 次 5 點」的機率，和「投擲 40 次出現 24 次 5 點」的機率視為相等。

對稱性機率與非對稱性機率實驗，樣本空間中，每一樣本點可能發生的機會在直觀上是相等的。例如投擲瓶蓋，出現正反側三面之機率各為$\frac{1}{3}$，即是使用對稱性機率思考。又或是國小職前教師在判斷「明年元旦上午 10 時的天氣可能出現晴天的機會有多少？」，多數傾向回答「$\frac{1}{3}$」，但實際上天氣變化是非對稱性事件（林燈茂，1992）。判斷事件發生的可能性時，所使用的錯誤想法。Fischbein（1991）指出有兩種情況，第一種是必然（certain）、可能（possible）、不可能（impossible）的用語判斷，第二種是複合事件（compound events）。例如：同時丟兩個骰子，結果組合為 5 點與 6 點的機率大，還是組合都是 6 點的機率大」時，此時學生容易忽略「組合為 5 點與 6 點」的情況有兩組，而認為兩者情況之機率相等的錯誤思考（陳欣民、劉祥通，2002）。

此外，機率問題中的時序邏輯性問題，也是頗經典的學習困難點。如 Shaughnessy（1992）曾提出一個相反問題：裝有兩個白球及兩個黑球的袋中，依序抽出兩個球而且第一個球取後不放回。試問第一個球是白色的情形下，第二個也是白色的機率是多少？再者若第二個球是白色的情形下，第一個也是白色的機率是多少？第一個問題是典型的機率問題，其解決方案毫無疑問，但第二個問題是時序相反的情境，就不是這麼容易解決。對於上述之問題二 Falk 認為必須先隱藏第一顆球色，然後直接看第二球色，此時向學生做第一個球為白色之機率（第一球依然未知），方可理解正確答案為$\frac{1}{3}$。

類似地，多重機率概念之混合，例如條件機率和獨立事件的混合題目，也構成學習困難。例如李源順（1994）舉出此題為例：一個袋子裡裝了三張卡片，一張兩面都是綠色，另一張兩面都是藍色，而最後一張是一面綠色一面藍色。現在抽出一張卡片並且看到其中一面是藍色的，請問抽出的這張的另一面也是藍色的機率多少？此題不宜以直觀猜測。研究者將在機率實驗教材中，嘗試添一系列迷思概念之練習，特別是樣本空間、獨立事件與條件機率之概念。

綜上所述，在探索機率迷思的過程中，研究者亦發現不管是否曾經學習過機率的人，都會有犯下迷思錯誤的可能。如同 Fischbein、Deri、Nello 與 Marino（1985）指出學習者雖已習得數學術語或符號，進行正確回答。但一旦面臨情境變化，其直觀概念就會再次浮現腦中。可見數學之直觀思維，難因接受學習而改變，是生活與學習經驗之影響導致。

有鑑於此，本研究在進行教材教法設計中，將提供學生進行機率迷思之答辯機會，期望學生從中可以減少機率迷思的產生。此外，較少文獻討論以樹狀圖為解題工具，故研究者將針對學生樹狀圖之文本進行分析，從中釐清學生可能犯下之樹狀圖之建構與使用上之迷思。

第四節 臺灣數學課綱之機率單元

在臺灣的課綱史上，隨著社會的脈動，自從民國 57 年實施九年國民教育以來，國中階段的課程至今有五次變革。第一次改革發生在民國 60 年代初期，以民國 64 年版的課程標準為具體結果。第二次改革則是民國 72 年的課程標準，以及隨即公告於民國 74 年的課程標準修訂（呂溪木，2007）。70 年代為一個分界點，70 年代前的思維為由上到下的變革（先修訂高中，在向下調整）；隨後則為相反，為下到上的變革（先修國小、再至國高中端）。第三次改革為民國 82 年至民國 84 年。民國 82 年公布的國小課程標準，其數學教育目標揭示了「建構」一詞，成為新課程較具爭議的課題（周祝瑛，2003a）。第四次變革為民國 89 年公布「國民中小學九年一貫課程暫行綱要」，並在民國 92 年公布「國民中小學九年一貫課程綱要（數學學習領域）」及民國 97 年再次微調。最後，第五次改革則為民國 107 年公布的「12 年國民基本教育」，以及後來公布的 108 課綱。

民國 53 年時，「機率」僅置入高中的數學課程，亦稱「概率」。但小學和初中階段都沒有機率。這是機率第一次在課綱中出現，且於高中端。在當時的學生不管是自然組或社會組，學習機率的內容之教材皆為相同。在課程上的編排，類似 Jones 等人（1999）提出的機率思考層次，內容從「樣本空間」至「條件機率」與「獨立事件」，但學生學習時程是不相同的。歸納出這時期的兩項特點：（1）以嚴謹的「集合」邏輯來表示樣本空間與事件，（2）將機率作為排列組合的銜接課題。而這樣的觀點影響至今（單維彰、許哲毓、陳斐卿，2018b）。

民國 60 年代，唯獨初中階段沒有機率，而高中與國小皆有機率。高中數學課程延續民國 53 年版的全部內容，包涵古典、頻率與形式機率（以隨機變數的形式呈現），且增加了貝氏定理。在當時市面上流通的教科書共有數理本、實驗本與東華本三種，而范傳坡教授主編的數理本、黃武雄教授主編的實驗本，都講解了主觀機率類型（稱為直觀的機率）（陳玟樺，2017）。國民小學課程標準首次出現機率。學習內禜涵蓋頻率與古

典兩種類型，而概念層次皆為單一事件。另外，第二次改革的主要重點為減少教材中「集合論」的份量，以凸顯對數學知識「質」與「方法」的重視（單維彰等人，2018b）。

民國 70 年代起，首在 72 年版的高中數學課程將機率提前到高二，僅只呈現古典機率類型。上一代課綱的頻率、主觀、與形式機率類型皆被刪除（刪除隨機變數）。74 年進行微調，初中階段首度在國三選修數學加入了機率，包括頻率機率（稱為實驗機率）與古典機率（不涉及樣本空間與排列組合），解題技術上採用樹狀圖作為主要手段。可知初中階段填補了部分 72 年高中端被刪掉的內容。在這時期，臺灣的機率課程總算在國小、初中以及高中各有安排（單維彰等人，2018b）。

民國 80 年代起，臺灣社會喚起教育多元與開放的思維，數學教育界對教學方法有著重大變革。民國 82 年的國小課程標準裡，機率的課程以「機率的初步概念」認識為主，包含「部分與全體的關係」以及「大數法則」。此時主要以「建構式數學」作為軸心，但不太影響機率課程的內容。在 89 年的九年一貫數學領域暫行課程綱要，國小階段還有留下「可能性」。然而，後來不知其真正原因，92 年起之正式綱要國小完全沒有機率課程，全數內容移至九年級。在 97 年修訂中依然如此，且九年一貫公布的機率課程在細目裡提到「由於機率概念的掌握並不容易，因此應先從最清楚、易學習的機率觀─古典機率開始學習」（教育部，2008）。然而實際考察各版本的教科書，對於其他類型的機率幾乎沒有解釋，僅琢磨古典機率類型的教學。這時期的改革，使得國民之義務教育中，學習機率的機會不再均勻分布出現於三個階段中，且出現時間也相當的晚。

當代最新的改革為 108 年實施的課綱，研究者詳讀 107 年公告之 108 課綱（針對不確定性內容），並與專家、現場教師會談後，做出一些總結。展望 108 課綱，在民國 108 年從一年級、七年級、十年級開始實施的十二年國教課程綱要，在三年級加入「列聯表」，在六年級加入「可能性」；前者可以作為頻率機率的操作工具，後者可以作為頻率機率和主觀機率的概念導入。但是國小階段沒有機率，正式的機率課程還是從九年級開始。教學內容僅限古典機率（且限單一事件），沒有發展頻率機率也不連結主觀機率，其實內容與 97 課綱是一致，機率在能力指標或是分年細目表，皆僅一條表述，即是「能在具體情境中認識機率的概念」。高中端的課程亦是如此，詳見 108 數學領綱（教育部，2018）。

回顧臺灣課綱演變，可知我國機率課程曾經涵蓋三種機率類型的綜合學習。我國早期的六年級機率課程就含有主觀機率的成分，而過去的國、高中機率課程關注大數法則，就是頻率機率的體現。反而是近年的數學課程，取消了主觀機率和頻率機率。但是在最近十年，卻從九年級下學期才開始教導機率，並在類型上獨尊古典類型，且以單一事件為主。這些現況顯然與本研究回顧的認知發展與適學年齡理論不合，與國外相比，我國機率課程在中小學階段反倒有縮減過度的情況，而在高中端又相對負荷較大，且依然將機率限制於集合論之下。

鑑於上述，研究者認為過去臺灣的機率教學習慣以集合觀點解釋機率，更慣於將排列組合作為機率的先備知識。然而，集合論是安排在高中階段，使得臺灣在國中階段，機率學習受到限制。特別是「互斥和事件」、「獨立事件」的內容。不過，為釐清上述之現象，是否為我國不合常理之安排。下節將分析幾個國家的機率課程，以避免研究者的思維過於武斷。

第五節 外國數學課綱之機率單元

首先，研究者瀏覽了美國、英國近年才剛擬定之新的課程標準與教科書內容。從中確認這些國家的教科書的確按照課綱，提供了豐富的「不確定性」學習內容。值得本研究參考與反思。以下將介紹美國與英國之國中階段不確定性課程重點。

在 2010 年，美國史無前例地規劃了各州共同核心標準（CCSS），影響幾乎遍及全美（CCSSI, 2010）。這是美國第一次有共同的課程標準。雖然美國憲法規定不能強制執行，但在各州政府的鼓勵下，僅有少數的州政府不採用。美國 CCSS 六年級關於不確定性主題有五項年級目標，全部屬於數據處理範疇。七年級關於不確定性主題有八項年級目標，其中機率和數據處理各占一半，而機率部分的目標如下（單維彰等人，2018b）：

（1） 了解機率是表示事件發生之可能性的數，它的值介於 0 與 1 之間。其值越接近 1 表示越可能發生，越接近 0 表示越不可能發生，而 1/2 附近的值難以決定的可能性。

（2） 透過收集數據和長時觀察來估計不確定事件之機率，並在給定機率的條件下預測該事件的相對次數。

（3） 發展機率模型並用以發現事件的機率。將模型推論的機率與實際觀察到的頻率做比較；如果模型的預測效果不好，解釋差異性的可能原因。

（4） 運用有系統的列舉、表格、樹狀圖或模擬，求得複合事件的機率。

美國八年級關於不確定性主題的四項年級目標，全都牽涉二維數據分析。完整的資訊放在以下網址 http://shann.idv.tw/Teach/mathedu/1072.pdf。

英國十一年的國民義務教育分成四個關鍵階段 （Key Stages）：一、二 年級是第 1 階段，三至六年級是第 2 階段，七至九年級是第 3 階段，十、十一年級是第 4 階段。在國定課程標準裡面，每個科目（包括數學）都自訂其教學主題，並針對每個主題列出 8 級 （Level 1—8） 的能力描述，還外加一個「破表」等級 （Exceptional Performance），所以可以視為一共有 9 個等級（陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005）。在國中階段，也就是第 3 階段結束時，學生應能達到等級 5 或 6。以下列出與本研究相關之第 3 與第 4 階段之指標。

英國在第 3 階段（KS3）關於機率的指標有以下四條（National Curriculum, 2014）：

（1） 能記錄、描述和分析隨機試驗之各種結果的發生頻率，能用適當的語言和 0 與 1 之間的機率尺度，表達公平性以及相等或不相等的可能性。

（2） 理解所有可能結果的機率總和為 1。

（3） 能有系統地使用表格、網格和文氏圖來計數集合以及聯集和交集的元素個數。

（4） 能為單一或複合事件產生互斥且出現機會相等的樣本空間，並據以計算它們的理論機率。

英國所稱呼的「理論機率」就是前述之「古典機率」。英國在第 4 階段（KS4）關於機率的指標有四條，也包括了列聯表和文氏圖，與本研究無直接關聯而從略。

再者，除了探究歐美國家的課程外，研究者也針對亞洲鄰近兩國數學教科書進行討論，分別是中華人民共和國與日本。這兩國學生在義務教育階段上，其數學教育表現有目共睹。以下將介紹中國與日本之國中階段之教科書機率要點。

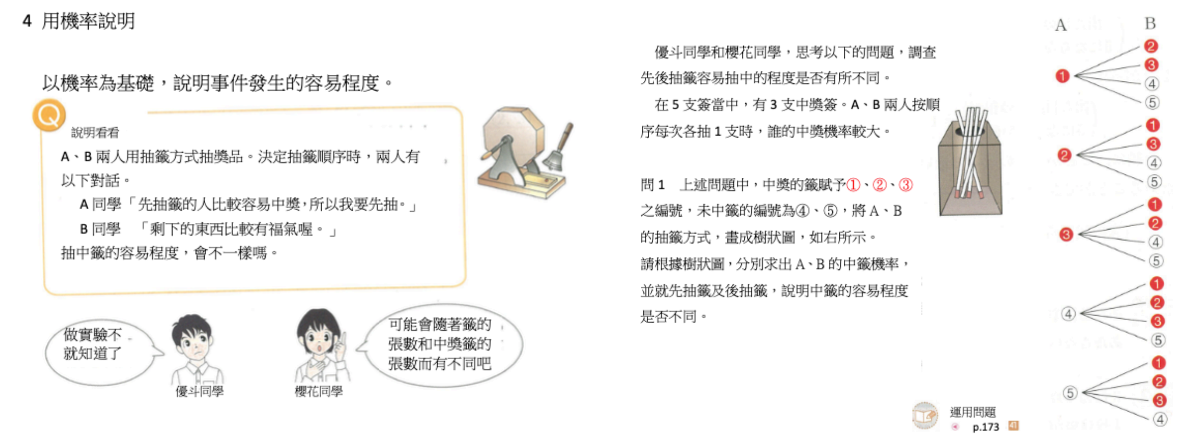
中國教育階段分為三個階段：第 1 學段（一至三年級）；第 2 學段（四至六年級）；第 3 學段（七至九年級）。中國在第 1 學段（一至三年級）、第 2 學段（四至六年級）起即有機率相關之課程，發展時程相當早。根據課綱此時期主要有讓學生在具體情境中，通過通過試驗、遊戲等活動，感受簡單的隨機現象、可能性是有大小的，並能作出定性描述，並能進行交流；能列出簡單的隨機現象中所有可能發生的結果。進入第 3 學段（七至九年級）以能通過列表、畫樹狀圖等方法列出簡單隨機事件所有可能的結果，以及指定事件發生的所有可能結果，了解事件的概率。

中國數學課程標準（2011）對上述之意涵舉出具體教學範例：40 袋中裝有 4 個紅球和 1 個白球。只告訴學生袋中球的顏色為紅色和白色，不告訴他們紅球數目與白球數目，讓學生通過多次有放回的摸球，統計摸出紅球和白球的數量及各自所占比例，由此估計袋中紅球和白球數目的情況。（1）適合於第二學段。通過摸球，學生發現每次摸出的球的顏色不確定，初步感受數據的隨機性。進一步通過統計摸出紅球和白球的數量，可以估計袋中是白球多還是紅球多。在不確定的基礎上，體會規律性。（2）適合於第三學段。在上述基礎上，學生可以估計袋中白球數量和紅球數量的比，進一步體會規律性。教師可以進一步鼓勵學生思考：若給出袋中兩種顏色球的總數，如何估計白球和紅球各自的數量。

日本 2009 年新修訂中學校課綱，新增了教導統計和機率的「資料活用」，顯示不確定性教育的重要性。日本教育階段和我國相同，主要劃分為三個階段：1.小學校（6 年教育，6-12 歲學生入學）；2.中學校（3 年教育，12-15 歲學生入學）；3.高等學校（3 年教育，15-18 歲學生入學），而一至九級為義務教育階段，故本研究僅討論前二年段。日本在小學校之資料活用課程以統計為主，從處理數據、理解統計數、圖表解讀到數據考慮代表價值的含義，以及根據目的如何顯示頻率分佈和使用表格和圖表解決統計問題。中學校之資料活用課程，機率主題為讓學生了解數據分佈和機率的基本概念和屬性，並能夠收集和分析數據並獲得機率，重要的是要表達不確定事件的變化。在課程上，以日常生活和社會中的不確定事件為主題，不確定事件發生的趨勢可以通過數值表示和掌握發生的容易程度來讀取和表達。在教學上，不僅尋找正確的答案，更需要幫助學生澄清和解釋他們的預測和決定。學生可以意識到機率這個數值的意義，探索解決問題的方法和尋求答案。

基於小學校扎實的統計學習，日本中學校學生才能達到，在面對不確定性事件，可以使用機率的性質來進行抽樣調查，並且解釋結果、根據目的做出預測和判斷（日本文部省，2010）。以下舉出具體教學範例，如表 5。本題開頭即說明以機率思維作為情境之說明，學生將調查不同抽籤方式之情境，收集和分析數據並獲得不同情境之中獎機率。最後根據目的做出判斷、解釋其結果，以及對新的情境做出預測。

表 5
XX 書籍之範例


4 用機率說明

以機率為基礎，說明事件發生的容易程度。

說明看看
A、B 兩人用抽籤方式抽獎品。決定抽籤順序時，兩人有以下對話。
A 同學「先抽籤的人比較容易中獎，所以我要先抽。」
B 同學　「剩下的東西比較有福氣喔。」
抽中籤的容易程度，會不一樣嗎。

優斗同學和櫻花同學，思考以下的問題，調查先後抽籤容易抽中的程度是否有所不同。

在 5 支簽當中，有 3 支中獎簽。A、B 兩人按順序每次各抽 1 支時，誰的中獎機率較大。

問 1　上述問題中，中獎的籤賦予①、②、③之編號，未中籤的編號為④、⑤，將 A、B 的抽籤方式，畫成樹狀圖，如右所示。
請根據樹狀圖，分別求出 A、B 的中籤機率，並就先抽籤及後抽籤，說明中籤的容易程度是否不同。

綜上所述，研究者認為英、美、中與日的中學生，在機率（和數據處理）課題上，有豐富的時間、機會做學習，相對而言我國的學生欠缺學習機會。研究者假設那些國家的學生，普遍能夠接受那些不確定性主題的學習內容，那麼轉換到我國的學生，根據文獻與研究結果，我國學生確實可能準備好了學習和應用機率的認知能力和數學基礎。

有鑑於此，研究者認為國民教育需提供學生充分學習機率的機會，時程的安排可以大膽一些，但執行時要細膩的設計。本研究將以義務教育之階段為主。在教材上，檢視國中學生的認知能力，兼顧高中階段機率課程之所需，重新架構國中階段應學哪些機率概念，以促進國民素養，並銜接高中課程。本研究之實施，同時有利於機率教育研究之創新發展，以及機率整體課程之重新擘畫。

第六節　詮釋結構模式

將知識系統中的獨立概念類比於「元素」，則知識系統亦可視為概念元素之間的連結關係。專業知識之所以難以建構，基本原因可能就是概念網絡的錯綜雜亂，尤其抽象

知識體系中的概念關聯性更是如此。對此，Warfield 於 1976 年提出詮釋結構模式（interpretive structural model, ISM），將知識系統內的概念元素間混亂複雜的關聯，轉變為具體且易於呈現整體性關聯構造的階層圖，屬於一種數理取向之分析方法（Warfield, 1982）。ISM 的主要功能是「建立整體概念元素之間的關係，即經由部分元素之間的關係，整合起來形成所有元素整體之關係」（許天維、林原宏，1994）。佐藤隆博於 1987 年將此方法應用於知識結構的研究（林原宏，2005）。教育上之相關研究，亦可應用 ISM 之部份概念元素間的關係組成，系統化整體元素關係。

不過，在 ISM 分析中，元素間的關係僅限於二元關係，在教育這種非絕對性邏輯之應用上有其限制與不適性。故林原宏（2005）提出利用模糊理論截矩陣以及概念向量比對（concept vector matching）之方法，突破了二元關係之限制。此方法依據測驗資料應用模糊邏輯知覺理論（fuzzy logic model of perception, FLMP）測度方法進行轉換，使學生習得概念之關係不再限於二元。接下來即可運用 ISM 分析方法的階層結構運算法則，以數值及圖形呈現個別化概念階層結構（individualized concept hierarchy structure）。

隨後，Lin、Hung、Huang 與 Li（2009）將上述模式發展為多元計分概念詮釋結構模式，改良二元計分的限制性，將其分析資料擴展至多元計分或混合計分模式，且新增概念權重的分析，以「概念」為分析單位，據以呈現個別化的概念結構圖；此即廣義加權概念詮釋結構模式（generalized weighted concept interpretive structural modeling, GWCISM）。此模式適用各種選擇題、填充題和建構反應題等各種試題的計分模式，並根據個別受試者的測驗反應和權重關係，呈現個別化的認知結構圖和各概念的精熟度。其分析結果讓研究者可觀察個人化的概念結構訊息，以及受試者各自獨立的概念階層結構圖形。

綜上所述，本研究因收集之資料特徵，將使用 GWCISM 進行分析。以下介紹其演算過程（引自 Lin 等人, 2009），但本研究不涉及概念權重之分析，故不進行探討。

首先，定義 GWCISM 所需的各種矩陣，如下。在下述定義中，假設共有 N 位學生（$n=1,2,\cdots,N$）參與測驗，該測驗共有 M（$m=1,2,\cdots,M$）個多元或二元計分試題，試題之中共涉及 A（$a=1,2,\cdots,A$）個概念。

（1） 學生反應矩陣

受試者 n 在試題的得分，以作答反應向量 $\mathbf{x_n}=(x_{nm})_{1\times M}=(x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nM})$ 表示。令試題 m 為 K_m 元計分，亦即受試者 n 在試題 m 的得分可為 $x_{nm}=0,1,2,\cdots,K_m-1$。$N$ 位受試者構成矩陣 $\mathbf{X}=(x_{nm})_{N\times M}$，稱之為學生反應矩陣（reponse matrix），如表 6。

表 6
學生反應矩陣

	題 1	題 2	題 3	題 4
學生 1	1 分	0 分	3 分	2 分
學生 2	0 分	2 分	3 分	1 分

（2） 試題屬性矩陣

$y_{ma}=1$ 表示試題 m 有測量概念 a；反之，則 $y_{ma}=0$。以 $\mathrm{y_m}=(y_{ma})_{1\times A}=(y_{m1},y_{m2},\cdots,y_{mA})$ 表示試題 m 是否測量各概念，矩陣 $\mathbf{Y}=(y_{ma})_{M\times A}$ 稱之為試題屬性矩陣（item-attribute matrix），如表 7。

表 7
試題屬性矩陣

	L 概念	P 概念	B 概念	T 概念
題 1	1	0	0	1
題 2	0	1	0	0
題 3	0	0	1	1

（3） 典型概念矩陣

受試者對於各概念具備與否，形成典型概念組型（ideal concept pattern）。典型概念組型 i 在概念 a 之具備情形以 z_{ia} 表示，$z_{ia}=1$ 表示典型概念組型 i 在概念 a 是具備的；反之，則 $z_{ia}=0$。由於測驗共測量 A 個概念，因此有 $I=2^A$ 種典型概念組型，以典型概念向量 $\mathbf{z_i}=(z_{ia})_{1\times A}=(z_{i1},z_{i2},\cdots,z_{iA})$ 表示，其中 $i=1,2,\cdots,I$，$\mathbf{Z}=(z_{ia})_{I\times A}$ 稱為典型概念矩陣（ideal concept matrix）。

（4） 典型反應矩陣

典型反應向量（ideal response vector）$\mathbf{r}_{\mathrm{i}}$ 表示「典型概念向量 $\mathbf{z}_{\mathrm{i}}$ 在各試題的作答反應向量」，以 $\mathrm{r}_{\mathrm{i}}=(r_{im})_{1\times M}=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{iM})$ 表示，且 $\mathbf{R}=(r_{im})_{I\times M}$ 稱為典型反應矩陣（ideal response matrix）。

（5） 相似度矩陣

相似度（similarity）c_{ni} $(0\le c_{ni}\le 1)$ 表示受試者 n 是否為 $\mathbf{z}_{\mathrm{i}}$ 典型概念組型的程度，N 位受試者與 I 個典型概念組型構成相似度矩陣（similarity matrix）$\mathbf{C}=(c_{ni})_{N\times I}$。

（6） 精熟度矩陣

d_{na} 表示受試者 n 在概念 a 的精熟度（mastery），$\mathbf{D}=(d_{na})_{N\times A}$ 稱為概念精熟度矩陣。

理解各矩陣之後，茲以圖 2 之流程圖展示 GWCISM 的工作流程。

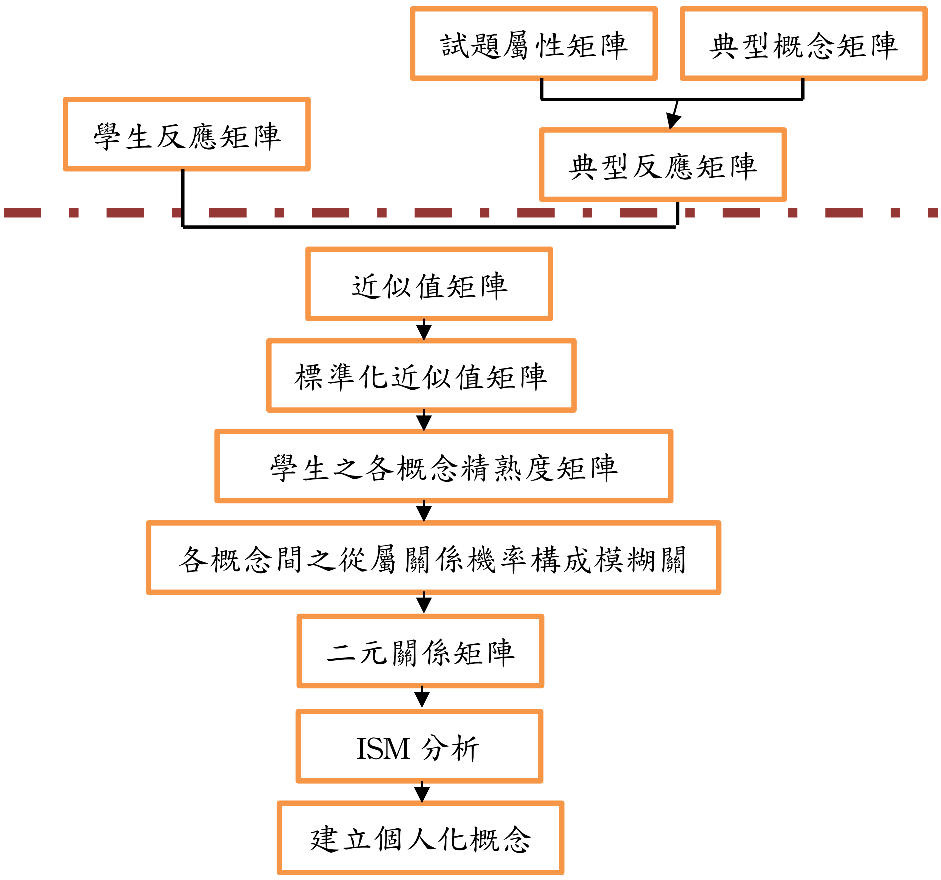


圖 2 GWCISM 演算流程圖（葉律吟，2008）

圖 2 之 GWCISM 流程中所需的各種計算步驟，列舉如下。

（1） 正規化得分矩陣

將學生作答的反應矩陣 $\mathbf{X}$ 做以下正規化（standarized）運算：受試者 n 的正規化得分反應向量為 $\mathrm{sx_n} = (sx_{nm})_{1\times M}$，其中 $sx_{nm} = \dfrac{x_{nm}}{K_m - 1}$ 且 $0 \le sx_{nm} \le 1$。

$\mathbf{SX} = (sx_{nm})_{N\times M}$ 稱為正規化得分矩陣。

（2） 典型反應矩陣演算

將典型概念向量 $\mathbf{z_i}$ 與試題屬性矩陣 $\mathbf{Y} = (y_{ma})_{M\times A}$ 進行比對，得到典型概念組型在各試題的作答反應，稱為典型反應向量，以 $\mathbf{r_i} = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{iM})$ 表示。

$\mathbf{R} = (r_{im})_{I\times M}$ 即為 I 個典型概念組型所構成典型反應矩陣。比對演算定義如下：

$$r_{im} = \begin{cases} 1 & , \quad (z_{ia})(y_{ma}) = y_{ma}\ , \forall\ a = 1,2,\cdots,A \\ 0 & , \quad \text{else} \end{cases}$$

（3） 相似度矩陣及其正規化演算

正規化得分向量 $\mathbf{sx_n} = (sx_{nm})_{1\times M}$ 與典型反應向量 $\mathbf{r_i} = (r_{im})_{1\times M}$ 之相似度定義為此兩向量的餘弦 $\cos\theta$，其中 θ 為兩向量夾角。由於兩向量的元素皆為正，所以 $0 \le \cos\theta \le 1$。相似度 c_{ni} 定義如下式：

$$c_{ni} = \cos\theta = \frac{(\mathbf{sx}_\mathrm{n}).(\mathbf{r}_\mathrm{i})}{\|\mathbf{sx}_\mathrm{n}\|\|\mathbf{r}_\mathrm{i}\|}\ ,\ 0 \le c_{ni} \le 1$$

$\mathbf{C} = (c_{ni})_{N\times I}$ 為所有受試者與 I 個典型概念組型的相似度矩陣，正規化相似度矩陣以 $\mathbf{SC} = (sc_{ni})_{N\times I}$ 表示。根據 c_{ni} 值的不同情況，sc_{ni} 的計算定義可分成以下兩種情形：

(3a) 若有 K 個 c_{ni} 滿足 $c_{ni} = 1$，則 $\mathbf{x}_n$ 與 $\mathbf{r}_i$ 兩向量為明確辨識（crisp recognition），

令正規化相似度 sc_{ni} 為：$sc_{ni} = \begin{cases} 1/K & , \quad \forall\ c_{ni} = 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

(3b) 若 $c_{ni} \neq 1$,$\forall i = 1,2,\cdots,I$，則 x_n 與 r_i 兩向量為模糊辨識（fuzzy recognition），令正規化相似度 sc_{ni} 為：

$$sc_{ni} = \frac{c_{ni}}{\sum_{i=1}^{I} c_{ni}}$$

上述兩種情形的計算結果皆滿足 $0 \le sc_{ni} \le 1$ 且 $\sum_{i=1}^{I} sc_{ni} = 1$。

（4） 概念精熟度矩陣演算

受試者的精熟度矩陣為 $\mathbf{D} = (d_{na})_{N \times A}$，$d_{na}$ 表示受試者 n 在概念 a 的精熟度。計算定義如下：

$$\mathbf{D} = (\mathbf{SC})(\mathbf{Z}) = (d_{na})_{N \times A} \quad 且 \quad d_{na} = \sum_{i=1}^{I} (sc_{ni})(z_{ia})$$

（5） 計算從屬關係機率及概念間模糊關係矩陣

利用 FLMP 之計算，可得受試者 n 在各概念間的模糊關係矩陣（fuzzy relation matrix）$\mathbf{F}_n(p_{aa'})$，$p_{aa'}$ 表示對受試者 n 而言，概念 a 為概念 a' 的先備條件（precondition）之程度，公式如下：

$$p_{aa'} = \begin{cases} 1 & , \quad d_{na} = 1 \ and \ d_{na'} = 1 \\ 0 & , \quad d_{na} = 0 \ and \ d_{na'} = 0 \\ \dfrac{(d_{na})(1 - d_{na'})}{(d_{na})(1 - d_{na'}) + (1 - d_{na})(d_{na'})} & , \quad else \end{cases}$$

（6） 以 α 截集計算概念間明確關係矩陣

依 α 值將模糊關係矩陣 $\mathbf{F}_n(p_{aa'})$ 進行 α 截集（ α-cut），得到二元關係矩陣 $\mathbf{F}_n^{\alpha} = (p_{aa'}^{\alpha})_{A \times A}$，定義如下：

$$p_{aa'}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & , \quad p_{aa'} \ge \alpha \\ 0 & , \quad p_{aa'} < \alpha \end{cases} \quad ，0.5 < \alpha \le 1$$

（7） ISM 構圖演算

二元關係矩陣 $\mathbf{F}_n^{\alpha}$ 為相鄰矩陣（adjacent matrix），經由 ISM 分析構圖可得到個別化認知結構圖。圖中各階層概念的精熟度由下而上逐漸降低，較下層的概念是較上層概念的先備條件。

概念詮釋結構模式已發展多年，國內已有應用此方法的期刊、研究論文。例如林原宏、莊惠雯、易正明（2009）以國小二年級學童的時間概念之知識結構為分析對象，發現概念詮釋結構圖提供個別化的認知診斷訊息，故推論概念詮釋結構圖可供補救教學之依據。近年則有陳殷哲、洪文良（2017）利用概念詮釋結構模式來分析與辨識冒險教育參與者的學習概念層次與層次轉變，特別對參與者的學習效果進行單獨評估，並建立了新的評估冒險教育的方法。

此外，研究者亦整理相關學位論文，如表 8。從文獻中可知，研究方法以教學實驗為主，從中獲取教學後學生知識概念建構之差異。研究對象涉及年齡層段相當廣，從國小二年級到大學階段皆有。再者，探究之知識種類皆是學生在學習上，常有困難與迷思發生的概念。例如程式設計（葉律吟，2008）、速率概念（戴筱玲，2008）、幾何概念（江孟聰，2010）以及比與比例式（賴盈州，2010）等。可見 GWCISM 在分析高層次概念上具貢獻性。特別是，這些研究之成果共同表明概念詮釋結構模式可有效表徵不同學習成就之學習者其概念結構，並從概念結構圖中，發現學生之解題策略之異。以及根據概念詮釋結構圖其概念間指向關係，提供教學者補救教學之參考。

綜上所述，GWCISM 可有效分析知識體系中的概念元素，用以整合概念與知識管理，進而作為新式教材架構、補救教學等參考，且適用於數學教育各項議題。對於本研究而言，基於學生機率知識之建構上，可提供研究者理解哪些機率概念適合於此階段教學，教材內容應該如何調整其機率概念層次與鋪陳，以及在教學上應注重哪些機率知識的澄清，故本研究使用 GWCISM 進行資料分析顯得恰當。

表 8
歷年相關學位論文

文章名稱	年份	作者
運用 S-P 表分析與概念詮釋結構模式於大學部程式設計課程概念之研究	2008	葉律吟
應用 CAISM 與 SCM 分析國小六年級學童速率概念	2008	戴筱玲
應用 CAISM 與 SCM 分析國小五年級學童之時間化聚計算概念	2008	呂秀茹
國小二年級學童時間概念分群化之概念詮釋結構分析與補救教學成效探討	2008	莊惠雯
概念詮釋結構模式的計分法擴展及服務系統建置與應用	2009	林昌宏
國小五年級學童幾何概念階層之概念詮釋結構模式分析	2010	江孟聰
七年級學生比與比例式概念探究-植基於 S-P 表和概念詮釋結構模式之整合分析	2010	賴盈州
國小三年級學童的數解題表現探究-概念詮釋結構與 S-P 表的分析	2011	王佳如

第三章 研究方法與課程設計

本研究將跳脫現有教科書之安排，重新設計一套機率實驗教材，並實際於教育現場實施，其學習成效以機率學前、學後與延宕測驗作為依據，藉此探究八、九年級學生參與機率實驗課程之成效，以及驗證實驗課程的適切性、辨識機率迷思概念之發生。

本章除了逐一說明機率實驗課程設計與實踐之操作方式以外，對於本研究注重之新式機率課程架構設計、教材設計理念、教學方法、實務操作的說明，將在第四、第五節中有詳細介紹。相對於一般學位論文之研究方法，本文在這兩小節所佔篇幅甚大，期望傳達本研究之文本設計與理念，並能成為下一代課綱之機率課程參考模組，具有實質研究成果。再者，本研究之參與人員以研究者為主導，帶領碩士生許芷雲共同完成教學實驗，故研究資料授權為單維彰老師數學教育工作團隊共同所有。

第一節 研究架構

本研究為設計一套適用於八、九年級之機率教材，並針對尚未接受正式機率課程之學生進行教學試驗。評估在為期兩年，從八年級延續至九年級接受機率實驗教學，檢驗其成效。從中實施前測、後測與延宕測驗，以收集學生文本資料。屬於縱貫性研究，整體的程序如圖 3。

第二節 研究對象

本研究的最高目的是提供實徵研究結果給下一代課綱，期望建立一套適合國中階段的機率新課程。所以理論上應該對全臺所有學生實驗，然而如此規模的工作，不是本研究團隊的人力資源可及，因此僅能限縮研究對象至較小的範圍，如下述。因為八年級現在並沒有機率課程，所以必須在課綱所定的授課範圍以外，額外做機率教學的實驗。研究者在不影響正規課程學習的前提下，考量實驗的方便性等因素，採用便利抽樣的方法選擇實驗對象。

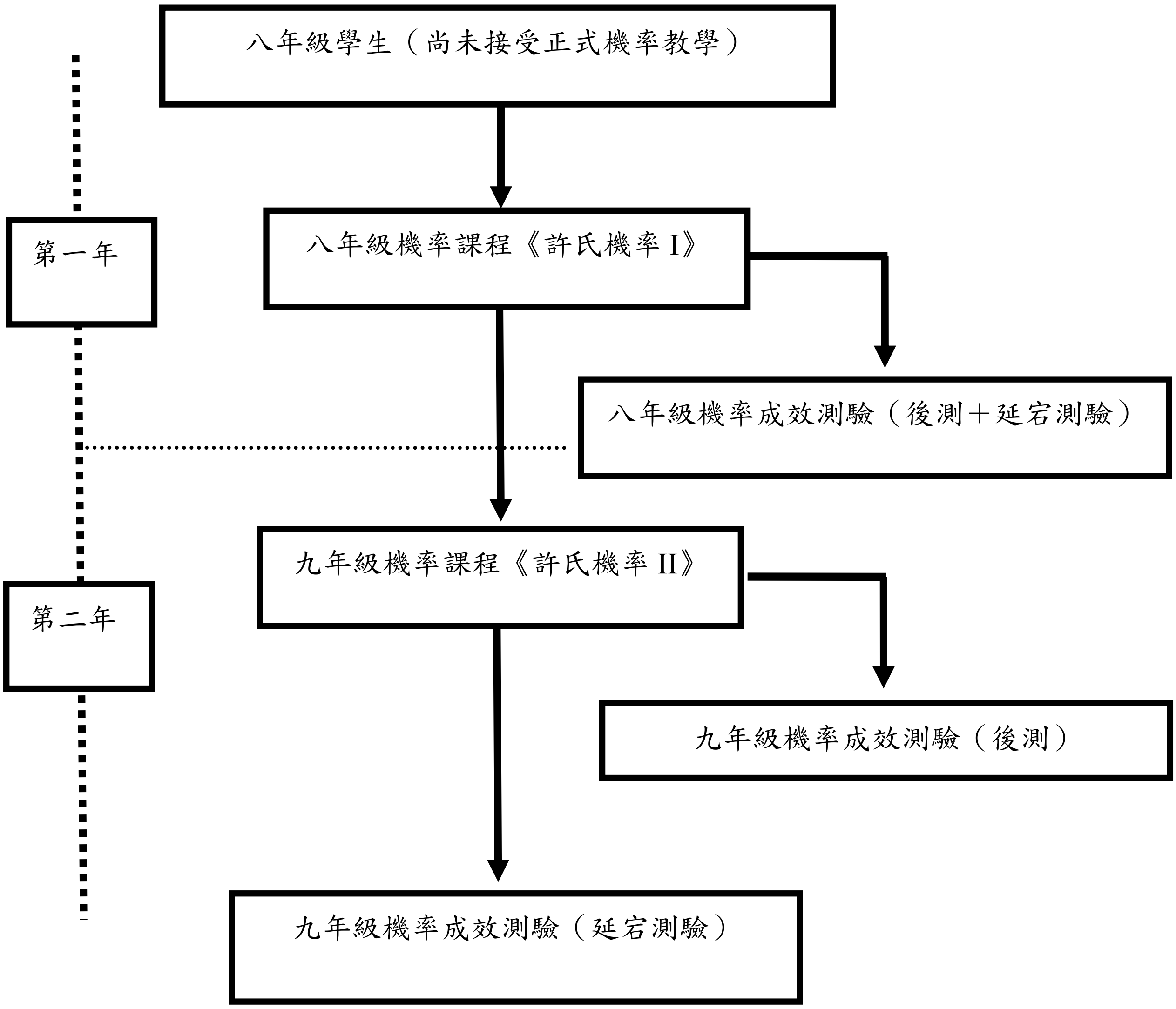


圖 3 八年級延伸至九年級之機率教學實驗與延宕測驗流程

以下說明參與本研究之田野學校，以及各校參與研究的學生。田野學校是臺灣北區一所郊區中型國民中學，標記為 G 校。G 校建校 10 餘年，全校共有 30 個班級，計 878 名學生。研究對象則選取 106 年入學之 4 個班級的學生；八年級時，A 班 31 人、B 班 29 人、C 班 30 人、D 班 30 人，扣除未參與機率教學人數，實際採計之人數為 A 班 28 人，B 班 27 人，C 班 29 人，D 班 27 人，合計 111 名學生。但可惜的是，在第二年學生進入九年級後，C 班科任教師因會考之由退出研究，故第二年僅剩 3 班。扣除未參與機率教學人數，實際採計之九年級人數為 A 班 28 人，B 班 27 人， D 班 27 人，合計 82 名學生。參閱表 9。

表 9
研究對象之說明

時程	八年級（106 學年）	九年級（107 學年）
G 校	A（28 人）、B（28 人）、C（28 人）、D（28 人）	A（28 人）、B（28 人）、D（28 人）

第三節 研究人員與研究時程

本研究以研究者作為主導者，帶領許芷雲同學共同進行設計《許氏機率 I》和《許氏機率 II》教材，並與指導教授進行專家會議。再者，研究者與許芷雲同學皆具備中等教師資格，非一般無教學經驗之研究生。為使教學實驗效果不受不同教學者之教法影響，故兩人一同入班進行授課八年級至九年級之教學實驗。

本研究時程落於 106 學年和 107 學年之內，從 2017 年 8 月起，至 2019 年 6 月，為期大約兩年。研究團隊於 2017 年 8 月著手前置工作，並於 2018 年 3 月起進入 G 校開始機率實驗課程，從這些學生的八年級下學期持續到九年級上學期，依序執行《許氏機率 I》和《許氏機率 II》教材的教學與後測，但延至會考之後才執行延宕測驗。

《許氏機率 I》的學習時數為 4 節課，另有暖身課程 1 節課、綜合活動 2 節課。於學習活動結束後 7-14 天進行後測，並在 6 個月後進行延宕測驗。《許氏機率 II》的學習時數為 2 節課，另有綜合活動 2 節課，於學習活動結束後 7-14 天進行後測，並在 6 個月後進行延宕測。完整的教學實驗包含機率教學時數 6 節課、暖身課程 1 節課、綜合活動 4 節課、機率成效測驗 5 節課，共計 16 節課。運用的時段包括數學課、輔導課、彈性課程、空白課程等。

特別說明，上述授課時數乍看之下相當短暫，但研究執行上，需排除學校活動、月考前後時段、國定假期等日程，故教學實驗並非每天、每週都可進行。然而，目前國中階段數學課程僅有一週 4 節，且本研究之機率教學目標皆非學校當期月考之內容，因為無助於學生準備考試，所以更難安排實驗活動的時間。本研究致力完成 16 節課，確實將耗時數月，而非幾週內可達成。

第四節 實驗課程之教材設計

數學領綱前導研究指出：一個好的課程架構，應該容易讓教科書編著者、教學者、評量者，都能了解課程設計的方向，使課程整體與實際執行之間能夠順利銜接。同理，研究者若要自行發展一套能兼顧理論與實踐之機率教材，絕對不能忽略上述要點。因此，研究者與團隊採用林福來等人提出之「知」、「行」、「識」架構來編製八、九年級之機率教材，取其編寫者之姓氏，命名為《許氏機率 I》、《許氏機率 II》，共兩冊。「知」、「行」、「識」架構不僅能檢視每一項學習內容、學習目標，更可協助教師在教學時檢視是否妥適安排教學活動（單維彰，2018a）。

另一設計理念為，《許氏機率 I》、《許氏機率 II》不僅是課堂之用書、題本，而是在課餘或無教學者時，學習者亦可自行閱讀、理解機率概念之讀本。編寫時著重與讀者進行對話、問答，而機率布題參照英、德、日等國之教科書特色，以其機率教學脈絡為基礎。在上述設計理念之下，《許氏機率 I》、《許氏機率 II》呈現出國際視野，也關注了跨領域的教材設計。

以下先說明何謂「知」、「行」、「識」以及作為機率實驗課程設計、驗證之舉例，而詳細課程內容則說明於後。

- 「知」就是知道，即學習內容、知識，在課程設計上，為「是什麼」的敘寫（單維彰，2018a）。對應至本研究的實驗教材為：機率有哪一些類型？機率的起源？什麼是獨立性？
- 「行」就是做，即操作技能，學習應該搭配著具體應用，且應符合學生生活經驗。在課程設計上，為「做什麼」的敘寫。「行」的另一個面向是為每一項學習內容（例如機率）提供典型的應用。對應至本研究的實驗教材為：能窮舉樣本空間與事件，能進行機率的運算，能繪製樹狀圖。而典型的應用則有如一顆公正六面骰子，點數為 1-6 點，在無外力影響下投擲兩次，出現兩次皆為偶數之機率為何？
- 「識」是對知識價值的認同。在課程設計上，為「為什麼」的敘寫，透過「為什麼」，在課程中協助學生對學習內容產生與生活文化連結的意義，進而體會數學的價值。對應至本研究的實驗教材為：首先，讓學生親自投擲骰子，或操作機運性質的遊戲，

體驗不確定性。其次，理解使用數字評估可能性的必要性。最後，能辨識古典機率模型的適用情境，能體認樹狀圖的工具性效率。

在課程的內容取捨方面，研究者根據第二章文獻所指出之實徵資訊，搭配國中階段學生之認知發展考量，選定八年級、九年級之機率課程內容。此課程內容將分為兩年段，實踐於《許氏機率 I》和《許氏機率 II》兩份教材，分別於八年級、九年級進行教學實驗。

（一）《許氏機率 I》

《許氏機率 I》的教學目標等同於 99 課綱和 108 課綱的九年級機率課程，主要的內容是單一事件的古典機率。但為因應研究者對於基礎機率素養教育的文獻探討，加入主觀機率、頻率機率、樹狀圖之繪製，還有在語言直觀範圍內的餘事件。各主題的內容概述如下。

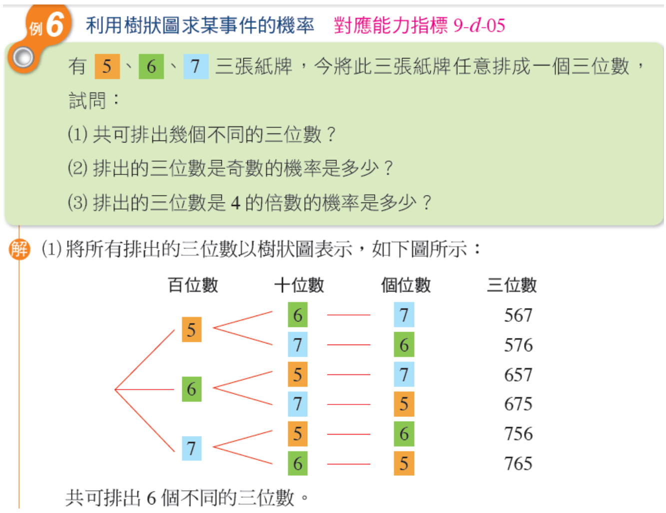
（1） 認識主觀機率、古典機率、頻率機率並執行運算

發展目標為學生能「**列舉**」樣本空間之能力，但不談及「集合論」或用使用「集合之數學符號」。目前課綱中之正式課程，小學皆是完全沒有的，而欲實驗之八年級學生為第一次聽聞「機率」一詞。因此，本研究將從機率論的歷史脈絡談起，並介紹現行的機率觀點，特別是**主觀機率（貝氏機率觀點）、頻率機率**。接著，導入古典機率之定義，以生活用語來介紹機率之專有名詞，減輕學生認知負荷。如樣本空間，以事件發生之所有可能之結果來做解說。

（2） 繪製樹狀圖

發展目標為學生能從文字敘述轉化繪製樹狀圖之能力。首先，說明什麼是樹狀圖，並舉例樹狀圖之各式樣貌。接著，讓學生去思考在什麼時候，會看到這樣的圖形，以及在哪些科目中也有使用。最後，引導學生理解樹狀圖在機率中，所能呈現之意義，並運用第一階段之「列舉」，建立屬於機率之樹狀圖。本階段著重讓學生親自動手做，達成建立樹狀圖。特別說明，我們將樹狀圖皆限定在三階層內，與 108

課綱說明不同（二階層）。雖然課本例題曾出現三階的結構，但若仔細觀察則可知道在二階時已被固定。並非真正帶有不確定的三階樹狀圖，類似圖 4 為典型的例子。


例6 利用樹狀圖求某事件的機率 對應能力指標 9-*d*-05

有 5、6、7 三張紙牌，今將此三張紙牌任意排成一個三位數，試問：

(1) 共可排出幾個不同的三位數？

(2) 排出的三位數是奇數的機率是多少？

(3) 排出的三位數是 4 的倍數的機率是多少？

解 (1) 將所有排出的三位數以樹狀圖表示，如下圖所示：

百位數	十位數	個位數	三位數
5	6	7	567
	7	6	576
6	5	7	657
	7	5	675
7	5	6	756
	6	5	765

共可排出 6 個不同的三位數。

圖 4 三階樹狀圖之範例（XXX 版）

（3） 餘事件

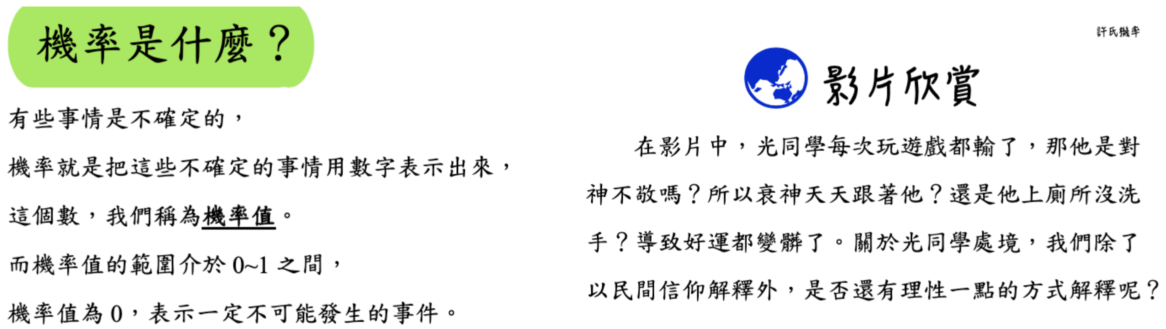
發展目標為學生能理解餘事件之反向思考，能用口語表達、並執行運算。引導學生思考餘事件與樹狀圖結構之關聯性。餘事件牽涉到反向思考，這也是國中階段的學生，較少機會學習的思維。以下說明：以二階樹狀圖為例，當我們知道其中一根樹枝所代表之意義與機率時，我們便可以用餘事件的定義，理解另外一根樹枝的機率應該為何。採用樹狀圖之結構教導餘事件，能讓學生利用「剩餘」的自然語意來思考，有系統性地解決問題。值得注意的是，本教材將同時讓學生發展對稱與不對稱之事件。

表 10 整理《許氏機率 I》在各機率概念與不確定性認知層次的教學目標，並舉出教材內所設計的範例。

表 10

《許氏機率 I》之課程設計說明

《許氏機率 I》		
機率概念	**不確定性認知層次**	**教學目標**
機率值	概念理解	什麼是機率，理解機率值、理解事件的不確定性
	程序執行	
	數學之解題思考	
	不確定性之解題思考	能以機率值檢核不確定之假設或推論合理性。
《許氏機率 I》範例		



機率是什麼？

有些事情是不確定的，

機率就是把這些不確定的事情用數字表示出來，

這個數，我們稱為**機率值**。

而機率值的範圍介於 0~1 之間，

機率值為 0，表示一定不可能發生的事件。

許氏機率

影片欣賞

在影片中，光同學每次玩遊戲都輸了，那他是對神不敬嗎？所以衰神天天跟著他？還是他上廁所沒洗手？導致好運都變髒了。關於光同學處境，我們除了以民間信仰解釋外，是否還有理性一點的方式解釋呢？

主觀機率	概念理解	理解主觀機率
	程序執行	進行事件機率之猜測
	數學之解題思考	無
	不確定性之解題思考	應用主觀機率到簡單的日常生活情境解決問題。能以其機率值檢核不確定之假設或推論事件合理性。
《許氏機率 I》範例		

許氏機率

機率 Q&A

請看以下敘述，你覺得是對還是錯呢？將你認為的答案用○或╳表示出來，並在 後方寫下你的看法。

(　　)2. 校門口前的大馬路上有很多狗，走路回家一定會踩到狗大便。

（續下頁）

古典機率	概念理解	理解古典機率
	程序執行	能運用策略與原理，窮舉所有狀況。
	數學之解題思考	將窮舉結果進行機率計算
	不確定性之解題思考	應用古典機率到簡單的日常生活情境解決問題。能以機率值檢核不確定之假設或推論事件合理性。

《許氏機率 I》範例

海盜叔叔

將劍放進木桶上的洞，若放到特定的一個洞，海盜叔叔就會彈起來。

如何計算一次就使海盜叔叔彈起來的機率呢？

總共有_______個洞。

一次就使海盜叔叔彈起來的機率為__________

當事件發生的結果不只一次時，機率值又該怎麼計算呢？

這是黑漾漾的一天，青雲在回家路上看到了最愛的觥頭寶寶扭蛋機，心想「尬意」的白色扭蛋。看一下機器裡面，發現只剩 8 顆扭蛋，包含 1 顆綠色、2 顆紅色、3 顆白色和 2 顆藍色的扭蛋。所以她思考後，決定把晚餐錢拿出來投資。

1. 請說明她這樣的決定有什麼根據。

2. 請討論她轉到各顏色的可能性。

轉到綠色扭蛋的機率值為_____；

轉到紅色扭蛋的機率值為_____；

轉到白色扭蛋的機率值為_____；

轉到藍色扭蛋的機率值為_____。

事件僅發生一次的機率值 p

$$p = \frac{1}{\text{所有可能發生結果的個數}}$$

計算機率值 p

$$p = \frac{\text{該事件發生的個數}}{\text{所有可能發生結果的個數}}$$

頻率機率	概念理解	理解頻率機率
	程序執行	能觀察、紀錄試驗之相對次數。
	數學之解題思考	將相對次數之結果進行機率計算
	不確定性之解題思考	應用頻率機率到簡單的日常生活情境解決問題。能以機率值檢核不確定之假設或推論事件合理性。

（續下頁）

《許氏機率 I》範例

如何操作頻率機率？

投擲瓶蓋

在書本 P.10 第 4 題和 P.29 中，我們知道投擲一個瓶蓋，會出現正面、反面、側面三種情況，這三種情況的機率相加為 1。

但我們知道以上三種情況發生的機會不均等，那麼有方法可以測量出正面、反面或側面三種情況個別發生的機率嗎？

讓我們來試試看吧！每人丟擲瓶蓋 20 次，將結果記錄在下方表格。

丟擲瓶蓋出現的情況	次數(以正字記號標示)	相對次數
正面		
反面		
側面		

誰來整理家務？

阿娟家以投擲一個 1~6 點的公正骰子，來決定誰要整理家務，只要出現 1 點，阿娟就要整理好家務。

若骰子每面出現的機會均等，每一面被擲出的機率都是 $\frac{1}{6}$。

如果擲骰子 30 次，1 點一定會出現 5 次嗎？阿娟一定要做 5 次家務嗎？

其實不一定，5 次是理想次數。事實上，阿娟有可能 1 次家務也不用做，但也有可能阿娟要做 30 次家務；只是這些極端情形發生的機率很小。

砸刮鬍泡

每個人站在器材前方，輪流敲打上方的按鈕，打到一定的次數時，機關會彈起來，那個人就會被砸到刮鬍泡。

當我們不知道器材的機關時，要如何測量出「機關啟動的機率」呢？

組別	跳起來次數	按壓總次數	相對次數
		20	
		20	
		20	
		20	
		20	
		20	
加總			

列舉	概念理解	理解列舉方法
	程序執行	以列舉練習所有可能發生之事件
	數學之解題思考	解決一般性機率問題
	不確定性之解題思考	能將列舉應用至日常生活、學科

《許氏機率 I》範例

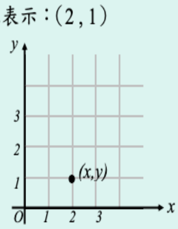
列舉怎麼做？

兩個人玩猜拳遊戲，出拳的情況為「剪刀、石頭」的情況有幾種呢？請用有序對列出所有可能結果。

答：(第一人的拳種，第二人的拳種) .. 喔喔！

有序對

平面上的點坐標，是兩個數的有序對，簡稱數對。
如黑點坐標應表示：(2,1)



51

許氏機率

現在就讓我們來擲筊吧！假設筊是公正的，看看擲到「聖筊」是不是容易的事呢？

一般會認為擲筊的結果只有 3 種情況，但事實上若將筊分為①號筊和②號筊，會有 4 種情況。【擲到聖筊時，(平面,凸面)和(凸面,平面)被視為 2 種情況】

想一想

可以想像同卵雙胞胎的例子，他們長得一樣，可是是不一樣的個體。

在列舉擲筊的可能時，還有一個常見的錯誤：若將「笑筊」和「陰筊」都歸類為不獲得神明認可的類型，另一種就是獲得神明認同的「聖筊」，誤以為總共只有兩種類型。

（續下頁）

樹狀圖	概念理解	理解樹狀圖之結構與名稱
	程序執行	繪製樹狀圖（含階層、機率值、結果）
	數學之解題思考	解決一般性機率問題
	不確定性之解題思考	能將樹狀圖應用至日常生活、學科
《許氏機率 I》範例		

許氏機率

什麼是樹狀圖？

我們學到，可以用有序對列舉出不確定事件的所有可能結果。但是當事件較為複雜時，有沒有更好的方法呢？以下我們將介紹一個較有系統性的作法-樹狀圖。

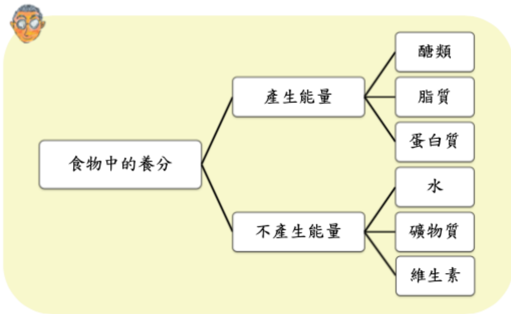
「樹狀圖」在機率中，具備處理事件樣本之功能，它能系統化的細分主題、區分階層、觀看整體，並能做邏輯性的列舉。

我們從精簡的樹狀結構和節點中，判斷兩個不同事件之組合情況。對於初學機率者來說，樹狀圖能有效地幫助我們，將事件做細緻的分析。

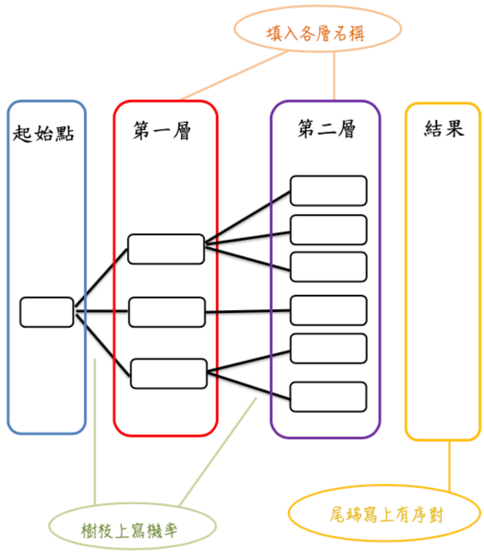
(引自許哲毓、單維彰、劉柏伸，2016)

許氏機率

我們來看看知識界如何使用樹狀圖吧！



˙讓我們來學習如何畫樹狀圖!



青雲和毓頭要猜拳來決定誰能吃到好吃的泡芙。請用樹狀圖畫出兩個人的猜拳情況，並在樹狀圖上寫機率。

在開始畫樹狀圖之前，讓我們先來想一想以下問題：

(1) 第一層與第二層的標題應該是「拳種（剪刀、石頭、布）」還是「人（青雲、毓頭）」呢？

(2) 兩人猜拳時皆不作弊，而且青雲、毓頭皆沒有「特定」的出拳策略或習慣，即兩人的出拳是隨機的。

(3) 兩人猜拳時皆不作弊，那兩人出的拳有沒有關係呢？

(4) 若兩人出拳互不影響，表示畫圖時，「青雲」與「毓頭」的順序可以互換。

因此，我們可以實際畫出樹狀圖：

（續下頁）

許氏機率

(5) 把每一拳的機率寫在樹枝上。

(6) 回想學過的「列舉」方法。然後，在樹狀圖最右側寫出「有序對」與其發生的機率。

提示：我們知道所有結果共有__________種，

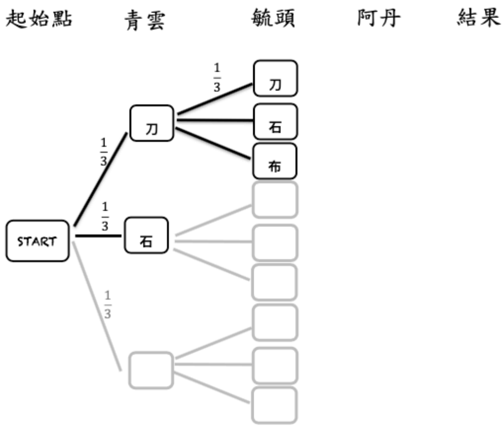
所以每一「有序對」的機率是________。

(7) 猜拳有贏、輸和平手。想想看，兩個人猜拳一次平手的機率是多少？

許氏機率

現在阿丹決定也加入猜拳吃泡芙的戰局。

請接續下面的樹狀圖畫出三個人的猜拳情況，並在樹狀圖上寫機率。



想想看，三個人猜拳時，一回合只有一人獲勝的機率是多少？

餘事件	概念理解	理解餘事件與其反向思考
	程序執行	能應用餘事件繪製樹狀圖
	數學之解題思考	運用樹狀表徵、乘法與加法原理等技術操作其運算
	不確定性之解題思考	應用餘事件到簡單的日常生活情境解決問題。能以機率值檢核不確定之假設或推論事件合理性。

《許氏機率 I》範例

若以 1 人玩家為例，你認為下列哪種情況，贏的機會比較大？為什麼？

剩下最後 5 個洞，只插入一把劍，

☞ 情況 1. 讓海盜叔叔彈出來即為勝者。

☞ 情況 2. 不讓海盜叔叔彈出來即為勝者。

我們知道「讓海盜叔叔彈出來」的機率為 $\frac{1}{5}$，「不讓海盜叔叔彈出來」的機率為 $\frac{4}{5}$，能看出後者的機率比較大，所以情況 2 的玩法，比較容易贏。

請試著想想看，除了「讓海盜叔叔彈出來」和「不讓海盜叔叔彈出來」，還有其他情況嗎？

那麼這兩種情況的機率相加是多少？

31

從「踩到狗屎」、「工地帽」和「海盜叔叔」這些例子，我們可看出同一試驗的所有情況之機率和都為 1。

在所有的不確定事件中，各種事件的所有可能情況之機率總和是否為 1？若不是 1，你是怎麼認為的呢？

請對照書本 P.11 第 4 題，想想看，擲瓶蓋擲到正面、反面或側面三種情況的機率相加應該為多少呢？

把猜寫的機率加總________

（二）《許氏機率 II》

《許氏機率 II》的教學目標是在假設現行九年級的機率課程被提前到八年級之後，設計適合九年級的機率學習內容。此教材的內容主要乃是根據國際教科書的比較而來，同時也根據文獻與考慮高中階段的適當發展。《許氏機率 II》的主要內容包括：互斥的和事件、獨立事件、相依事件、條件機率，所有內容都不涉及事件之交集。各主題的內容概述如下。

（1） 互斥的和事件、機率總和等於 1

發展目標為學生能在樹枝上寫機率，並理解將全部樹枝之機率相加等於一。首先，以對稱事件，教導學生如何運用樹狀圖來表達事件。此時，應讓學生能判斷出，每根樹枝所代表之事件機率皆相同。接續，學生熟悉後，讓嘗試建立不對稱事件之樹狀圖。最後，解說樹狀圖之分岔就是「或」的意思，而事件 A 或事件 B 發生的機率，就是將它們個別的機率相加。我國傳統的機率教材，皆以集合的聯集作為「或」的表徵，而一般的聯集都要扣除交集的部份，於是就要學習取捨原理（排容原理）。但是在樹狀圖上，所有的「或」都是互斥的，彼此沒有交集，這樣將會大量簡化和事件的教學；我們稱之為互斥和事件。但是並不需要對學生說這個專業術語。

（2） 獨立事件

發展目標為學生能理解獨立事件，並執行運算。藉由「獨立」一詞，引導學生對於事件之獨立意義做解釋。再嘗試以樹狀圖之結構，來思考獨立事件。利用圖像的概念，讓學生嘗試解出同一階層之事件機率。區別出機率加法與乘法之概念。值得注意的是，本研究所使用之例題，規劃數個小活動，以融入真實生活經驗領域為主軸，讓學生理解真實生活的應用，並讓學生動手做、畫出成品。

（3） 相依事件

發展目標為學生能理解相依事件，並執行運算。藉由相反詞「獨立」一詞，引導學生對於事件之相依意義做解釋。再嘗試以樹狀圖之結構，來思考相依事件。利用圖像的概念，讓學生嘗試當樣本改變時之機率。區別出每一樹枝的機率，並理解

不同層的機率關係。最後，將一起探討相依與獨立事件。本研究規劃數個題組，以融入生活經驗為主軸，讓學生理解相依與獨立的差異性。

（4） 條件機率

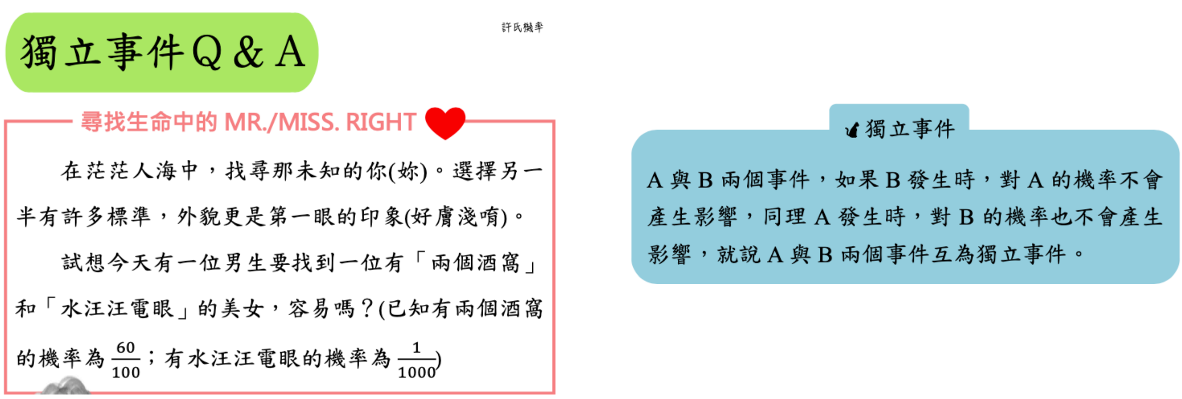
發展目標為學生能理解兩個以上事件之複雜化後，該如何處理與解決，但不涉及交集的情況。本研究運用題組融入生活經驗為主軸，讓學生依題組依序學習不同情境下之條件機率。首先是讀題、釐清事件的邏輯性，再嘗試以樹狀圖之結構，來辨識每一樹枝、節點所代表的事件。最後，綜合題組讓學生嘗試以問題情境，解決實驗課程中之機率問題。

表 11 整理《許氏機率 II》在各機率概念與不確定性認知層次的教學目標，並舉出教材內所設計的範例。

表 11

《許氏機率 II》之課程設計說明

《許氏機率 II》		
能力	認知層次	教學目標
獨立事件	概念理解	理解、判別獨立事件
	程序執行	能繪製正確獨立事件之樹狀圖
	數學之解題思考	運用樹狀表徵、乘法與加法原理等技術操作其運算
	不確定性之解題思考	應用獨立事件到簡單的日常生活情境解決問題。能以機率值檢核不確定之假設或推論事件合理性。
《許氏機率 II》之範例		


許氏機率

獨立事件Q & A

尋找生命中的 MR./MISS. RIGHT

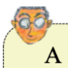
在茫茫人海中，找尋那未知的你(妳)。選擇另一半有許多標準，外貌更是第一眼的印象(好膚淺唷)。

試想今天有一位男生要找到一位有「兩個酒窩」和「水汪汪電眼」的美女，容易嗎？(已知有兩個酒窩的機率為 $\frac{60}{100}$；有水汪汪電眼的機率為 $\frac{1}{1000}$)

獨立事件

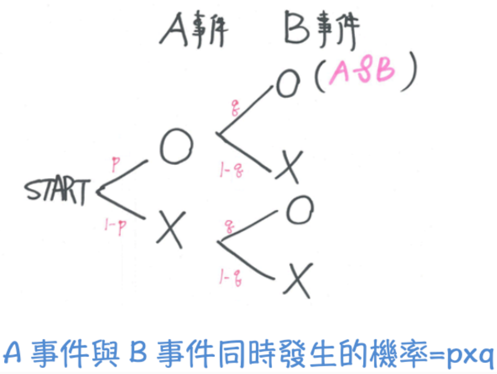
A 與 B 兩個事件，如果 B 發生時，對 A 的機率不會產生影響，同理 A 發生時，對 B 的機率也不會產生影響，就說 A 與 B 兩個事件互為獨立事件。

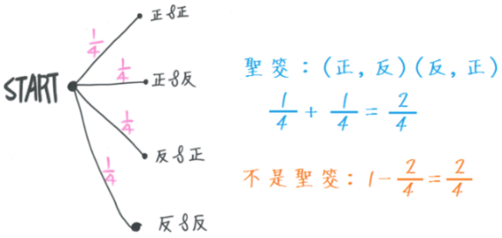
（續下頁）



A 與 B 兩個事件互為獨立事件，若 A 事件發生的機率為 p，B 事件發生的機率為 q，則 A 事件和 B 事件同時發生的機率為 $p \times q$。

如果 A 事件與 B 事件不會同時發生，若 A 事件發生的機率為 p，B 事件發生的機率為 q，則 A 事件或 B 事件發生的機率為 $p+q$。





相依事件	概念理解	理解、判別相依事件、體會貝氏機率
	程序執行	能正確繪製相依事件樹狀圖（相依樣本對照）
	數學之解題思考	運用樹狀表徵、乘法與加法原理等技術操作其運算
	不確定性之解題思考	應用相依事件到簡單的日常生活情境解決問題。 能以機率值檢核不確定之假設或推論事件合理性。

《許氏機率 II》之範例

你投籃前九次都沒中，但經過前九次的練習，第十次的命中率可能就會變高了。

假如試驗的結果會受彼此影響的，則都稱為相依事件。

5.____________

隨機抽籤，被抽出的籤不放回桶子內，第一次抽到 10 號，求第二次抽到 11 號的機率？

許氏機率

：根據統計，5%的男性及 0.3%的女性為色盲，中央大學的學生男女比率為 2 : 1。假設中央大學學生的色盲分布跟全體一樣，請問從中央大學的學生中隨機挑選一人，是色盲男的機率為多少？

（續下頁）

<table>
<tr><td rowspan="4">條件機率</td><td>概念理解</td><td>理解、判別條件機率</td></tr>
<tr><td>程序執行</td><td>繪製機率改變後之樹狀圖
（樣本空間改變）</td></tr>
<tr><td>數學之解題思考</td><td>運用樹狀表徵、乘法與加法原理等技術操作其運算</td></tr>
<tr><td>不確定性之解題思考</td><td>應用條件機率到簡單的日常生活情境解決問題。
能以機率值檢核不確定之假設或推論事件合理性。</td></tr>
<tr><td colspan="3">《許氏機率 II》之範例</td></tr>
<tr><td colspan="3">：玩一滾輪遊戲，內有 3 顆黑球，2 顆白球，滾出來的球不放回，一張摸彩卷可玩一次，抽到白球即為中獎。若媽媽有兩張摸彩卷，請問玩兩次遊戲都抽到獎品的機率為多少？
：南投仁愛國中合唱團由全校同學所組成，七年級、八年級和九年級成員比例各佔 40%、30% 和 30%；已知七、八和九年級的合唱團員當中，依序有 $\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$和 $\frac{3}{7}$亦為棒球隊員。現在合唱團要推選 108 學年的新團長，若每人當選的機會相等，求團長也是棒球隊員的機率為多少？</td></tr>
</table>

《許氏機率 I、II》提供豐富的實作活動，可激發學生之抽象化與程序化，成為精鍊有效的數學語言，再經由反思、論證、練習與解題，讓學生逐步穩定，以掌握其概念，作為進一步學習的基礎（教育部，2018）。為此，研究者將強調具體的生活實例，使學生體會機率概念的抽象性，激發學生對機率的理解，並以樹狀圖連貫機率思路，建立完整的機率脈絡。例如「丟擲瓶蓋」之活動。研究者參考日本教科書所編制丟擲瓶蓋（瓶蓋為不公正物體）的實作活動，它是一個「不公正」的事件。相較於我國教材中，所提之範例大多為「公正」事件，且未讓學生有機會體驗「不公正」情況，易僵化學生機率思維。

此外，上述之實作活動，一開始學生無法直觀地寫出各試驗發生的機率，故需要學生猜測認為擲瓶蓋擲出正、反、側三面的機率，為主觀機率。接續，利用餘事件算出瓶

蓋擲出非正面的機率，為古典機率，讓學生從餘事件的觀點去修正自己寫下的主觀機率值，此為古典機率連結主觀機率。最後，由實際操作的實驗結果觀察出每一情況發生情況的機率值不同，且事件的機率值會因試驗的次數越多次而趨近於一定值。上述乃透過大數法則的觀點，丟擲瓶蓋的活動與古典機率之「理想值」對應，此為連結頻率機率。

綜上所述，《許氏機率 I、II》確實在教材設計中，融入跨領域的知識作為學習動機，作為學生學習之前置經驗，例如遺傳學（生物）、降雨機率（地球科學）。這樣的內容設計，是以當代「素養導向」的教育思潮出發，跳脫傳統課本題型之框架，也打破傳統講授式教學模式（教師為課程主體，以精熟訓練為主要學生活動）。

《許氏機率 I、II》教材著眼於如何促使學習者更積極參與課室活動，以學習者為課程主動者，進行一系列的「做中學」。經由專家討論、活動試做等過程，歷經多次會議修改，耗時半年得以完成初版。不過研究者能將持續更新與調整，目標讓《許氏機率 I、II》能成為課程模組之參考。此外，《許氏機率 I、II》版面編排以豐富的圖文設計，搭配生活情境，培養學生自立閱讀的興趣與能力，期望減少學生在閱讀教材時，感到乏味導致學習願意的降低。此設計理念亦呼應十二年國教所提倡之「素養導向」教材設計原理。

第五節 實驗課程之教法設計

本研究使用之《許氏機率 I、II》不同於傳統教科書，教學現場以對答教學（概念、迷思澄清）、做中學（遊戲式）、分組學習、團隊競賽為主，且沒有回家作業、練習題。屬於非傳統課室學習模式，故教學者若僅用傳統講述式教學，則較難完整傳達出《許氏機率 I、II》之初衷。故本節將說明設計課室環境與教法詮釋之設計。

在課室環境設計上，因採分組學習、團隊競賽，故從第一堂課起學生座位安排上，即採分組座位，如圖 5 所示之關係。依臺灣之班級人數約 30 人而言，每組約 5 至 6 人為合適。此外，需注意組別間留有可讓教師行走的走道，以利教師在課程中對各組提問、學生搶答時，可穿梭各組間。以及教室需有投影設備，方可將上課內容投放至講臺上的投影幕。

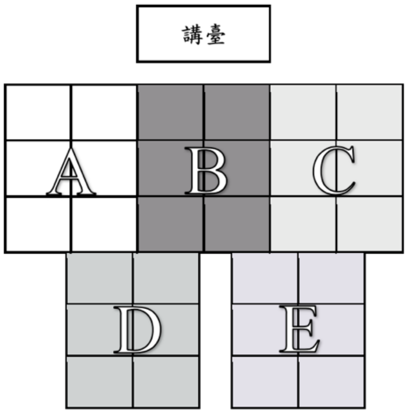


圖 5 許氏機率課程分組座位模式

在教法詮釋設計上，以學生為學習主體之教法。由於本課程沒有作業、亦不需要課前預習，故強調在課室現場的學習歷程。教法之主軸精神為刺激學生學習動機，並讓學生全神投入在活動中，如表 12。教師扮演活動主持人模式，藉由團隊競賽、時間限制模式，激發學生投入學習。將適時鼓勵學生參與活動、提供學生足夠資訊進行任務。同時，播報各組的進度，提升學生活動之緊張感，進而讓學生感受到完成任務、贏得競賽之成就感。另一則是蘇格拉底的「啟發教學法」，在靜態課堂時，藉由師生談話、討論、辯論來引導學生思考、澄清，並善用詰問，激發學生的思維，進而建立正確機率概念。

表 12

傳統課程與許氏機率課程之比較

	傳統課程	《許氏機率 I、II》
學習主體	教師	學生
教法	傳統講述式教學	啟發教學法、活動主持人模式（加強學生參與）
學生活動	較少	完整分組競賽、機率實作、口說練習
作業	習作、講義	無（僅於課堂練習《許氏機率 I、II》之例題）
學習模式	個人學習	合作學習（組長經過數學能力挑選，可指導隊員）

接下來，研究者任意舉出《許氏機率 I、II》課程之教法作為實例。如《許氏機率 I》對於機率概念澄清之作法，教師將藉由是非問答讓學生參與，師生討論如表 13。

表 13

《許氏機率 I》課程之教法說明

人員	**提問之教學過程**
教師、學生	師：那麼機率有沒有一個範圍呢？ 生：（同學們相互討論，有著不同的答案。） 師：（教師走到教室中央，拿出骰子）你們觀察這顆骰子，骰子上有 1~6 點，請問我丟出 7 點的機率是多少呢？ 生：0%。 師：（拿出一疊花色為紅心和方塊的撲克牌）若從中隨機抽取一張撲克牌，牌的花色是紅色的機率是多少呢？ 生：100%！ 師：很好，大家都答對了！但其實我們在表示機率值時不一定要用％，我們知道 0%等於 0，100%等於 1。所以我們知道機率值的範圍也會介於 0 到 1 之間。
	師：統一發票有「中獎」或「不中獎」兩種可能，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$。 生：（回答對和錯的學生各占半數） 師：中獎和不中獎的發票哪個多呢？ 生：不中獎的發票比較多。 師：我們可以知道不中獎的機率比較高，這樣中獎機率還會等於 $\frac{1}{2}$ 嗎？ 生：不會，而且會小於 $\frac{1}{2}$。

再舉一例，對於如何計算古典機率，以古典機率解釋機率值的範圍，主觀機率對應古典機率，餘事件。將以濕水挑戰帽、海盜桶活動讓學生從中理解，師生討論如表 14。

表 14

《許氏機率 I》活動課程之教法說明

<table>
<tr><th>活動</th><th>規則</th><th>教學過程</th></tr>
<tr><td>濕水
挑戰帽</td><td>各組發放一個濕水挑戰帽，讓學生將濕水挑戰帽戴在頭上。

每組進行快問快答，回答正確的組別，可使其他組別的帽子各被老師拔取一根水管；回答錯誤的組別，該組的帽子被老師拔取一根水管。

拔到對應的水管會使帽子漏水，帽子漏水的組別會被淘汰，淘汰至剩下最後一組，該組即獲勝。</td><td>教師以提問的方式引導學生思考如何計算古典機率值。

師：機率值的計算為$\frac{該事件發生的結果}{所有可能發生的結果}$。而我們知道總共有 8 根水管，那如何計算一次就拔到會使帽子漏水的水管之機率呢？

生：$\frac{1}{8}$。</td></tr>
<tr><td>海盜桶</td><td>各組輪流操作將劍放進木桶上的洞，若放到對應的洞，海盜叔叔就會彈起來。

組別使海盜叔叔彈起來時，即結束操作，該組即失敗。</td><td>師：那一次就放到會使海盜叔叔彈起來的洞之機率呢？

生：共有 24 支劍，機率為 1/24。</td></tr>
<tr><td>綜合
討論</td><td colspan="2">師：觀察課堂所進行的兩項活動，所有可能發生的結果都是數出來的，那麼我們就可以用這個算式，機率值= $\frac{該事件發生的結果}{所有可能發生的結果}$來計算古典機率值。

師：我們可以利用機率值的算式來思考，我們知道所有事件發生的機率值為 1。若機率值超過 1，表示「該事件發生的結果」多於「所有可能發生的結果」，但這是不可能的，所以機率值並不會超過 1。

對照書本 P.19 和 P.20，讓學生列出事件的所有可能情況，透過問答的方式讓學生思考所有情況之機率和為 1。

師：在書本 P.19，一次就被水淋濕的機率為多少？而你能順利脫身（不被水淋溼）的機率又是多少呢？

生：被水淋溼的機率是$\frac{1}{8}$，不被水淋溼的機率是 7/8。

師：還有其他情況嗎？

生：沒有。

師：所以我們可以知道這兩種情況的機率相加應該為多少呢？

生：1。

師：那我們在計算「順利脫身（不被水淋溼）的機率」時，是否會等於「1–被水淋溼的機率」呢？

生：會。</td></tr>
</table>

《許氏機率 II》因讓學習較高層次之機率概念，故教法需注意避免課程僵化、無趣。如判斷不對稱機率之樹狀圖如何繪製。將從計時接力畫圖讓每個學生思考真正圖形樣態，如表 15。

表 15

《許氏機率 II》活動課程之教法說明

<table>
<tr><th>活動</th><th>規則</th><th>教學過程</th></tr>
<tr><td>計時接力畫圖</td><td>回顧《許氏機率 I》所學習之生活例題。
每組同學都要上台畫圖，一人限制 30 秒。
完成後，教師進行每組樹狀圖的批改，並對同學解說。
勝利條件：最快完成正確樹狀圖之組別。</td><td>師：所有人先排好棒次。
師：開始。
所有學生：題目快點，老師。
師：注意唷，樹狀圖每一個細節都要畫上，缺少任何一種都算失敗。
師：30 秒到，換下一位。
生：快點，換人了。
生：這個畫錯要改掉。
師：不要忘記機率值也要填上
生：這個機率是多少？要每隻樹枝填嗎？
師：對，完整的樹狀圖
師：好，時間到。停筆，回到座位
師：現在開始看看每一組是不是有畫好。</td></tr>
<tr><td>綜合討論</td><td colspan="2">引導學生回答下列問題：
1. 如何分類？
2. 如何處理對稱機率之樹枝的繁雜性？畫出完整樹狀圖太耗時耗力
3. 從不對稱機率之樹枝建立簡化之樹狀圖
4. 從樹狀結構中，找尋總結果數的關係
說明總結果數之乘法原理，並引導學生從樹枝上之機率理解機率運算規則。
反向思考
（一）暖身題（如何繪製相依事件之樹狀圖）
分類
1. 如何分類？
2. 如何處理不對稱機率之樹枝？
3. 從不對稱機率之樹枝，理解每一層的關係與機率值=1
4. 從樹狀結構中，找尋總結果數的關係
說明總結果數之乘法原理，並引導學生從樹枝上之機率理解相依事件之機率運算規則。</td></tr>
</table>

綜上所述，從教學範例中可知，教學者之教法必須跳脫傳統講述式教學，以活動主持人方式進行教學。需時時向學生提問，引導學生在論辯中，釐清正確的機率概念，而非直接給予計算公式、答案。在活動當下，需要給予學生足夠時間進行各項活動但也須給予時間限制、搶答等刺激性感受，激發學生間之競賽心理，將有助學生確實藉由活動學習機率概念。故教學者可比擬為節目主持人，帶給學生每次課程的驚喜。

第六節 研究工具

（一）「不確定性」概念架構

本研究將修改許哲毓、單維彰（2018）所建立之數學「不確定性」教材與評量之分析規準，作為設計《許氏機率 I》、《許氏機率 II》、機率測驗卷之參考依據。這一套規準分為知識向度：主觀機率、古典機率、頻率機率、單一事件、餘事件、互斥和事件、獨立性、條件機率，與認知向度：概念理解、程序執行、數學思維的解題思考、不確定性思維的解題思考。各概念細項說明於表 16 和表 17。

表 16
「不確定性」知識向度各概念細項的定義

概念	定義
主觀機率	指一個事件發生的機率由某人決定，包括設計上的安排設定，或者根據相信的程度而評定。
古典機率	假設樣本空間 S 中的每一個樣本出現機會均等，則事件 A 發生的機率$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$，其中$n(*)$表示樣本個數。
頻率機率	用實驗設計所觀察的事件發生相對次數，當作事件發生的機率。
互斥和事件	涉及事件及其餘事件的機率，或者需考慮兩事件之交集或（互斥的）聯集。
餘事件	機率值=1-$P(A)$
獨立性	兩事件互不影響時，各自或皆同發生的機率。
條件機率	兩事件彼此影響時，已知其一的前提下，求其二發生的機率；或求二者先後發生的機率。

表 17

「不確定性」認知向度各概念細項的定義

認知向度	定義
概念理解	能以記憶性的知識來辨識、轉換機率或統計的概念或原理。
程序執行	能選擇適當的機率或統計定義、公式執行計算，能判讀圖表呈現的資訊，能製作指定的圖表，並能檢驗結果的正確性。
數學思維的解題思考	遭遇不確定的情境時，能組織機率或統計的知識，根據定義、定理或公式做「確定」的演算或推論，以解決問題。
不確定性思維的解題思考	遭遇不確定的情境時，能組織機率或統計的知識，必要時輔以計算，在「不確定」的前提之下做出合理的判斷或決策。

本研究由於不涉及交集之事件，故研究者將舉例說明規準中之較獨特細目，如表 18。這些舉例皆是建立互斥性之邏輯下，所發展之問題。提供國中階段的學生有學習進階機率概念的機會，以及培養邏輯思維的跨領域挑戰。

表 18

機率概念之細目

	例題
餘事件	今天有抽獎活動，分為頭獎、二獎與普獎，抽中頭獎的機率是 0.4，二獎與普獎的機率相等，試問抽中普獎之機率為何？
獨立性	一對夫妻，第一胎生男嬰，試問第二胎再生男嬰之機率為何？
條件機率	企鵝班有 45 人，國文考試及格率為 60%，其中有 14 人數學亦即格，試問在國文及格的人中，隨機抽出一位學生，數學及格者之機率為何？

以下，針對本規準之中較為獨特的細目，用 TIMSS 和 PISA 的試題舉例說明（許哲毓、單維彰，2018）。

例一：古典機率、不確定性思維的解題思考。取自「TIMSS 2011 八年級數學試題」，引述如下。

一部機器內有 100 顆糖果，當手桿轉一次時，機器就會掉出一顆果。此機器中藍色、粉紅色、黃色與綠色糖果的數量都相同，將它們混合在一起。美美轉一次手桿，得到粉紅色糖果。小智是下一個要轉手桿的人。請問，小智會得到粉紅色糖果的可能性為何？

A. 可以確定他得到的糖果是粉紅色。
B. 他得到的機會比美美的大。
C. 他得到的機會和美美一樣大。
D. 他得到的機會比美美小。（臺灣師範大學科學教育中心，2011）

許哲毓、單維彰（2018）指出這道題目可知全體之樣本數，故它屬於古典機率類型。在認知層次上，此題採用較大的數據（100 顆糖果），故判斷不是概念理解；題幹亦沒有明顯的演算提示，故判斷不是程序執行。因為待答選項刻意不使用數值，顯示提問的用意不在於古典機率的數學計算，所以歸類為不確定性思維的解題思考。

再舉一例，此題來自 108 年國中會考試題：

箱子內裝有 53 顆白球及 2 顆紅球，小芬打算從箱子內抽球，以每次抽出一球後將球再放回的方式抽 53 次球。若箱子內每顆球被抽到的機會相等，且前 52 次中抽到白球 51 次及紅球 1 次，則第 53 次抽球時，小芬抽到紅球的機率為何?

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{2}{53}$　D. $\frac{2}{55}$

這道題目可知全體之樣本數，故它屬於古典機率類型。在認知層次上，此題採用較大的實驗（53 次的抽取），且有前題假設（前 52 次中抽到白球 51 次及紅球 1 次），故判斷不是概念理解；題幹必須釐清從箱中取球的方式，故判斷不是程序執行。因為待答選項有誤導的答案，顯示提問的用意不在於古典機率的數學計算，而是必須理解「取後放回」、「取後不放回」，兩者之差異性，所以歸類為不確定性思維的解題思考。

（二）樹狀圖之繪製規準與逐步解析

本研究著重於學生繪製完整樹狀圖之歷程，搜集資料將會有圖像為主之文本。又因樹狀圖本身為視覺化表徵，用其樹狀結構，詮釋機率概念之模型。這樣的文本樣態是非文字描述，若欲對其分析，顯然不適合使用現有分析規準。故研究者擬建立一套樹狀圖之繪製標準與逐步解析。

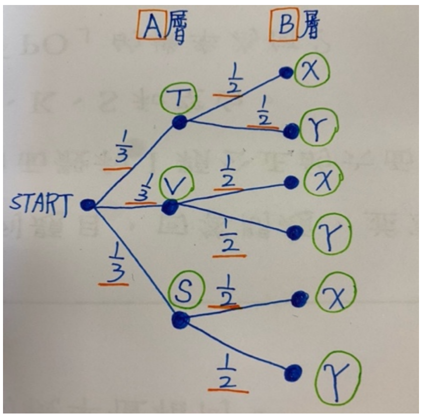
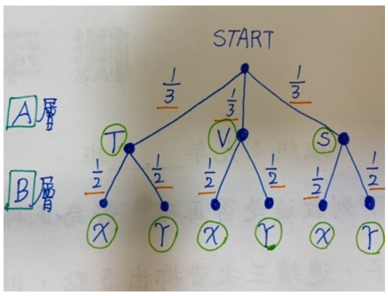
根據 Nguyen（2015）指出樹狀圖之結構組成為 1. 單根樹枝、節點，2. 在多個試驗中，每個試驗都有一個水平分枝，3. 每個試驗上的分支，表示該試驗的結果數，4. 路徑

末端的節點，表示路徑中每個可能的結果，且結果之間是相互排斥的（Scarrott, 2011），5. 每一路徑機率結果之採計為，從起始節點沿著樹狀結構之分枝機率。上述中，將事件發生之機率填入每條樹枝上最為關鍵，它使整個樹狀圖轉變為針對機率問題而建立，而非一般的事件分類圖（許哲毓、單維彰、劉柏伸，2016）。讓我們更能確立獨立性的概念，進而衍伸至條件機率。在解決問題時，可以用視覺化之表徵，理解乘法原理來處理其機率計算，以及加法原理處理互斥的聯集事件。

綜上所述，引導學生思考樹狀圖中每個階段隱含的資訊，從中建立正確樹狀圖是重要的。故研究者認為可統整樹狀圖之繪製標準與逐步解析，以利教學者與學習者理解並應用樹狀圖，其定義與說明如表 19。特別說明，逐步解析是使用樹狀圖之關鍵要點，除了「判斷起始點、分層」為必要之條件外，其餘方式「樹枝機率法」、「勾選法」、「同節點樹狀圖之加法原理」、「不同層樹狀圖路徑之乘法原理」等，可讓學生面對機率問題時，自由選擇何種方式來解題。若解題時，學生使用逐步解析之所有方式時，稱為「逐步解析之完整做法」，如表 20。

表 19

樹狀圖之繪製標準

	定義	圖示說明
1. 機率對稱型樹狀圖	1. 同節點之樹枝機率相等。 2. 直立型：起始點在正上方，圖形由上而下發展（同理亦有機率不對稱型）	 

（續下頁）

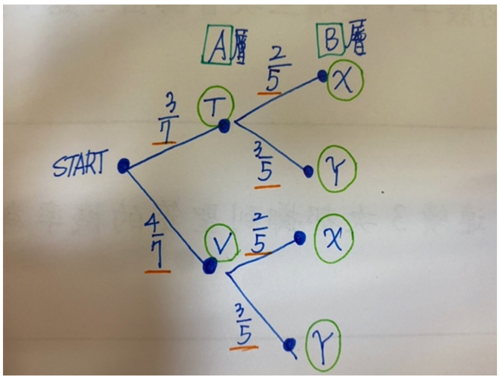
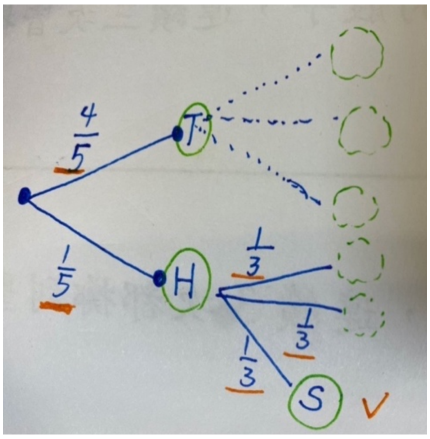
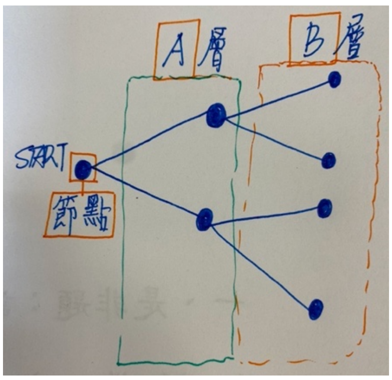
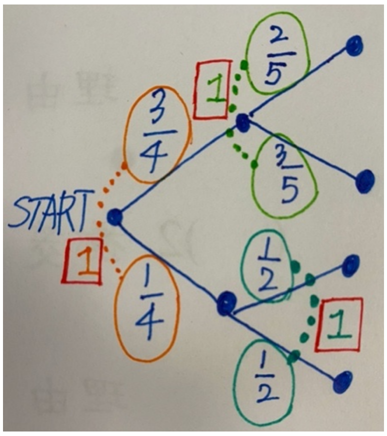
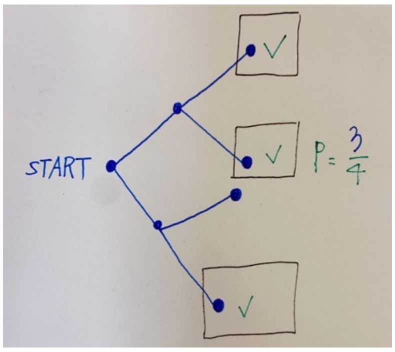
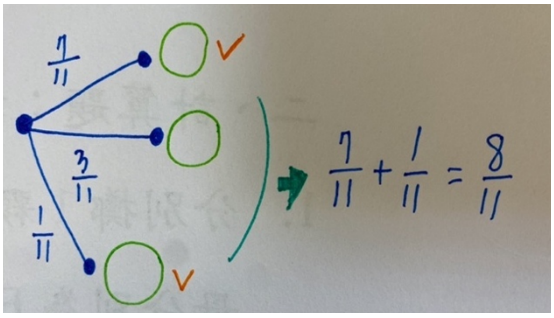
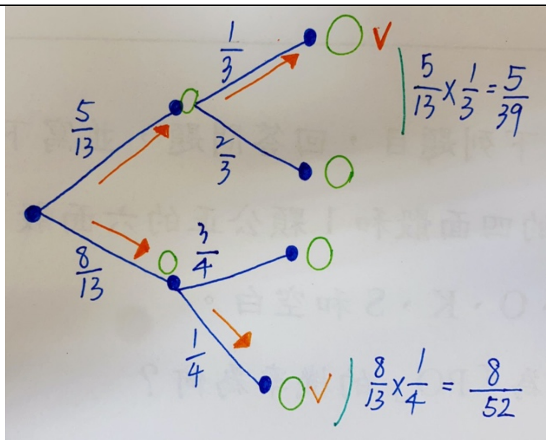
2. 機率不對稱型樹狀圖	同節點之樹枝機率不相等	
3. 抽象模擬型樹狀圖（含機率對稱型、不對稱型）	僅繪製問題之事件結果，其餘省略	

表 20
樹狀圖之逐步解析表

逐步解析	圖示	說明
判斷起始點、分層		依據事件、寫出分層之主題

（續下頁）

<table>
<tr>
<td>樹枝機率法，判斷各別樹枝上機率，檢驗同節點之樹枝機率和為 1</td>
<td>
</td>
<td>依據事件，在樹枝上填上機率，同節點之樹枝代表同一事件之所有結果，其機率和為 1</td>
</tr>
<tr>
<td>勾選法，僅用於機率對稱型樹狀圖</td>
<td>
</td>
<td>勾選並數出符合題目所求之結果，可得其機率值</td>
</tr>
<tr>
<td>同節點樹狀圖之加法原理</td>
<td>
</td>
<td>同節點之樹枝可作機率間之加減運算</td>
</tr>
<tr>
<td>不同層樹狀圖路徑之乘法原理</td>
<td>
</td>
<td>不同層之樹枝路徑機率，可作機率</td>
</tr>
</table>

（三）機率試卷

本研究將以複本測驗的方式進行資料的統計分析，分析學生經過完整的機率教學後，其解決機率問題的能力之提升。故依據「不確定性」教材與評量之分析規準，研究者與許芷雲同學共同編制八、九年級機率成效測驗。

八年級機率測驗試題依據共有 14 題，測驗時間為 45 分鐘，作為學生起始能力、機率思維進展、解決機率問題的能力和教學保留效果之判斷。在該班教師協助下完成測驗。機率測驗分為學前測驗、學後測驗及延宕測驗。試卷的分數制定為是非題每題 2 分，其中答案和理由各占 1 分；計算題每題 3 分，其中過程 2 分、答案 1 分；最後一大題想一想一題 1 分，共 42 分。試卷預試之α 值為 0.854，關於試卷分析，如表 21、表 22 所示。

表 21

八年級試題測驗之內容分析

認知向度 \ 知識向度	概念理解		程序執行		數學思維的解題思考		不確定性思維的解題思考		合計（比例）
	題號	配分	題號	配分	題號	配分	題號	配分	
主觀機率	A-1	2					C-1	1	3（7%）
古典機率	A-3 A-4 B-5-(1)	7	B-1 B-3	6	B-4 B-5-(2)	6	A-2	2	21（50%）
頻率機率			B-9-(1)	3			B-2	3	6（14%）
樹狀圖			B-6 B-7	6	B-8 B-9-(2)	6			12（29%）
合計	9（21%）		15（36%）		12（29%）		6（14%）		42（100%）

表 22

八年級試題分析

題型	題號		客觀的題目分析					決策
			答對率	高分組答對率	低分組答對率	難度	鑑別度	
是非題A	1		0.53	0.71	0.50	0.60	0.21	修改題目敘述
	2		0.50	0.82	0.18	0.50	0.65	保留
	3		0.57	0.71	0.38	0.54	0.32	保留
	4		0.66	0.88	0.26	0.57	0.62	保留
計算題B	1		0.47	0.88	0.00	0.44	0.88	增加表格填空
	2		0.57	0.94	0.12	0.53	0.82	保留
	3		0.34	0.71	0.00	0.35	0.71	修改題目敘述
	4		0.23	0.50	0.00	0.25	0.50	保留
	5	(1)	0.48	0.85	0.03	0.44	0.82	更改示例
		(2)	0.35	0.71	0.00	0.35	0.71	保留
	6		0.19	0.50	0.00	0.25	0.50	修改題目敘述
	7		0.15	0.47	0.00	0.24	0.47	保留
	8		0.02	0.06	0.00	0.03	0.06	增加提示
	9	(1)	0.52	0.94	0.03	0.49	0.91	保留
		(2)	0.10	0.26	0.00	0.13	0.26	修改題目敘述
想一想C	1		0.63	0.79	0.29	0.54	0.50	保留

以下針對表中試題決策表有異動的題目說明。

- A-1 原試題：

> 嘟嘟到桃園機場追星，前九次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第十次她應該好好念書，不用去追星。

根據預試結果，多數學生的理由會寫下「應該好好念書」是正確的，因此判定敘述是正確的。但因此題的預測概念為「時進效應」迷思（陳欣民、劉祥通，2002）。而此作答與機率並無相關，與學生的價值判斷較有關係，所以將好好念書等字刪除。

修正後試題：

> 嘟嘟到桃園機場追星，前九次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第十次她不用去追星。

- B-3 原試題：

> 負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有衛生紙的機率是多少？

根據預試結果，有少數學生無法判斷五月花為衛生紙，而造成答題錯誤，為避免在正式測驗時，有相同情況發生，故在題目中補述五月花衛生紙。

修改後試題：

> 負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有五月花衛生紙的機率是多少？

- B-6 原試題：

> 劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則江辰是第二個被家庭訪問的機率為多少？

根據預試結果，多數學生直接寫出答案為$\frac{1}{3}$，並無其他過程，研究者無法判斷學生是否經過計算後得知答案，或是根據題目有三位學生，直接猜測答案。討論後，調整題意所問，再加入一條件「小希是第一個被家庭訪問」，避免發生學生臆測之情況。

修正後試題：

> 劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則小希是第一個、江辰是第二個被家庭訪問的機率為多少？

- B-8 原試題：

> 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？

根據預試結果，學生在作答三人猜拳不分勝負的情況時，只會寫出三人出相同的拳種，未多加思考仍有三人皆出不一樣的結果之可能，故題目後方給予提示，提醒學生其他的可能性。而此題的難度和鑑別度皆不理想，但經過與指導教授討論後，因此題乃為此機率教學實驗之關鍵，在未學習樹狀圖之前，學生未能正確地將 9 種可能結果列出。期望經過機率教學後，學生能利用樹狀圖系統性地列出 9 種可能結果，故仍保留此題。

修正後試題：

> 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？
> 提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況喔！

- B-9 原試題：

> 福珠為了練舉重，考慮要不要吃蘇打餅乾，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，不論有沒有吃蘇打餅乾，選擇喝草莓牛奶的機率都是 $\frac{3}{7}$。
> (1) 福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
> (2) 福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

根據預試結果，原試題「不論有沒有吃蘇打餅乾，選擇喝草莓牛奶的機率都是 $\frac{3}{7}$。」，易使學生產生答題上的混淆，第(2)小題作答 $\frac{3}{7}$，故將題目重新敘述。而第(2)小題的難度和鑑別度皆不理想，但經過與指導教授討論後，因此題欲探究八年級學生是否能自行理解獨立性的概念，及經過機率教學後，樹狀圖的結構是否有助於理解獨立性概念，故仍保留此題。

修正後試題：

> 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{3}{7}$。
> (1) 福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
> (2) 福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

九年級機率測驗試題共有 7 題，測驗時間為 45 分鐘，參與預試者 99 人。試卷的分數制定為是非題每題 2 分，其中答案和理由各占 1 分；計算題每題 3 分，其中過程 2 分、答案 1 分。九年級測驗題目由研究團隊自編的題目。預試試卷其 α 值為 0.87，如表 23。題目類型涵蓋各種機率類型、樹狀圖及獨立事件與相依事件。關於試卷分析如表 24。

表 23

九年級機率測驗之內容分析

認知向度 / 知識向度	概念理解		程序執行		數學思維的解題思考		不確定性思維的解題思考		合計（比例）
	題號	配分	題號	配分	題號	配分	題號	配分	
餘事件							B-3-(2) B-4-(3)	3 3	6 （15%）
獨立性	A-1-(1) A-2-(1)	1 1	B-3-(1) B-4-(1) B-4-(2)	3 3 3			A-1-(2) A-2-(2)	1 1	13 （34%）
互斥和事件			B-2-(1)	3	B-1-(1)	3	B-1-(2)	3	9 （23%）
條件機率	A-3-(1)	1					A-3-(2) B-2-(2) B-3-(3) B-4-(4)	1 3 3 3	11 （28%）
合計	3 （8%）		12 （31%）		3 （8%）		21 （53%）		39 （100%）

表 24
九年級試題分析

題型	題號	題目分析					決策
		答對率	高分組答對率	低分組答對率	難度	鑑別度	
是非題A	1	0.83	0.97	0.64	0.80	0.33	現場解說
	2	0.68	0.88	0.48	0.68	0.39	保留
	3	0.76	0.94	0.45	0.70	0.48	保留
計算題B	1-1	0.66	0.94	0.24	0.59	0.70	保留
	1-2	0.60	0.94	0.15	0.55	0.79	保留
	2-1	0.55	0.94	0.03	0.48	0.91	保留
	2-2	0.13	0.36	0.00	0.18	0.36	現場解說
	3-1	0.48	0.94	0.06	0.50	0.88	保留
	3-2	0.12	0.33	0.00	0.17	0.33	現場解說
	3-3	0.32	0.79	0.03	0.41	0.76	保留
	4-1	0.52	0.82	0.06	0.44	0.76	保留
	4-2	0.46	0.75	0.03	0.39	0.72	現場解說
	4-3	0.20	0.61	0.00	0.30	0.61	現場解說
	4-4	0.22	0.67	0.00	0.33	0.67	現場解說

針對幾道呈現難度偏高，鑑別度低於 0.4 之問題，研究者發現在施測現場發現，學生普遍舉手發問，針對中文字詞的解釋，例如「至少」、「只有」、「恰有」以及答題上為思考周詳，導致得出錯誤答案。非題意表達之混淆或是對數學技術的困難。故與研究團隊討論後，上述題目皆保留，但施測時於現場給予口語化之解說。

（四）機率試卷評分規準

本研究需探討學生的作答文本，加上作答解釋為批改者之主觀看法，故制定一評分規準。針對八年級、九年級試卷的評分規準簡易說明：（1）為了將學生是非題的答案和作答解釋分開計算，所以是非題的計分為一題 2 分，但單題需滿分方算全對。（2）為了將學生計算題的答案和過程分開計算，且考量學生在計算過程可能有粗心或計算錯誤等失誤，所以計算題的計分為答案 1 分，理由 2 分，單題滿分為 3 分，需滿分方算全對（許芷雲，2019），如表 25 和表 26。

表 25

八年級機率測驗試卷評分規準表

題號	評分依據	給分規準	
		給分	規準
A-1	擁有主觀機率之概念，但不會認為前九次皆未遇到，而第十次也不會遇到（未有正時進效應迷思）。	1 分	不因前九次皆未遇到，而放棄第十次可能遇到的機會。
		1 分	認為有遇到的可能，但是有可能有其他因素，例如：要好好讀書、收集追星資料等。
		0 分	機率概念錯誤，認為若遇到的機率為 $\frac{1}{10}$，則前 9 次沒遇到，第 10 次一定會遇到。
		0 分	機率概念錯誤，認為只有遇到和不遇到兩種可能，所以遇到的機率為 $\frac{1}{2}$。
		0 分	言之無物。
A-2	判斷正確的樣本分群。	1 分	中獎發票數量少，中獎機率小於 $\frac{1}{2}$。
		1 分	根據生活經驗判斷，中獎機率未達 $\frac{1}{2}$。
		0 分	只有中獎與不中獎兩種可能，故中獎機率為 $\frac{1}{2}$。

（續下頁）

A-3	能瞭解機率值為一理想值。	1 分	20 次為理想次數，實際結果可能遠低於或遠高於 20 次，也有可能 1 次都沒有，也有可能 120 次皆丟出 6 點。
		1 分	些許因素（力道、角度、運氣等）造成不會剛好出現 20 次。
		0 分	認為其他面點數會較常出現，未有公正骰子之概念。
		0 分	每一面被擲出的機會均等，故答案為 120÷6＝20（次）。
A-4	機率值範圍介於 0~1 之間，且不可能發生的事件其機率值為 0。	1 分	機率值介於 0~1 之間。
		1 分	骰子沒有 7 點。
		0 分	擲出的機率為 $\frac{1}{7}$。
B-1	利用機率值公式 $\frac{n(\text{該事件發生的結果})}{n(\text{所有可能發生的結果})}$，判斷出正確答案為 $\frac{3}{4}$。	2 分	完成表格，從表格知所有可能發生的結果有 4 種，發生耳垂分離的情況有 3 種，答案為 $\frac{3}{4}$。
		2 分	利用餘事件解題，發生耳垂分離的機率值=1－發生耳垂緊貼的機率值，答案為$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。
		1 分	未具生物顯、隱性基因之概念，根據題意判斷耳垂分離基因型只有 Aa 一種，將答案寫作 $\frac{2}{4}$，仍具有機率值之概念。
		1 分	將兩種 Aa 視為重覆情況，故所有可能發生的結果為 3 種，具簡單的機率值概念，但有樣本空間錯誤之迷思。
		0 分	未能正確作答。
B-2	知道頻率機率如何操作與應用。	2 分	正確計算出答案，四捨五入，寫出答案為 62 或 63 個。
		2 分	計算出答案為 62.5 個。

（續下頁）

		2 分	過程中將數字捨五入，造成算出結果與答案有些許誤差。 例：2500÷200=12.5≒13 13×5=65（個）
		2 分	正確列出算式，但過程計算錯誤（答案 0 分）。
		0 分	未能正確作答。
B-3	機率值相加。	2 分	將機率值相加。
		2 分	將機率值相加但計算錯誤（答案 0 分）。
		2 分	看錯題意，將錯誤的機率值相加，但仍具有機率值相加之概念。
		0 分	機率概念錯誤，作答 $\frac{3}{5}$。
		0 分	機率概念錯誤，將機率值相乘。
B-4	列舉出所有可能發生的結果，並會計算其機率值。	2 分	列舉出所有結果或列出部分結果即可有邏輯算出所有結果數，再計算出機率值。
		2 分	正確畫出樹狀圖。
		2 分	未能清楚理解題意，但仍具列舉能力，列出所有偶數情況（答案 0 分）。
		2 分	扣除 A、B 兩骰為相同點數的情況，但仍具列舉之能力。
		0 分	未能正確作答。
B-5-(1)	列舉出所有可能發生的結果。	2 分	利用列舉或樹狀圖，寫出所有的可能結果。
		2 分	僅寫出可能的結果有 6 種，但未列舉出 6 種可能（答案 0 分）。
		2 分	列舉錯誤，列出超過或少於 6 種答案（答案 0 分）。
		0 分	未能正確作答。
B-5-(2)	利用機率值公式 $\frac{n(\text{該事件發生的結果})}{n(\text{所有可能發生的結果})}$ ，判斷出正確答案為 $\frac{1}{10}$。	2 分	根據上題答案，且能算出所有可能結果為 60 種，答案為 $\frac{1}{10}$（$\frac{6}{60}$亦可）。
		2 分	所有可能結果計算錯誤或上題答案錯誤造成錯誤，但知道如何利用公式求出答案（答案 0 分）。 （續下頁）

		0 分	未能正確作答。
B-6	利用樹狀圖有系統性地列出所有的 6 種可能結果，算出機率值為$\frac{1}{3}$。	2 分	利用樹狀圖或列舉，寫出正確答案。
		2 分	共有 3 人，任選一人為第二個被家庭訪問，機率為$\frac{1}{3}$。
		1 分	未能清楚理解題意「各做一次家庭訪問」，畫出樹狀圖為第一位被家庭訪問後，同一個人仍有可能被第二次家庭訪問。
		0 分	未能正確作答。
B-7	1. 利用樹狀圖有系統性地列出所有的 6 種可能結果，算出機率值為$\frac{1}{6}$。 2. 利用獨立性概念，做出答案為 $\frac{1}{6}$。 3. 利用乘法原理算出所有可能結果共有 6 種，進而判斷答案為$\frac{1}{6}$。	2 分	利用樹狀圖、列舉，寫出正確答案。
		2 分	早餐吃到肉的機率為$\frac{1}{2}$，午餐吃到肉的機率為$\frac{1}{3}$，利用獨立性概念作答 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$。
		2 分	乘法原理算出所有可能結果為 2×3 種，而兩餐皆吃肉的可能結果為其中 1 種，答案為$\frac{1}{6}$。
		1 分	畫出樹狀圖，早餐未吃到的，仍有可能在午餐被吃到。
		0 分	機率概念錯誤，作答 $\frac{2}{5}$。
		0 分	早餐有吃到肉的機率為$\frac{1}{2}$，午餐有吃到肉的機率為$\frac{1}{2}$，（$\frac{1}{2}$為有吃到或沒吃到），所以答案為$\frac{1}{4}$。
B-8	利用樹狀圖有系統性地列出所有的 27 種可能結果，並從樹狀圖中判斷出 9 種不分勝負的情況，算出機率值為$\frac{1}{3}$。	2 分	利用樹狀圖、列舉，寫出正確答案。
		1 分	僅考慮三人出相同拳法為平手狀況，未考慮三人出不同拳法的平手情況。
		0 分	三人猜拳，故臆測答案為$\frac{1}{3}$（答案 1 分）。

（續下頁）

		0 分	未能正確作答。
B-9-(1)	利用餘事件概念解題，計算出答案為 $\frac{1}{3}$。	2 分	從樹狀圖結構中，計算出答案為 $\frac{1}{3}$。
		2 分	餘事件解題，未吃餅乾的機率值=1－（選擇吃餅乾的機率值），答案為計算出答案為$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$。。
		0 分	未能正確作答。
B-9-(2)	利用獨立性概念解題，將機率值相乘，算出答案為 $\frac{1}{7}$。	2 分	將機率值相乘，答案為$\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$。
		0 分	將機率值相加。
		0 分	吃且喝、吃但不喝、不吃但喝、不吃且不喝 4 種可能結果，故答案為將機率值相乘，答案為 $\frac{1}{4}$。
C-1	擁有主觀機率概念，並明白機率值範圍為 0 至 1 之間。	1 分	能依照主觀價值判斷寫出機率值。
		0 分	未能正確作答。

表 26

九年級機率測驗試卷評分規準表

題號	評分依據	給分規準	
		給分	規準
A-1	判斷獨立事件。	1 分	等於$\frac{1}{6}$。
		0 分	大於$\frac{1}{6}$。
		0 分	言之無物。
A-2	判斷獨立事件與其運算。	1 分	乘法原理計算。
		0 分	使用加法原理計算。
		0 分	應是 $\frac{1}{2}$。
A-3	能瞭解取後不放回之概念。	1 分	$\frac{1}{40}$、$\frac{1}{39}$

（續下頁）

		0 分	機率一樣。
B-1-1	利用列舉、樹狀圖、乘法原理，計算出正確答案為 $\frac{1}{4}$。	2 分	運用列舉、樹狀圖或乘法原理正確求出答案。
		1 分	遺漏六面骰子之空白面，導致每面機率為$\frac{1}{5}$。
		0 分	未能正確作答。
B-1-2	利用列舉、樹狀圖、乘法原理，計算出正確答案為 $\frac{1}{6}$。	2 分	運用列舉、樹狀圖或乘法原理正確求出答案。
		1 分	遺漏六面骰子之空白面，導致每面機率為$\frac{1}{5}$。
		0 分	未能正確作答。
B-2-1	利用列舉、樹狀圖、乘法原理，判別不對稱事件之機率，計算出正確答案為 $\frac{1}{64}$。	2 分	運用列舉、樹狀圖或乘法原理正確求出答案。
		0 分	僅利用餘事件計算一次失敗的機率。
		0 分	未能正確作答。
B-2-2	利用列舉、樹狀圖、乘法原理，判別不對稱事件之機率，計算出正確答案為 $\frac{9}{64}$。	2 分	運用列舉、樹狀圖或乘法原理正確求出答案。
		1 分	僅考慮一次成功之機率，未考量其組合。
		1 分	成功繪製樹狀圖、但卻以對稱事件作答。
		0 分	未能正確作答。
B-3-1	利用樹狀圖、乘法原理，判別不對稱事件之機率，計算出正確答案為 $\frac{1}{1000}$。	2 分	運用樹狀圖或乘法原理正確求出答案。
		1 分	成功繪製樹狀圖、但不會計算。
		0 分	未能正確作答。
B-3-2	利用樹狀圖、乘法原理，判別不對稱事件之機率，或使	2 分	運用樹狀圖或乘法原理或使用餘事件正確求出答案。
		1 分	成功繪製樹狀圖、但遺漏女生的情況。

（續下頁）

	用餘事件計算出正確答案為 $\frac{29}{30}$。	0 分	未能正確作答。
B-3-3	利用樹狀圖、乘法原理，判別不對稱事件之機率，計算出正確答案為 $\frac{103}{3000}$。	2 分	運用樹狀圖或乘法原理正確求出答案。。
		1 分	成功繪製樹狀圖、但計算錯誤。
		0 分	未能正確作答。
B-4-1	利用樹狀圖、乘法原理，判別不對稱事件之機率，計算出正確答案為 $\frac{15}{42}$。	2 分	運用樹狀圖或乘法原理正確求出答案。
		1 分	成功繪製樹狀圖、但不會計算。
		0 分	未能正確作答。
B-4-2	利用樹狀圖、乘法原理，判別不對稱事件之機率，利用餘事件計算出正確答案為 $\frac{4}{42}$。	2 分	運用樹狀圖或乘法原理正確求出答案。
		1 分	成功繪製樹狀圖、但不會計算。
		0 分	未能正確作答。
B-4-3	利用樹狀圖、乘法原理，判別不對稱事件之機率，利用餘事件計算出正確答案為 $\frac{38}{42}$。	2 分	運用樹狀圖或乘法原理正確求出答案。
		2 分	成功繪製樹狀圖、但不會判斷「至少」之數學意義。
		0 分	未能正確作答。
B-4-4	利用樹狀圖、乘法原理，判別不對稱事件之機率，利用餘事件計算出正確答案為 $\frac{23}{42}$。	2 分	運用樹狀圖或乘法原理正確求出答案。
		0 分	成功繪製樹狀圖、但不會判斷「恰有」之數學意義。
		0 分	未能正確作答。

第七節 資料收集與編碼

本研究之資料分為兩年收集，綜合整理於表 27。第一組資料，來自八年級機率實驗課程之實驗組「八年級學前測、學後、延宕驗試卷」，實施時間為八年級機率實驗課程開始前一週（2018 年 4 月）和結束後一週（2018 年 6 月），實際採計人數為 A 班 28 人，B 班 27 人，C 班 29 人，D 班 27 人，共回收 111 份試卷。而延宕測驗對應學後測驗以檢視教學保留效果，其實施時間為機率實驗課程結束約六個月後（2018 年 11 月），實際採計人數為 A 班 27 人，B 班 23 人，C 班 29 人，D 班 26 人，共回收 105 份試卷。

第二組資料為「九年級學後、延宕測驗試卷」。實施時間為九年級機率實驗課程結束後一週（2018 年 12 月），實際採計人數為 A 班 28 人，B 班 27 人，D 班 27 人，共回收 82 份試卷。延宕測驗實施時間為機率實驗課程結束約六個月後（2019 年 6 月），實際採計人數為 A 班 27 人，B 班 23 人，D 班 26 人，共回收 76 份試卷。

表 27

八、九年級機率試卷收集與編碼

八年級機率課程	研究對象
學前測驗試卷 G8-P1	2018 年 4 月初
學後驗測驗試卷 G8-P2	2018 年 6 月中
延宕測驗試卷 G8-P3	2018 年 11 月初
九年級機率課程	研究對象
學後測驗試卷 G9-P2	2018 年 12 月底
延宕測驗試卷 G9-P3	2019 年 6 月中

以下說明表 27 之中的資料編碼。研究者將機率測驗試卷的試題分為五碼。

第一碼：Gx 為年級，例如：G8 為八年級、G9 為九年級。

第二碼：Px 為機率測驗時間點，例如：P1 為學前、P2 為學後、P3 為延宕。

第三碼：八年級：A 表示第一大題是非題，B 表示第二大題計算題，C 表示第三大題想一想。九年級：A 表示第一大題是非題，B 表示第二大題計算題。

第四碼：數字用以表示題號。

第五碼：(1)、(2)分別表示題目之小題；若無小題，則省略。

根據以上編碼規則，舉例而言 G8-P1-A-3 表示八年級學前測驗的是非第 3 題，G9 -P3-B-2-(2)表示九年級學後測驗的計算第 2 題之第 2 小題。

第八節 資料分析

本研究目的為探究研究對象經歷兩年機率課程學習後之成長，故收集其機率成效測驗之資料，分為八年級學前測驗試卷、學後測驗試卷與延宕測驗試卷，以及九年級學後測驗試卷與延宕測驗試卷，共計五份。研究者將著手以時間點做為學習段落間的檢驗，藉以討論經過八年級、九年級機率實驗課程教學後，學生的機率思維有何進展。最後，再檢視經過兩年完整的機率教學後之保留成效。茲說明相關內容如下。

第一年，針對八年級在機率課程在學前、學後、延宕之樹狀圖使用分析。期望在八年級機率成效測驗試卷中，探究是否能建立完整樹狀圖、如何使用樹狀圖進行解題。針對上述之分析，將以學後、延宕測驗分數進行討論，依此方法了解不同學習成效學生之表現，亦可供研究者針對不同學習模式之學生，提出《許氏機率 I》之修改、反思方向。故在量化分析方面，以 JASP 進行描述性統計，呈現整體的表現與趨勢。在質性分析方面，以樹狀圖之繪製標準與逐步解析，討論八年級學生之樹狀圖使用，從中理解學生如何使用樹狀圖。

第二年，在理解八年之學習成效後，研究者將進行九年級的學習成果進行綜合討論。、期望在九年級學後測驗試卷與延宕測驗試卷中，探究以樹狀圖學習獨立事件、相依事件與條件機率之成果、還有是否在學習這些較高層次機率概念中產生迷思。同樣的，針對上述之分析，將以測驗分數前、後 27%分為高、中、低分三組進行討論，依此方法了解不同學習成效學生之表現，亦可供研究者針對不同學習模式之學生，提出《許氏機率 II》之修改、反思方向。故在量化分析方面，以 JASP 進行描述性統計，呈現整體的表現與趨勢。並採用林原宏所發展之多元計分「概念詮釋結構」探究高、中、低分三組間之機率概念間之差異。在質性分析方面，以樹狀圖之繪製標準與逐步解析，討論高、中、低分三組之樹狀圖在獨立事件、相依事件與條件機率之使用，並辨識出機率迷思與樹狀圖之錯誤類型。以理解如何改善研究對象學習《許氏機率 I、II》之成果。

第四章 結果分析

本章的主題之一為分析學生在經過兩年機率教學後，在九年級所表現的機率思維與教學的保留效果；此外，也探討學生在本課程學習機率時產生的迷思，並辨識繪製樹狀圖時產生的錯誤類型。第一節透過八年級機率延宕測驗，分析九年級學生在樹狀圖上之學前初始狀態。第二節透過九年級機率測驗之分析，釐清學生答題的整體趨勢。第三節透過九年級機率測驗之分析，釐清學生答題之特徵與迷思。第四節透過多元計分概念詮釋結構，呈現九年級機率測驗之概念構圖，分析學生機率概念建立的層次關係。第五節統整討論兩年機率實驗課程，並探究學生機率學習。

第一節 九年級學前初始狀態分析

經過八年級教學後，研究者於八年級學後一週後進行八年級機率後測。並在測驗後約五、六個月，對學生進行八年級機率延宕測驗。在兩份測驗之間並未進行任何複習、作業等操作，而八年級課程本來就沒有機率，所以在此期間學生應該沒有習得任何機率內容。本文主要關注的是：驗證學生是否能正確繪製樹狀圖、解決問題，以及探討可能存在之機率迷思。其餘八年級之機率學習成效的探討，詳見於許芷雲（2019）的碩士論文。

八年級機率後測與八年級延宕測驗之平均數、標準差與平均答對率，如表 28。結果可知八年級機率後測平均答對率超過五成，顯示每道題目都有超過一半的同學是有能力解決。而在八年級延宕測驗之平均答對率超過六成，平均分數約高 0.5 分且標準差些微下降。不過，八年級機率測驗之成對樣本 T 檢定統計結果 p 值大於 0.05 不顯著；再者，研究者檢驗 Cohen（1988）提出之實驗效果量（effect size），結果 Cohen’s d 值小於 0.2，表示實際顯著性為低。亦即學後與延宕測驗之平均數在統計檢定上沒有差異。表示八年級學生在學習機率課程的六個月後，其機率成就測驗沒有差異。研究者因此認為學生能內化八年級的機率學習內容。

再者，以樹狀圖工具為設計之計算題進行分析，有第 2 題、第 5 題、第 7 題、第 8 題、第 9 題。這五題亦可用列舉、樹狀圖搭配或單純使用乘法原理進行解題。研究者統計所有研究對象之樹狀圖使用情況，宜可分為兩層面，第一層判定為使用樹狀圖與否，

故有 2 類：1. 使用樹狀圖，2. 未使用樹狀圖；第二層判定使用樹狀圖之正確性與未繪圖單純使用乘法原理，亦有 2 類：1. 錯誤繪製樹狀圖，2. 僅使用乘法原理、未繪製圖形，如圖 6。

表 28

八年級延宕測驗對教學後測驗之比較

	樣本數	平均分數	分數範圍	標準差	平均答對率	*p* 值
學後測驗	111	26.49	1-42	10.84	0.57	0.72
延宕測驗	105	26.93	1-42	10.01	0.61	

八年級學後測驗中 5 大題之作答總人次為 555 次，各題之各類作答情況次數詳見表 29。研究者發現使用樹狀圖解題者共計 303 次，佔 55%；未使用樹狀圖解題者共計 252 次，佔 45%。在使用樹狀圖的作答中，正確者共計 298 次，佔 98%，錯誤者共計 5 次，佔 2%。此外，未使用樹狀圖中，單純以乘法原理解題者共計 19 次，佔 8%，其餘未作答者共計 233 次，佔 92%。

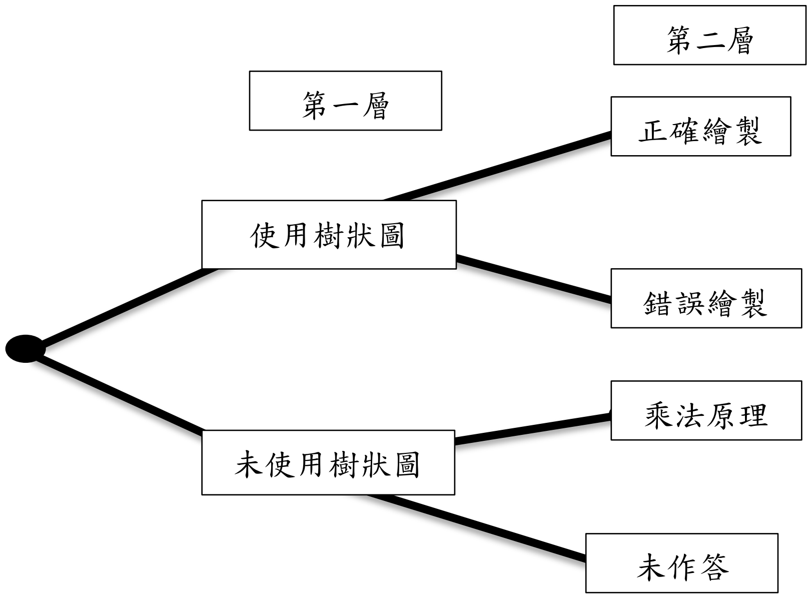


圖 6 樹狀圖之使用情況

相對地，八年級延宕測驗中四大題組之作答總人次為 525 次，各題次數詳見表 29。研究者發現使用樹狀圖解題者共計 190 次，佔 36%；未使用樹狀圖者共計 335 次，佔 64%。在使用樹狀圖的作答中，正確者共計 159 次，佔 84%，錯誤者共計 31 次，佔 16%。此外，未使用樹狀圖中，單純以乘法原理解題者共計 24 次，佔 7%，其餘未作答者共計 311 次，佔 93%。

表 29

八年級使用樹狀圖之次數統計

	題號	2		5		7		8		9	
	測驗	學後	延宕	學後	延宕	學後	延宕	學後	延宕	學後	延宕
	人數	111	105	111	105	111	105	111	105	111	105
第一層	使用樹狀圖	64 58%	36 34%	68 61%	36 35%	21 19%	15 14%	71 64%	49 47%	79 71%	54 51%
	正確繪製	63	31	68	36	21	15	69	41	77	36
	錯誤繪製	1	5	0	0	0	0	2	8	2	18
第二層	未使用樹狀圖	47 42%	69 66%	43 39%	69 65%	90 81%	90 86%	40 36%	56 53%	32 29%	51 49%
	乘法原理	0	0	0	2	13	14	5	6	1	2
	未作答	47	69	43	69	77	76	35	50	31	49

整體而言，樹狀圖使用之比例在延宕測驗中比例減少，無繪製樹狀圖解題之比例增加，錯誤繪製樹狀圖者比例增加。但值得注意的是，兩次測驗都有少比例的乘法原理解題者，這是八年級課程中尚未被教學的原理與技術。研究者猜想學生可能發現樹狀結構的計算特徵、抑或是在七年級質因數分解中尋找因數之個數的學習經驗所致。故下段開始將排除掉學生因時間而遺忘的狀況，解析題組的機率學習目標，與學後、延宕測驗中 1. 使用樹狀圖 2. 未使用樹狀圖 3. 列舉 4. 乘法原理之解題模式。其中樹狀圖又可細分不同類型，其繪製之思維將影響解題模式，值得研究者更深入探討。

（一）樹狀圖計算題之分析

計算題第二題

計算題第二題屬於古典機率，本題目標為學生必須理解如何繪製對稱機率之樹狀圖，以及依據題意要求判斷所有可能性結果，並找尋符合之事件組合。最後依據古典機率定義，計算出機率值，如表 30。

在學後測驗中，研究者發現全體 111 人中，有 64 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用列舉有 9 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 55 人、機率不對稱型 2 人、抽象模擬型 6 人，而錯誤繪製者有 1 人。

表 30
八年級計算第二題

題目：		
有兩個 1~6 點的公正骰子 A 與骰子 B，A 骰出現的點數為 a，B 骰出現的點數為 b，則點數 a 與 b 依序所組成的數為偶數的機率是多少？ 例如:當 a=1，b=2 時，所組成的數為 12。		
認知向度	數學的解題思考	
機率概念	古典機率	
測驗	八年級機率後測	八年級延宕測驗
全體答對率	0.56	0.54

不過，最終可寫出本題正確答案之學生為 61 人。而成功以樹狀圖解題者為 53 人，其餘 8 人可不繪製樹狀圖，以列舉解題。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 53 人中，樹枝機率與勾選合用 15 人。僅用勾選法 38 人。

相對地，在延宕測驗中，研究者發現發現全體 105 人中，有 36 試圖繪製樹狀圖進行解題，使用列舉有 35 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 18 人、機率不對稱型 4 人、抽象模擬型 9 人，而錯誤繪製者有 5 人。

不過，最終可寫出本題正確答案之學生為 57 人。而成功以樹狀圖解題者為 30 人，有 27 人可不繪製樹狀圖，以列舉解題，直接使用運算符號計算機率值。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 30 人中，樹枝機率與勾選合用 2 人。僅用勾選法 28 人。

計算題第五題

計算題第五題屬於古典機率，本題目標為學生必須理解對稱機率之樹狀圖如何繪製，以及依據題意辨別「取後不在重複取」其樹枝應減為兩根，並找尋符合之事件組合。最後依據古典機率定義，計算出機率值，如表 31。

在學後測驗中，研究者發現全體 111 人中，有 68 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 0 人，使用列舉有 3 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 64 人、機率不對稱型 2 人、抽象模擬型 2 人，而錯誤繪製者有 0 人。

表 31
八年級計算第五題

題目：		
劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則小希是第一個、江辰是第二個被家庭訪問的機率為多少？		
認知向度	數學的解題思考	
機率概念	古典機率	
測驗	八年級機率後測	八年級延宕測驗
全體答對率	0.23	0.33

不過，最終可寫出本正確答案之學生為 23 人。而成功以樹狀圖解題者為 21 人，其餘 2 人可不繪製樹狀圖，以列舉解題，直接使用運算符號計算機率值。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 21 人中，以完全做法有 0 人，樹枝機率與勾選合用 6 人。僅用勾選法 15 人。

相對地，在延宕測驗中，研究者發現發現全體 105 人中，有人 37 試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 2 人，使用列舉有 15 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 34 人、機率不對稱型 2 人、抽象模擬型 1 人，而錯誤繪製者有 0 人。

不過，最終可寫出本題正確答案之學生為 35 人。而成功以樹狀圖解題者為 22 人，有 2 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。其餘 11 人採用列舉解題。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 22 人中，以完全做法有 2 人，樹枝機率與勾選合用 2 人。僅用勾選法 18 人。

計算題第七題

計算題第七題屬於頻率機率，本題目標為考驗學生是否能應用餘事件思考機率問題。以及測試學生遭遇不對稱機率事件時，是否能夠依據對稱機率樹狀圖之經驗，發展出不對稱機率之樹狀圖。再者，完成繪圖後是否能從不對稱機率樹狀圖之結構中，理解、知

道如何解決連續、同時性事件，如表 32。此題非八年級《許氏機率 I》所教學之內容，是研究者為九年級教學內容所做之學前測試。

表 32
八年級計算第七題

題目：

金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$。 選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{3}{7}$。金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？

認知向度	數學的解題思考	
機率概念	頻率機率	
測驗	八年級機率後測	八年級延宕測驗
全體答對率	0.74、0.17	0.69、0.19

在學後測驗中，研究者發現全體 111 人中，有 21 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 13 人，使用列舉有 0 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為機率對稱型 13 人、機率不對稱型 5 人、抽象模擬型 3 人，而錯誤繪製者有 0 人。

不過，最終可寫出本正確答案之學生為 18 人。其中 9 人成功以樹狀圖解題，其餘 9 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 9 人中，以完全做法有 1 人，樹枝機率與勾選合用 4 人。僅用勾選法 4 人。

相對地，在延宕測驗中，研究者發現發現全體 105 人中，有人 16 試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 15 人，使用列舉有 0 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 4 人、機率不對稱型 8 人、抽象模擬型 4 人，而錯誤繪製者有 0 人。

不過，最終可寫出本題正確答案之學生為 20 人。而成功以樹狀圖解題者為 5 人，有 15 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題的 5 人中，以完全做法有 2 人，樹枝機率與勾選合用 0 人。僅用勾選法 3 人。

計算題第八題

計算題第八題屬於古典機率，本題目標為學生必須理解對稱機率之樹狀圖如何繪製，判斷所有可能性結果，並找尋符合之事件組合，最後依據古典機率定義，計算出機率值。此外，測試學生是否能夠依據對稱機率樹狀圖之經驗，發展出不對稱機率之樹狀圖。即將早、午餐分類為素食、肉類兩種，則早餐素食、肉之機率值為$\frac{1}{2}$，而午餐選擇素食機率值為$\frac{2}{3}$、肉則是$\frac{1}{3}$。如表 33。

表 33

八年級計算第八題

題目：		
胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？		
認知向度	數學的解題思考	
機率概念	古典機率	
測驗	八年級機率後測	八年級延宕測驗
全體答對率	0.51	0.49

在學後測驗中，研究者發現全體 111 人中，有 71 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 6 人，使用列舉有 1 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 63 人、機率不對稱型 4 人、抽象模擬型 0 人，而錯誤繪製者有 4 人。

不過，最終可寫出正確答案之學生為 55 人。其中 49 人成功以樹狀圖解題，有 5 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值，有 1 人使用列舉解題。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 49 人中，以完全做法有 1 人，樹枝機率與勾選合用 15 人，僅用勾選法 33 人。

相對地，在延宕測驗中，研究者發現發現全體 105 人中，有人 50 試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 6 人，使用列舉有 6 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標

準可分為，機率對稱型 37 人、機率不對稱型 4 人、抽象模擬型 1 人，而錯誤繪製者有 8 人。

不過，最終可寫出本題正確答案之學生為 51 人。其中 40 人成功以樹狀圖解題，有 6 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。其餘 5 人採用列舉解題。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 40 人中，以完全做法有 3 人，樹枝機率與勾選合用 3 人。僅用勾選法 34 人。此外，錯誤以樹狀圖解題者，有 6 份屬於加法與乘法原理的誤用，有 1 人犯了樹枝上機率判讀錯誤。

計算題第九題

計算題第九題屬於古典機率，本題目標為學生必須理解對稱機率之樹狀圖如何繪製，以及依據題意要求，判斷所有可能性結果，並須對應至「不分勝負」之事件組合。最後依據古典機率定義，計算出機率值。再者，是否能從對稱機率樹狀圖之結構中，理解、知道如何解決連續、同時性事件，如表 34。此題非八年級《許氏機率 I》所教學之內容，是研究者為九年級教學內容所做之學前測試。

表 34

八年級計算第九題

題目：		
川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？		
認知向度	數學的解題思考	
機率概念	古典機率	
測驗	八年級機率後測	八年級延宕測驗
全體答對率	0.46	0.37

在學後測驗中，研究者發現全體 111 人中，有 79 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 1 人，使用列舉有 3 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 68 人、機率不對稱型 4 人、抽象模擬型 5 人，而錯誤繪製者有 2 人。

不過，最終可寫出本正確答案之學生為 49 人。而成功以樹狀圖解題者為 46 人，有 1 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值，其餘 2 人以列舉解題。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 46 人中，以完全做法有 0 人，樹枝機率與勾選合用 16 人，僅用勾選法 30 人。

相對地，在延宕測驗中，研究者發現發現全體 105 人中，有人 55 試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 2 人，使用列舉有 16 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 28 人、機率不對稱型 5 人、抽象模擬型 4 人，而錯誤繪製者有 18 人。

不過，最終可寫出本題正確答案之學生為 39 人。而成功以樹狀圖解題者為 29 人，有 2 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。其餘 8 人採用列舉解題。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 29 人中，以完全做法有 1 人，樹枝機率與勾選合用 1 人，僅用勾選法 27 人。

（二）八年級學生使用樹狀圖之小結

研究者在八年級測驗中，發現有學生能畫出「不對稱」事件的樹狀圖並解決問題。這是八年級課程中尚未被教學之能力，雖然樹狀圖的樹枝表示依然是對稱樹狀圖，但研究者認為此證據顯示，學生於九年級時，已經形成以樹狀圖來學習不對稱事件問題之認知層次。再者，在延宕測驗中，研究者發現各題之答對率差異不大，但使用樹狀圖解題的人數卻下降了，如表 35。表示這套課程確實協助學生發展機率概念。隨著年齡的成熟，學生機率概念之抽象運算有所成長。並且有少數學生已能使用乘法原理與獨立性概念進行解題，如圖 7。有些學生能區分運算符號的使用（互斥性和事件），如圖 7、圖 8。不過，多數學生對於前述概念依然薄弱，甚至沒有。

表 35
樹狀圖之繪製類型

	2		5		7		8		9	
測驗	學後	延宕	學後	延宕	學後	延宕	學後	延宕	學後	延宕
對稱	55	18	64	33	13	4	65	36	68	27
不對稱	2	4	2	2	5	8	4	4	4	5
抽象化	6	9	2	1	3	3	0	1	5	4

研究者發現多數學生在經過教學後六個月，主要迷思為「樣本空間的混淆」。這樣的錯誤不僅是有迷思的同學依然不清楚外，原有正確概念的學生，反而在教學後也發生這樣的錯誤。典型範例：統一發票有中獎與不中獎二種情形，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$。顯示這種事件分類的敘述，不易讓學生分辨「什麼」才是真正的樣本。這項事實顯示學生過於把注意力放在文字敘述之「結果」上，而忽略了「樣本空間」的真正意涵。類似的，另一道題目「川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？」解題時，有些學生無法判斷樹狀圖上方分類與樹枝節點間差異，導致繪製錯誤的樹狀圖，如圖 9。研究者認為這點是必須受到重視的教學難點，因為九年級之樹狀圖問題牽涉多數此類型之問題。綜上所述，學生在進行九年級教學前，在樣本空間上，仍有待加強學生的分辨能力。以及在題意較複雜之樹狀圖繪製上，需要更多琢磨。

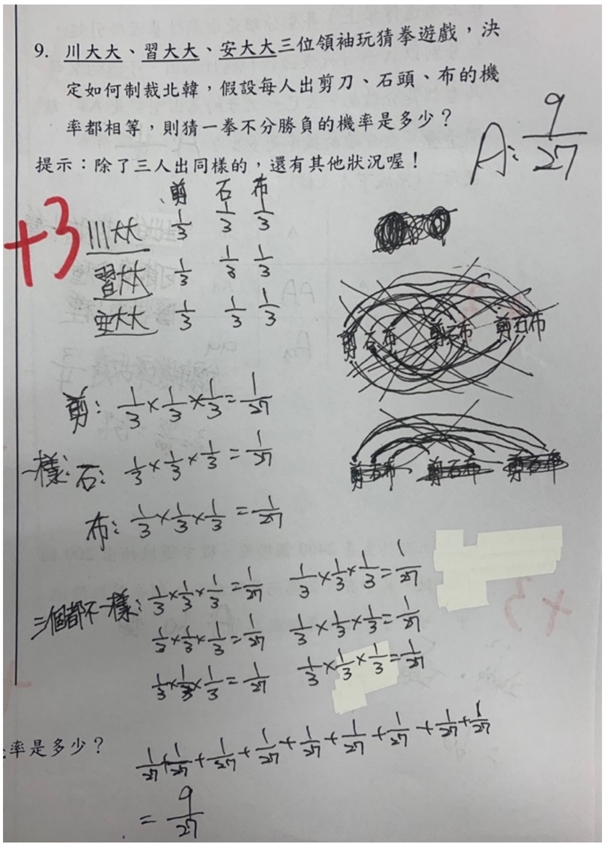


圖 7 八年級學生能使用乘法原理或者獨立性概念解題

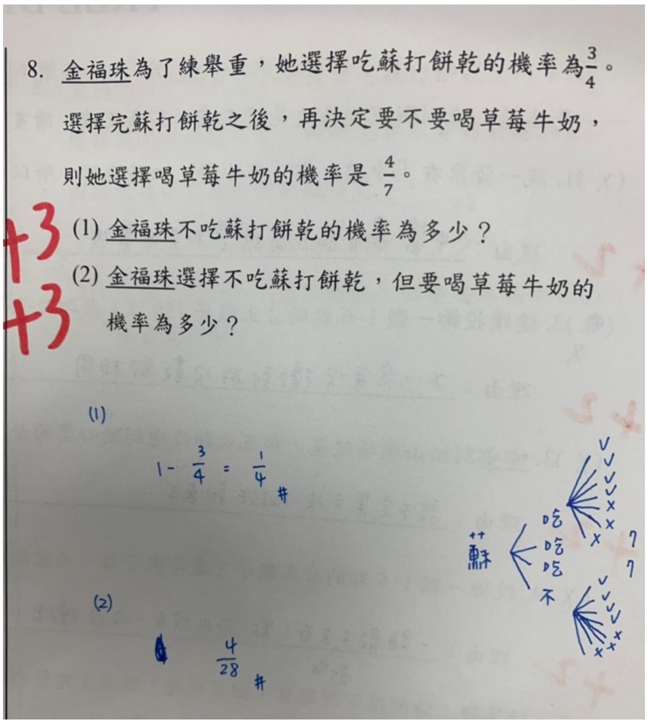


圖 8 八年級學生能使用樹狀圖解決不對稱事件之問題

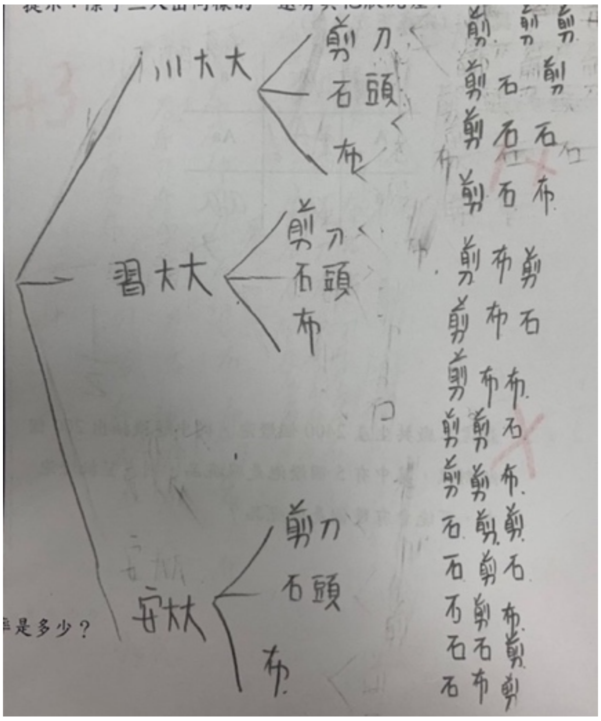


圖 9 無法判斷樹狀圖上方分類與樹枝節點間差異

第二節 九年級後測與延宕測分析

經過九年級教學後，研究者於九年級學後一週後進行九年級機率後測。並在測驗後約五、六個月，對學生進行九年級機率延宕測驗。兩份測驗之間未進行任何複習、作業等操作，學生僅在延宕測驗前受教於九年級下學期之正式課程，而正式課程的內

容相當於本研究的八年級實驗課程，並未達到九年級實驗課程的程度。由此驗證學生是否能夠將機率知識轉化為知識，以及探討可能存在之機率迷思。

九年級機率後測與九年級延宕測驗之平均數、標準差與平均答對率，如表 36。結果可知九年級機率後測平均答對率接近六成，顯示每道題目都有超過一半的同學具備解決的能力。不過，九年級的延宕測驗成績退步了：延宕測驗之平均答對率約五成，平均數分數下降且標準差變大。再者，九年級機率測驗之成對樣本 T 檢定統計結果達顯著，表示九年級學生在學習後六個月，確實退步了，顯示保留效果較差。研究者猜想此現象或許是九年級延宕測驗時間為會考後，且接近畢業時節，學校生活重心轉移課外活動，導致學生的學習態度已鬆懈。但也可能是因為經過六個月後，學生的機率概念發生迷思或固有主觀經驗再次影響正確的機率概念。因此，以下研究者將進一步分析各題，探究研究對象是全然退步還是在某些題中出現困難？

表 36

九年級機率測驗之成對樣本 T 檢定統計結果

	人數	平均數	範圍	標準差	平均答對率	*p* 值
九年級機率後測	75	26.07	1-39	10.93	0.57	<.05
九年級延宕測驗	81	22.64	1-39	13.95	0.49	

從各題之答對率進行分析，可理解是否是全部的機率概念都退步，或是某個概念影響導致退步的結果，如圖 10。研究者發現並非 14 道題全部呈現退步，意即學生在某些概念上還是有所進步。結果顯示進步的題皆是是非問答題，顯示學生的觀念更加清晰，並能夠以文字敘述理由，數學語言在機率上的使用更為精確。不過，退步的題全部是計算題型，或許可能存在某些觀念上的盲點，使得誤用運算模式。但為避免受到極端值影響，且為更詳細釐清學生退步原因，研究者採以總分之前後 27%為基準，進行高、中、低分組，再深入探究各組機率概念發展。對此，可理解高、中、低組學生在機率知識的強項與弱點，亦能了解課程內容與設計應如何做出適當的調整。

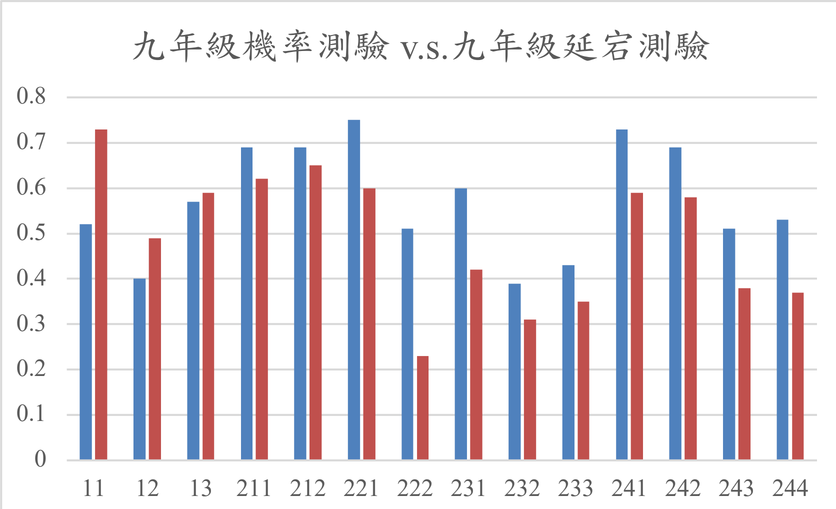


圖 10 九年級機率學後測驗 vs 九年級延宕測驗

綜上所述，研究者將學生兩次測驗成績以前後 27%為基準，分為高、中、低三組進行比較，從中理解各群體間其保留效果的差異性。高分組同學在是非問答題平均答對率均微幅提升，僅第三題微幅退步。而計算題有一道題答對率退步明顯，如。顯示高分組同學機率概念的掌握度有所提升，但仍有出現迷思概念。而中分組的同學在是非問答題平均答對率有所成長，而計算題全數皆退步，如。顯示中分組同學機率概念的文字詮釋有進步，但計算題仍出現概念薄弱或是運算混淆的現象。相對的，低分組的同學平均答對率普遍下降，如圖 13。不過值得注意的是兩道是非問答題題之答對率呈現進步。顯示這些同學雖然在機率計算上顯現困難，卻在概念理解與運用文字敘述答題理由是有進步的。

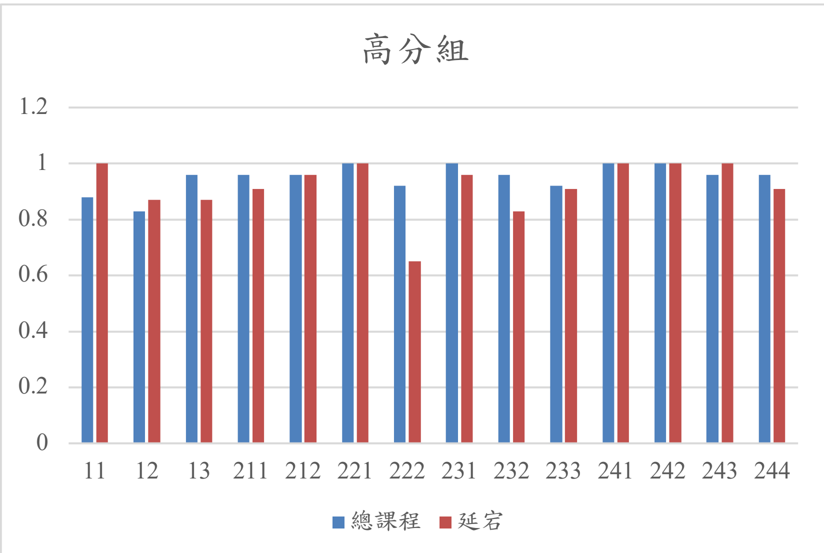


圖 11 九年級高分組平均答對率之差異

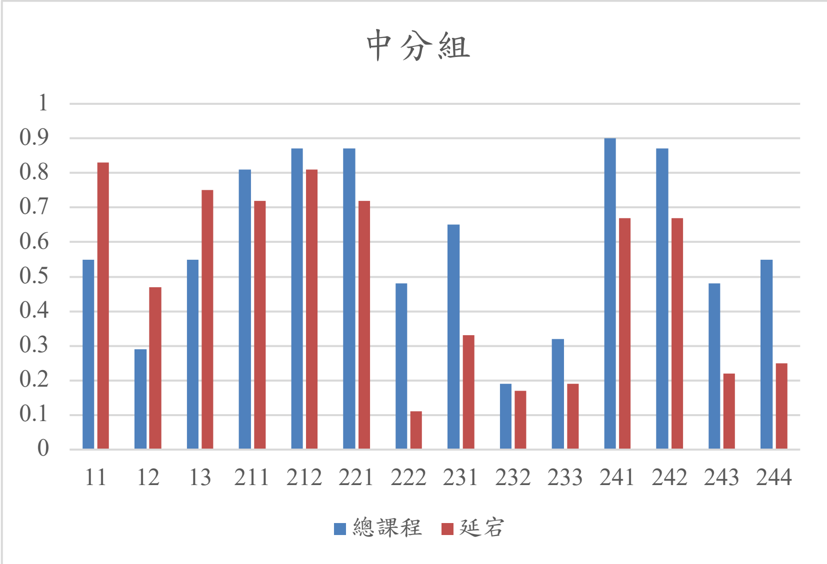


圖 12 九年級中分組平均答對率之差異

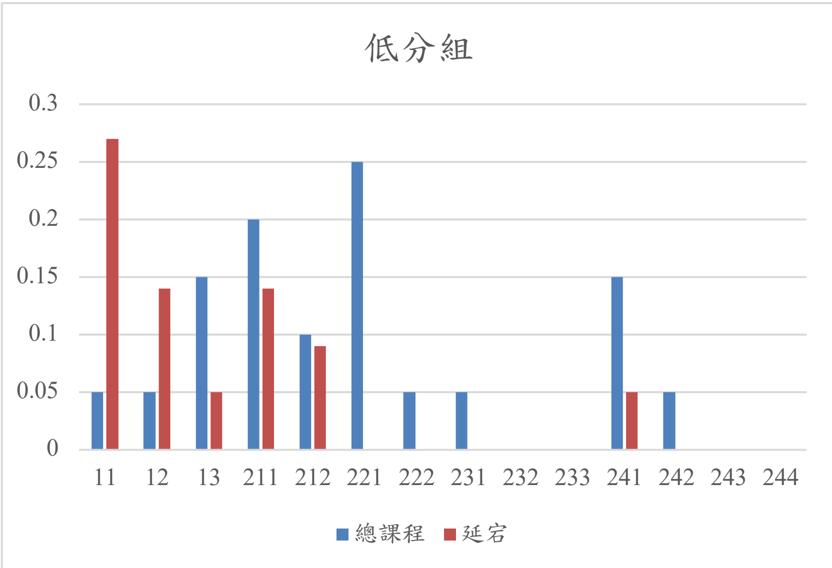


圖 13 九年級低分組平均答對率之差異

整體而言，研究者發現三組學生在兩道是非問答提上皆呈現進步，其餘道題則是衰退居多。故針對學生每道題目之答題進行分析，方能真正了解學生真實作答反應、遭遇的困難或是發展哪些成熟的概念。更重要的是，亦可從中分析學生在使用樹狀圖作為解題工具上之迷思。

第三節　九年級學生之的答題特徵

本節將分析學生之九年級機率測驗的每道題做分析，是非問答題共有三題，主要測驗學生是否能融會機率概念於文字用語中，達到「不確定性思維的解題思考」，亦符合

數學素養之訴求。即應用數學概念來解釋、描述及預測現象。同時，亦能從學生的文字描述，理解其機率知識的發展。計算題共四個題組，將使用樹狀圖之繪製標準與逐步解析之規準進行試題分類，以了解學生的解題策略、邏輯思路，解析九年級學生在教學後之機率概念與迷思。探討主題有 1. 數學語言使用，與 2. 樹狀圖繪製與機率運算。

（一）數學語言使用

試題分析結果呈現，三題之答對率是進步的。但在高、中、低三組答對率分析中，最後一題僅有中分組呈現進步。可見並非整體性成長，故以下將逐題探究研究對象熟悉的機率概念與生疏不穩的思維。

第一題屬於古典機率之獨立性，此題目標為學生能夠理解獨立性的意義，期望習得機率語言之使用，如表 37。學生必須能分辨每次投擲事件彼此間互不影響，且不被「指定點數」所影響其判斷。這迷思類型為極端值之混淆，多數人直觀感受上，認為極小、極大點數較難擲出。

表 37

九年級機率測驗第一題

題目：擲一公正的骰子，連續三次皆擲出 5 點，則擲第四次的結果出現 5 點的機率會大於 $\frac{1}{6}$。		
認知向度	概念理解、不確定性思維的解題思考	
機率概念	古典機率、獨立性	
測驗	九年級機率後測	九年級延宕測驗
全體答對率	0.52	0.73

從答題中，研究者發現能寫出正確理由之學生中，其文字敘述主要以一般口語化文字，搭配「獨立」之機率詞彙敘述、解釋。顯示學生在文字敘述與邏輯結構上相當完整，且對於獨立概念不陌生外，亦能使用數學中機率詞彙。研究者任意選出範例，如表 38。

不過，仍有少數錯誤的範例值得關注，學生明顯沒有建立出獨立性之思維。依然認為每一次試驗之結果將因次數而改變，或機率值範圍的概念。而在延宕測驗，我們發現有學生受時近效應，認為擲出點數 5 機率會變小，如表 39。

表 38

九年級機率測驗第一題獨立性之數學詞彙詮釋

九年級機率後測	
數學詞彙詮釋	
A06 不互相影響	B11 擲骰子是獨立事件，每面機率皆為 $\frac{1}{6}$
A08 因為每次擲出機率都是 $\frac{1}{6}$	C16 擲骰子為獨立事件 不影響後續的機率
九年級延宕測驗	
A09 每一次擲公正骰子，並無關係	B02 獨立事件
A02 都是 $\frac{1}{6}$	B04 獨立事件，不影響

表 39

九年級機率測驗第一題之錯誤範例

題目： 擲一公正的骰子，連續三次皆擲出 5 點，則擲第四次的結果出現 5 點的機率會大於 $\frac{1}{6}$。	
九年級機率後測	九年級延宕測驗
A13 前面三次都陸到5第四次不一定	B26 第三次 $=\frac{1}{5}$ 第四次 $=\frac{4}{5}$
B21 次數越多，機率越大	C07 大於

值得關注的是，各有一位學生分別在學後、延宕測驗中，以頻率機率趨近古典機率之觀點進行解說，這是課程中八年級之教學目標。顯示學生能理解、應用「多次試驗下，機率值將趨近於某一個數值」這概念，且不受題目「連續擲出五點」敘述影響其判斷。對此研究者認為這些同學可能形成「大數法則」之機率思維，如表 40。

表 40

以頻率機率趨近古典機率觀點之範例

題目： 擲一公正的骰子，連續三次皆擲出 5 點，則擲第四次的結果出現 5 點的機率會大於 $\frac{1}{6}$。	
九年級機率後測	九年級延宕測驗
C25 擲骰子為互不影響的分別事件 固機率應近似古	C24 不一定，但擲越多次 機率會越接進古

第二題屬於古典機率之獨立性，此題目標為學生能夠理解獨立性與判別機率運算，並期望習得數學語言之使用。學生除了分辨每次投擲事件彼此間互不影響，且須知道處理其機率值時，應使用何種運算符號，如表 41。

表 41

九年級機率測驗第二題

題目： 擲筊 3 次，連續 3 次都擲到聖筊的機率為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$。		
認知向度	概念理解、不確定性思維的解題思考	
機率概念	古典機率、獨立性	
測驗	九年級機率後測	九年級延宕測驗
全體答對率	0.4	0.49

研究者發現能寫出正確理由之學生中，如同第一題其文字敘述主要以一般口語化文字，搭配「獨立」之機率詞彙敘述、解釋。顯示學生在文字敘述與邏輯結構上相當完整，且對於獨立概念不陌生外。並包含解釋樣本空間與正確算式，亦能使用機率詞彙。值得

注意的是，有同學使用樹狀圖來解釋這道題，展現樹狀結構能協助學生理解機率之抽象運算思維，如表 42。

表 42
九年級機率測驗第二題獨立性之數學詞彙詮釋

題目：

擲筊 3 次，連續 3 次都擲到聖筊的機率為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$。

九年級機率後測

數學詞彙詮釋

C16

此3次彼此不影響

因此應改為 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

B11

擲筊為獨立事件

3次皆擲到聖筊機率為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

C13

3次皆擲到聖筊機率為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

A08

擲的時候可能為(正正)(正反)(反反)(反正)

每次聖筊機率為 $\frac{1}{2}$ 但要用乘的

C25

不應用加法計算，應用乘法

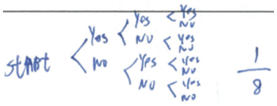
B08

每一次擲骰子都是屬於獨立事件

彼此不影響結果

樹狀圖解

A18



連續3次都擲到聖筊的機率為 $\frac{1}{8}$

（續下頁）

九年級延宕測驗	
C24 不相干事件機率要相乘 不可相加，事件一不可能大於1	B02 連續事件；$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
B12 是相乘	B04 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

不過，仍有錯誤的範例需要注意，如有學生讀題後，對於擲筊樣本空間的錯誤認知，進而提出他所認為聖筊之機率，但這類同學遺忘八年級文本有定義擲筊的樣本空間概念。故出現以聖筊、無筊與笑筊作為樣本空間之依據，將（凸面，凹面）、（凹面，凸面）列為同一事件，故機率為$\frac{1}{3}$之迷思 。導致理由回答時，關注的錯誤資訊是樣本空間，而忽略獨立事件之機率運算符號之使用，如表 43。

表 43

九年級機率測驗第二題之錯誤範例

題目： 擲筊 3 次，連續 3 次都擲到聖筊的機率為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$。	
九年級機率後測	九年級延宕測驗
A23 2面 3次 但機率也不一定會一樣	B19 ~~是 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$~~
A28 擲筊有3種可能聖筊、笑筊、沒筊 所以每次機率是$\frac{1}{3}$	C22 都$\frac{1}{2}$
B10 因為一半一半	B22 機率都$\frac{1}{3}$。

第三題屬於古典機率之條件機率，此題目標為學生能夠理解樣本空間改變後其機率值變化，並期望習得機率詞彙（相依事件）之使用。學生除了分辨事件一與事件二因取後不放回而互相影響外，且須知道如何計算其機率值，如表 44。

表 44

九年級機率測驗第三題

題目： 隨機從籤筒中抽籤，取後不放回，籤上的號碼是 1~40 號 事件一：抽中 10 號籤的機率。 事件二：抽出 10 號籤後，再抽中 11 號籤的機率 事件一與事件二的機率值相同。		
認知向度	概念理解、不確定性思維的解題思考	
機率概念	古典機率、條件機率	
測驗	九年級機率後測	九年級延宕測驗
全體答對率	0.57	0.59

研究者發現能寫出正確理由之學生中，如同第一題其文字敘述主要以一般口語化文字，搭配機率語言敘述或判別事件為連續性之運算。在文字敘述與邏輯結構上相當完整，且對於相依概念不陌生。學生確實可感受從桶子中取出一支籤後，剩餘的籤數會減少，使得樣本空間改變，並引導出機率值。

值得注意的是，有學生以事件為連續性之想法，使用乘法原理求事件二之機率值。不過在延宕測驗中，僅有一例口頭說明事件二為連續性機率值較小。可見事件同時發生機率值處理之思維對於九年級學生較為薄弱，如表 45。

表 45

九年級機率測驗第三題條件機率之數學詞彙詮釋

九年級機率後測	
數學詞彙詮釋	
C05 不放回，籤就少一支	C07 二的機率值相同。 $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{40} \times \frac{1}{39}$

（續下頁）

A14 抽出放回，會影響後面抽中11號的機率	A06 (1) $\frac{1}{40}$ (2) $\frac{1}{40} \times \frac{1}{39}$
C09 抽出10號後少了一籤 故機率增加	A01 有40個籤，抽出了10號不放回，籤筒裡剩下39個 所以抽中11號的機率為 $\frac{1}{39}$
C25 事件二之機率應小於事件一	C08 $\frac{1}{40}$ 跟 $\frac{1}{39}$
九年級延宕測驗	
B21 與事件二的機率值相同。 取後不放回 機率值事件一事件二不同。	B04 ① $\frac{1}{40}$ ② $\frac{1}{39}$
C13 不相同	B17 事件一的機率為 $\frac{1}{40}$ 事件二為 $\frac{1}{39}$
C22 事件二機率更小	B20 抽10号的機率為 $\frac{1}{40}$ 再抽11号的機率為 $\frac{1}{39}$ 故兩者機率值不同

不過，仍有錯誤的範例值得關注，如有學生讀題後，無法理解「取後不放回」之敘述，故認為兩次事件之機率值是一樣的。研究者認為這類錯誤與其閱讀能力或許有關聯，導致其文字理解較差，如表 46。

表 46

九年級機率測驗第三題之錯誤範例

九年級機率後測	九年級延宕測驗
B21 不放回，機率變大	C10 與事件二的機率值相同。 $\frac{1}{40}$，$\frac{1}{40}$ 都是 $\frac{1}{40}$
B08 事件二的機率值相同。 每一次抽籤抽中16號籤的機率都不會彼此影響 故事件一與事件二的機率相同	C16 一：$\frac{1}{40}$　二：$\frac{1}{40}\times\frac{1}{40}=\frac{1}{1600}$

（二）樹狀圖計算題之分析

計算題四大題組，皆可用樹狀圖搭配或單純使用乘法原理進行解題。研究者統計所有研究對象之樹狀圖使用情況，同理應用第一節之分類。第一層判定為使用樹狀圖與否，故有二類：使用樹狀圖、未使用樹狀圖；第二層判定使用樹狀圖之正確性與未繪圖單純使用乘法原理，亦有二類：錯誤繪製樹狀圖、僅使用乘法原理、未繪製圖形。

九年級學後測驗中四大題組之總人次為 300 次，各題次數詳見表 47。研究者發現使用樹狀圖的人次共計 199 次，佔 66%。未使用樹狀圖者的人次共計 101 次，佔 34%。而使用樹狀圖之正確者人次共計 186 次，佔 93%，錯誤繪製樹狀圖的人次共計 13 次，佔 7%。此外，未使用樹狀圖中，單純以樹狀圖改以乘法原理解題的人次共計 29 次，佔 29%，其餘未作答者共計 72 次，佔 71%。

相對地，九年級延宕測驗中四大題組之總人次為 324 次，各題次數詳見表 47。研究者發現使用樹狀圖的人次共計 146 次，佔 45%。未使用樹狀圖者的人次共計 178 次，佔 55%。而使用樹狀圖之正確者人次共計 139 次，佔 95%，錯誤繪製樹狀圖的人次共計 7 次，佔 5%。此外，未使用樹狀圖中，單純以樹狀圖改以乘法原理解題的人次共計 43 次，佔 24%，其餘未作答者共計 135 次，佔 76%。

表 47

九年級使用樹狀圖之次數統計

	題號	1		2		3		4	
	測驗	學後	延宕	學後	延宕	學後	延宕	學後	延宕
	人數	75	81	75	81	75	81	75	81
第一層	使用樹狀圖	54 70%	47 57%	52 68%	37 46%	44 55%	25 26%	52 60%	37 43%
	正確繪製	52	46	51	37	41	21	45	35
	錯誤繪製	2	1	1	0	3	4	7	2
第二層	未使用樹狀圖	21 30%	34 43%	23 32%	44 54%	31 45%	56 74%	23 40%	44 57%
	乘法原理	8	10	8	12	7	15	6	6
	未作答	13	24	15	32	24	41	17	38

整體而言，樹狀圖使用之比例在延宕測驗中比例減少，無繪製樹狀圖解題之比例增加，錯誤繪製樹狀圖者有些微減少，僅以乘法原理解題者仍是少數。且由上節的統計檢定，已知延宕測驗呈現退步，特別是計算題皆是低於學後測驗。故由下段開始，將排除掉學生因時間而遺忘的狀況，解析題組的機率學習目標，與學後、延宕測驗中 1. 使用樹狀圖，2. 未使用樹狀圖，3. 乘法原理之解題模式。其中樹狀圖又可細分不同類型，其繪製之思維將影響解題模式，值得研究者更深入探討。

計算題第一題

計算題第一題屬於古典機率之互斥和事件，本題目標為學生必須理解不對稱機率之樹狀圖如何繪製，以及依據題意辨別兩事件之關係、解決問題時應使用何種運算符號。另一要點為第二小題之四面骰「字母」之機率判斷，考驗學生遭遇「字母機率=1」時，應如何建立其運算式，如表 48。

在學後測驗中，研究者發現全體 75 人中，有 54 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 8 人，使用列舉有 0 人，其餘 13 人未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 23 人、機率不對稱型 26 人、抽象模擬型 3 人，而錯誤繪製者有 2 人，如表 49。

表 48

計算題第一題之古典機率

題目： 分別擲 1 顆公正的四面骰和 1 顆公正的六面骰，四面骰上的英文字母分別為 P、P、A 和 P，六面骰上的英文字母分別為 B、O、O、K、S 和空白。 (1) 擲出的結果為「PO」的機率為何？ (2) 擲出的結果為「字母&空白」的機率為何？		
認知向度	數學的解題思考、不確定性思維的解題思考	
機率概念	古典機率、互斥和事件	
測驗	九年級機率後測	九年級延宕測驗
全體答對率	0.69、0.69	0.62、0.65

表 49

九年級第一題樹狀圖類型統計

題號 1	機率對稱	機率不對稱	抽象模擬
學後	23	26	3
延宕	22	12	12

不過，最終可寫出題組 1（兩題）正確答案之學生為 49 人。而成功以樹狀圖解題者為 41 人，其餘 8 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。特別的是，有 1 位同學繪製錯誤樹狀圖，改採用八年級機率實驗課程所學之列舉解決第一小題，如表 50。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 41 人中，以完全做法有 40 人。僅用勾選法 1 人。此外，無法正確以樹狀圖解題者中有 2 人發生加法、乘法原理誤用，如表 50。

相對地，在延宕測驗中，研究者發現發現全體 81 人中，有 46 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 10 人，使用列舉有 4 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 22 人、機率不對稱型 12 人、抽象模擬型 12 人，而錯誤繪製者有 1 人。

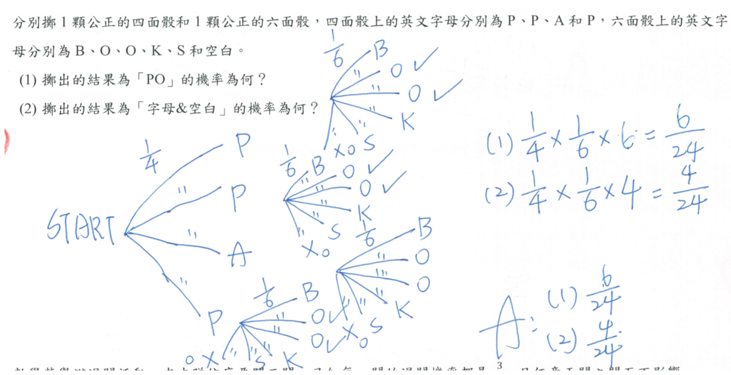
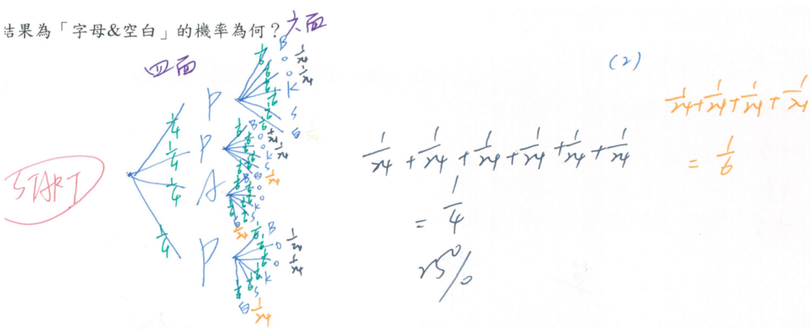
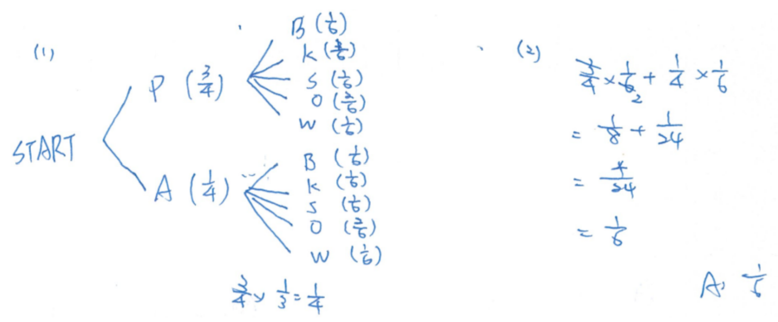
不過，最終可寫出題組 1（兩題）正確答案之學生為 47 人。而成功以樹狀圖解題者為 38 人，有 6 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。

其餘 3 人採用八年級機率實驗課程所學之列舉解決第一小題，如表 50。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 38 人中，全部皆以完全做法解題。此外，沒有發生加法、乘法原理誤用或是樹枝上機率錯誤。

此外，本題組之第二小題解題算式中，有兩種解題邏輯表示，其一將 P、A 字母機率分別計算，其二學生已能從文意轉換字母機率為 1，進而直接計算。不過僅有少數。可見九年級學生對於將文字轉化為機率語言並非如此直觀，仍有加強空間，如表 50。

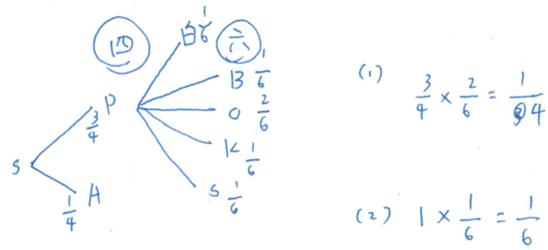
表 50

計算題第一題之樹狀圖分析

九年級機率後測	
C16  	1. 機率對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理
C22  	1. 機率對稱型樹狀圖 2. 同層樹狀圖之加法原理
A02 	1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. P、A 字母機率分別計算

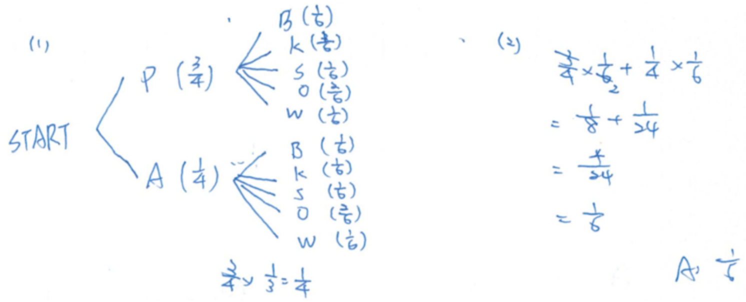
（續下頁）

A06



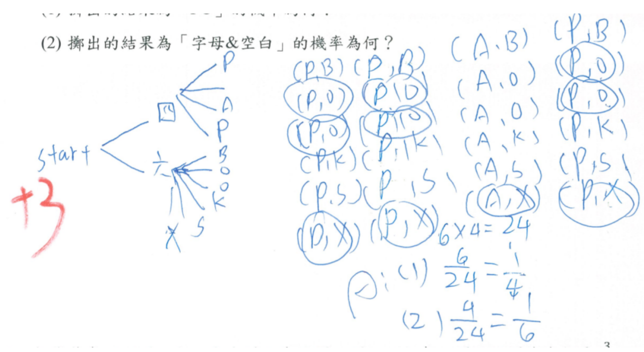
1. 抽象模擬型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理
3. 文意轉換字母機率為 1

A28



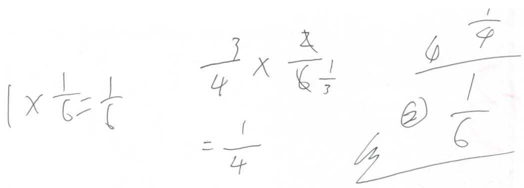
1. 機率不對稱型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理
3. P、A 字母機率分別計算

B10



1. 列舉
2. 錯誤的樹狀圖

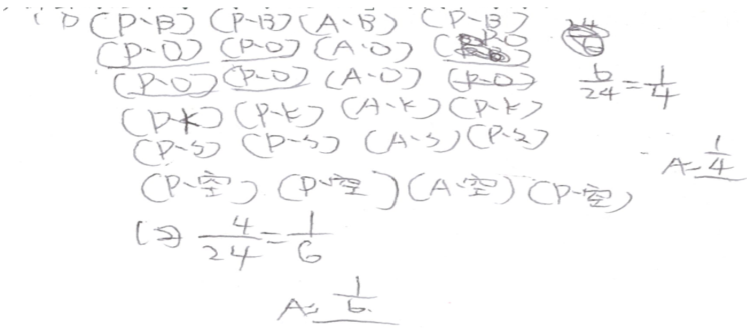
C15



1. 乘法原理

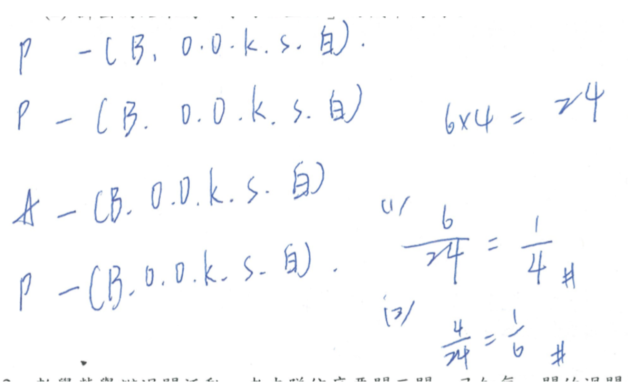
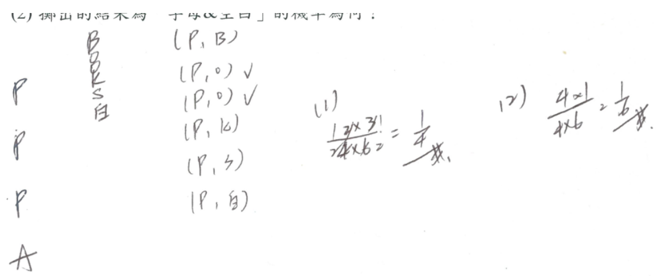
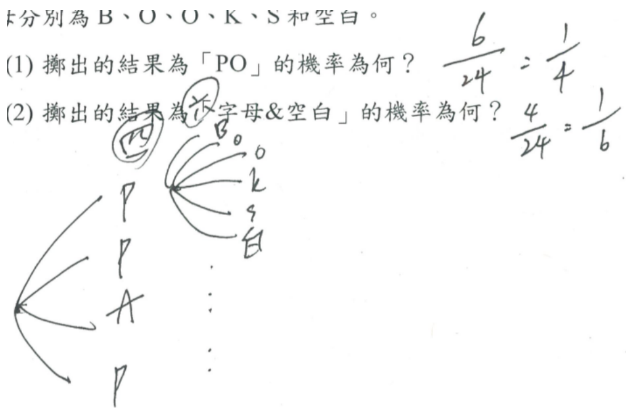
九年級延宕測驗

A07



1. 列舉

（續下頁）

B20 		1. 列舉
C27 		1. 抽象模擬型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 文意轉換字母機率為 1
B22 		1. 抽象模擬型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理

計算題第二題

計算題第二題屬於古典機率之互斥和事件，本題目標為學生必須理解不對稱機率之樹狀圖如何繪製，以及依據題意辨別兩事件之關係、解決問題時應使用何種運算符號。與第一題不同的是，本題考驗學生是否知道每次過關之機率固定為$\frac{3}{4}$而非變動的，進而建立「三階層」樹狀圖與辨別其機率值之互斥和事件。另一要點為學生是否觀察樹狀圖之結構，理解「只完成其中一關」之意涵，如表 51。

表 51

計算題第二題之古典機率

題目：

數學營舉辦過關活動，老皮隊依序要闖三關。已知每一關的過關機率都是 $\frac{3}{4}$，且任意兩關之間互不影響

(1) 請問老皮隊三關都失敗的機率為何？

(2) 請問老皮隊只完成其中一關的機率為何？

認知向度	程序執行、不確定性思維的解題思考	
機率概念	古典機率、互斥和事件	
測驗	九年級機率後測	九年級延宕測驗
全體答對率	0.75、0.51	0.6、0.23

在學後測驗中，研究者發現全體 75 人中，有 52 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 8 人，使用列舉有 0 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 0 人、機率不對稱型 50 人、抽象模擬型 1 人，而錯誤繪製者有 1 人，如表 52。

表 52

九年級第二題樹狀圖類型統計

題號 2	對稱機率	不對稱機率	抽象化
學後	0	50	1
延宕	1	31	5

不過，最終可寫出題組 2（兩題）正確答案之學生為 38 人。而成功以樹狀圖解題者為 33 人，其餘 5 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 33 人中，以完全做法有 33 人。其餘有 2 人發生加法、乘法原理誤用，有 3 人發生樹枝機率錯誤。

相對地，在延宕測驗中，研究者發現發現全體 81 人中，有 37 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 8 人，使用列舉有 0 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 1 人、機率不對稱型 31 人、抽象模擬型 5 人，而錯誤繪製者有 0 人。

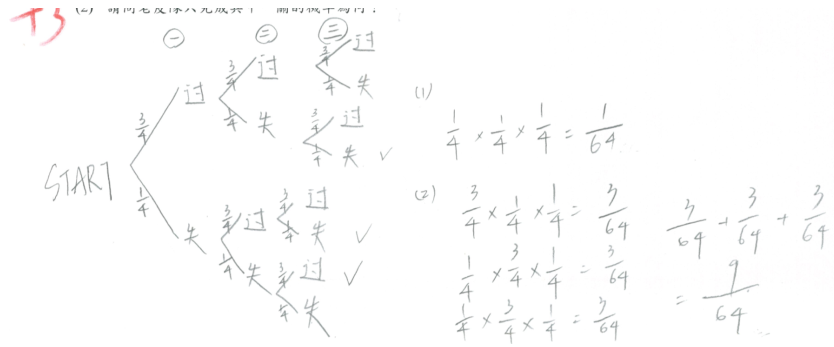
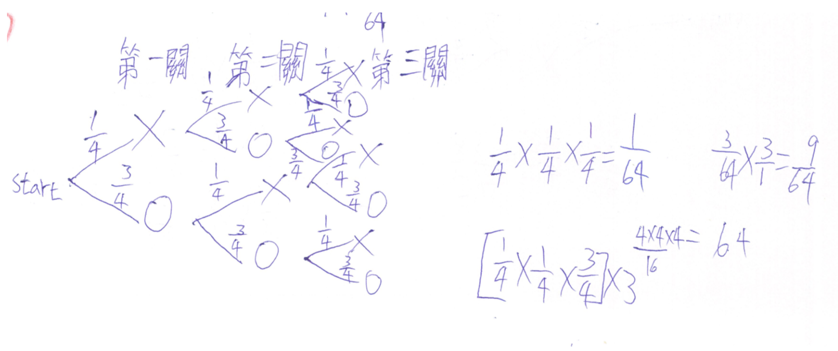
不過，最終可寫出題組 2（兩題）正確答案之學生為 19 人。而成功以樹狀圖解題者為 17 人，有 2 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。

最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 17 人中，全部皆以完全做法解題。其餘有 5 人發生樹枝機率錯誤。

承上述，研究者發現能寫出正確答案之學生，其樹狀圖繪製以機率不對稱型為主。研究者認為題意敘述會影響學生選擇樹狀圖繪製之方法。學生可直觀理解「過關與否」之二分法且分類較為單一，故繪製時鮮少以機率對稱型樹狀圖處理。另有 1 位同學以直式方向繪製樹狀圖。再者，解題運算除了知道不同層樹狀圖之乘法原理外，亦有同學已可不繪製樹狀圖，直接使用運算符號計算機率值。此外，在延宕測驗中，亦有同學使用抽象模擬型樹狀圖且是對稱機率方式繪製，顯示這位學生在九年級時，能活用樹狀圖解決機率問題，如表 53。

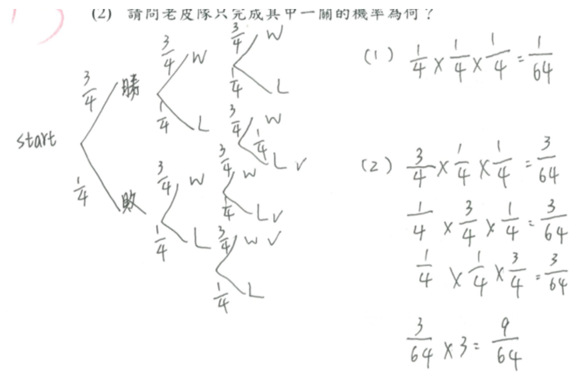
表 53

計算題第二題之樹狀圖繪製分析

九年級機率後測	
B25 	1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 同層之加法原理：三次事件分別計算
B21 	1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理

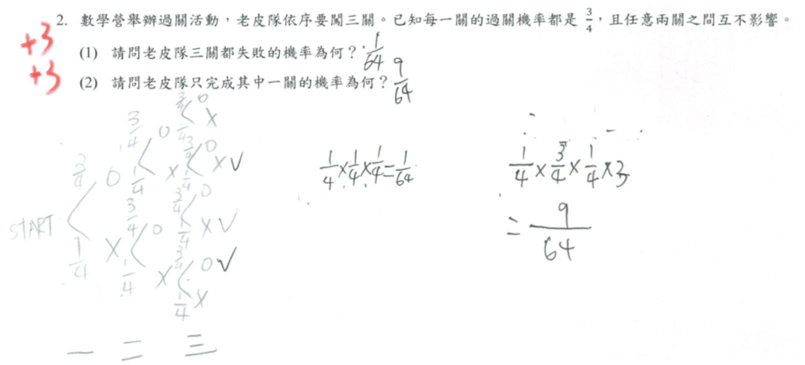
（續下頁）

A25



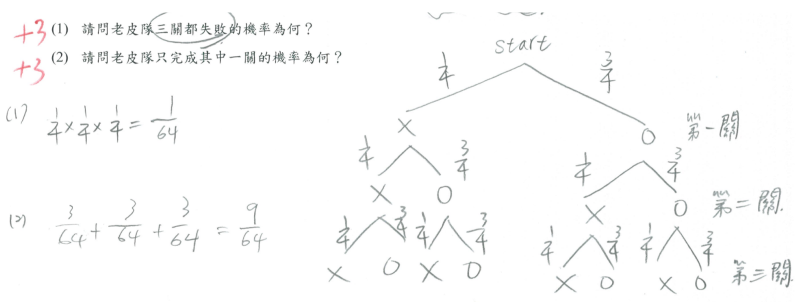
1. 機率不對稱型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理

C04



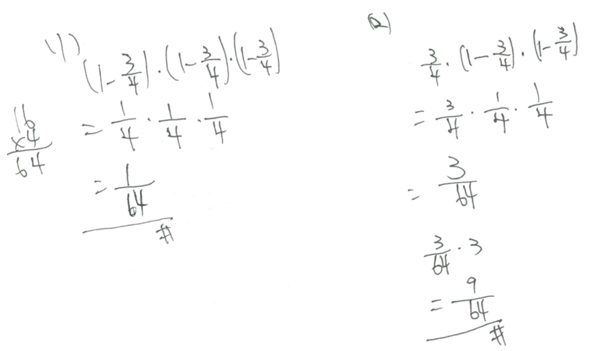
1. 機率不對稱型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理

A17



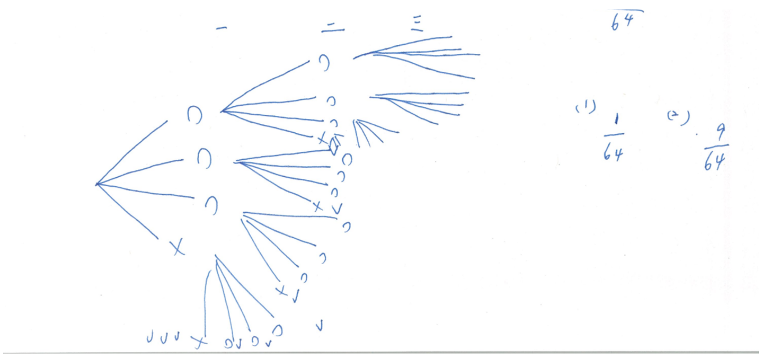
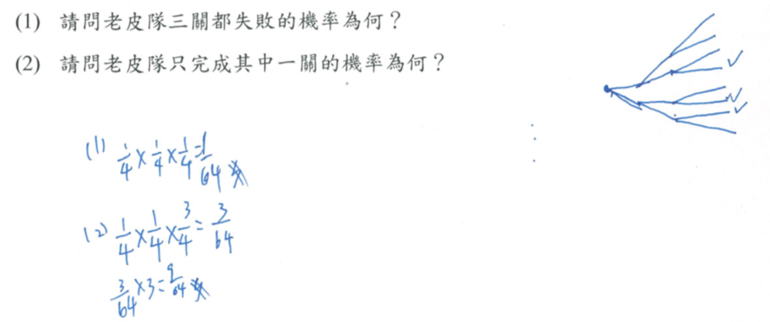
1. 直立型機率不對稱型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理
3. 同層之加法原理：三次事件分別計算

A08



1. 餘事件之乘法原理

（續下頁）

九年級延宕測驗	
A22 	1. 抽象型機率對稱型樹狀圖
B11 	1. 機率不對稱型樹狀圖（僅有圖示） 2. 不同層樹狀圖之乘法原理

計算題第三題

第三題屬於頻率機率之條件機率，本題目標為學生是否能夠理解兩組成對樣本之「不對稱機率」問題，應如何分析題意並繪製樹狀圖。研究者需特別說明「分佈」一詞在課程中與同學解說過，非實質影響學生思考之因素。此題考驗學生是否知道「比率」如何轉換成事件之機率思維，另一要點為考驗學生邏輯與資訊彙整，是否能正確選擇樹狀圖之分類，如表 54。

在學後測驗中，研究者發現全體 75 人中，有 44 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 7 人，使用列舉有 0 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 2 人、機率不對稱型 39 人、抽象模擬型 0 人，而錯誤繪製者有 3 人。

不過，最終可寫出題組 3（三題）正確答案之學生為 26 人。而成功以樹狀圖解題者為 22 人，其餘 4 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 22 人中，以完全做法有 22 人。其餘有 1 人發生樹枝機率錯誤，如表 55。

表 54

計算題第三題之頻率機率

題目：		
根據統計，5%的男性及0.3%的女性為色盲，中央大學的學生男女比率為2:1。假設中央大學學生的色盲分布跟全體一樣，請問從中央大學的學生中隨機挑選一人 (1) 此人是色盲女的機率為多少？ (2) 此人不是色盲男的機率為多少？ (3) 此人是色盲的機率為多少？		
認知向度	概念理解、不確定性思維的解題思考	
機率概念	頻率機率、餘事件、獨立事件	
測驗	九年級機率後測	九年級延宕測驗
全體答對率	0.6、0.39、0.43	0.42、0.31、0.35

表 55

九年級第三題樹狀圖類型統計

題號 3	對稱機率	不對稱機率	抽象化
學後	2	39	0
延宕	1	20	0

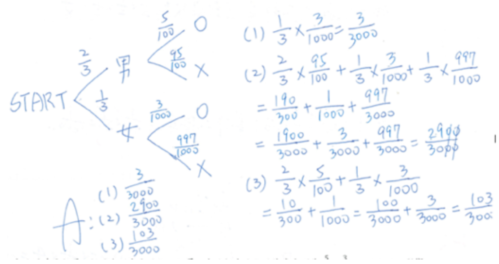
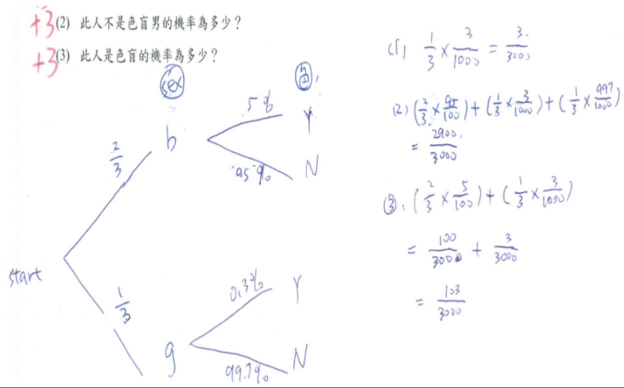
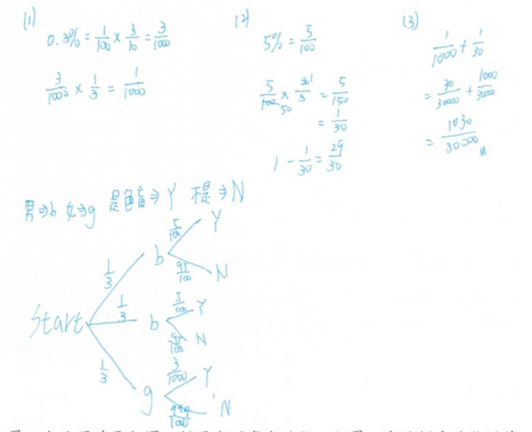
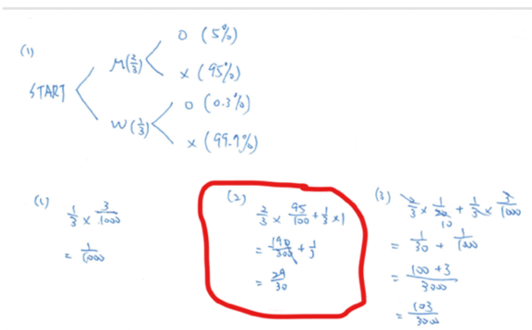
相對地，在延宕測驗中，研究者發現發現全體 81 人中，有 25 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 15 人，使用列舉有 0 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 1 人、機率不對稱型 20 人、抽象模擬型 0 人，而錯誤繪製者有 4 人。

不過，最終可寫出題組 3（三題）正確答案之學生為 19 人。而成功以樹狀圖解題者為 11 人，有 8 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題者這 11 人中，全部皆以完全做法解題。此外，沒有發生加法、乘法原理誤用或是樹枝上機率錯誤。

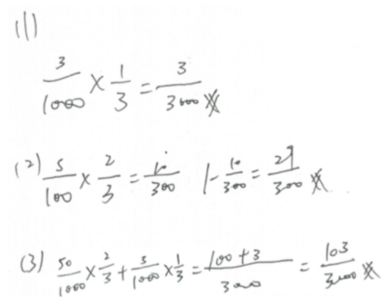
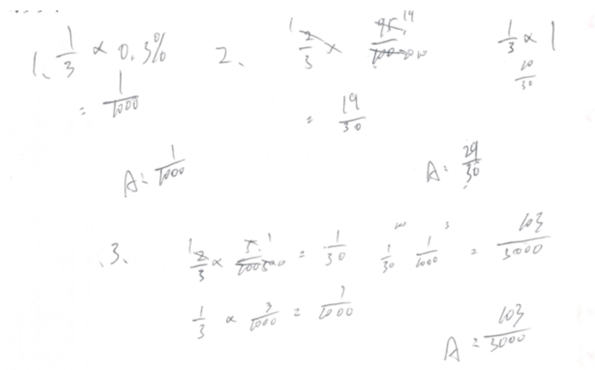
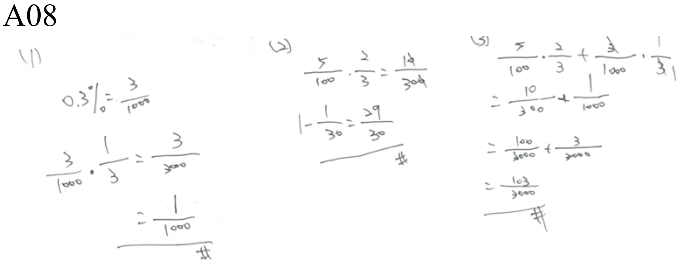
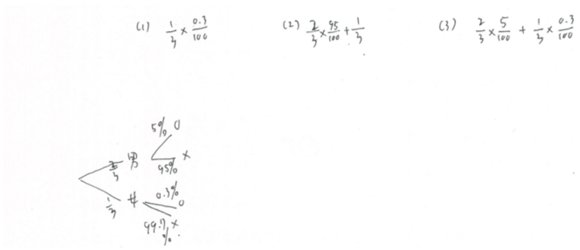
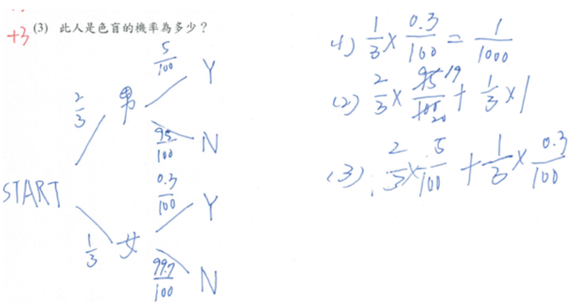
從作答文本中，研究者發現能寫出正確答案之學生，其樹狀圖繪製以機率不對稱型為主，少數有機率對稱型，如表 56。這類學生的邏輯思路相當清晰，能讀懂文字敘述，不受到成對樣本的影響。特別是第二小題與第三小題，能夠區分題目所求，不會混入其他的事件進行運算。此外，第二小題的列式亦能使用餘事件處理，展現出反向思考的能力，如表 56。

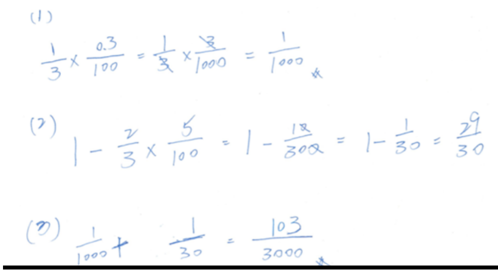
表 56

計算題第三題之樹狀圖繪製分析

九年級機率後測	
C16 	1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理
A15 	1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理
B05 	1. 機率對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 運用餘事件思維
A02 	1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理

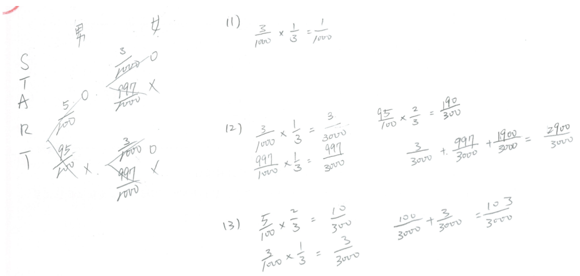
（續下頁）

B11 	1. 無樹狀圖 2. 乘法原理、加法原理之綜合運用 3. 運用餘事件思維
C07 	1. 無樹狀圖 2. 乘法原理、加法原理之綜合運用 3. 運用餘事件思維
A08 	1. 無樹狀圖 2. 乘法原理、加法原理之綜合運用 3. 運用餘事件思維
九年級延宕測驗	
A06 	1. 機率對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理
A28 	1. 機率對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理 （續下頁）

C24 	1. 無樹狀圖 2. 乘法原理、加法原理之綜合運用 3. 運用餘事件思維

此外，有 1 位學生出現了繪製錯誤的樹狀圖，但是在機率運算中，卻是正確的解題。顯示這位同學理解抽象化的機率運算思維，但在繪製樹狀圖產生樣本混淆的錯誤，如表 57。

表 57
繪製樹狀圖產生樣本混淆的錯誤

九年級機率後測
C27 

計算題第四題

第四題屬於頻率機率之條件機率，本題目標為學生能夠理解獨立事件、條件機率，並期望習得機率運算。學生除了分辨阿單、老許解出密碼之機率彼此間互不影響，且須知道處理其機率值時，可正確判斷「恰有」與「至少」，並使用何種運算符號，如表 58。

在學後測驗中，研究者發現全體 75 人中，有 52 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 6 人，使用列舉有 0 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 1 人、機率不對稱型 44 人、抽象模擬型 0 人與直立型 0 人，而錯誤繪製者有 7 人。

表 58

計算題第四題之頻率機率

題目：

阿單、老許同時要翻譯一封用密碼寫成的信，阿單、老許解出此信的機率分別為 $\frac{5}{6}$、$\frac{3}{7}$，且兩人互不影響

(1) 兩人都解出此問題的機率為多少？

(2) 兩人都解不出這封信之機率為多少？

(3) 至少有一人解出此問題的機率為多少？

(4) 恰有一人解出此問題的機率為多少？

認知向度	概念理解、不確定性思維的解題思考	
機率概念	頻率機率、餘事件、獨立事件、條件機率	
測驗	九年級機率後測	九年級延宕測驗
全體答對率	0.73、0.69、0.51、0.53	0.59、0.58、0.38、0.37

不過，最終可寫出題組 4（四題）正確答案之學生為 35 人。而成功以樹狀圖解題者為 32 人，其餘 3 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。最後，解題運算上發現，成功以樹狀圖解題者這 32 人中，以完全做法有 32 人。其餘有 2 人加法、乘法原理誤用，如表 59。

表 59

九年級第二題樹狀圖類型統計

題號 4	對稱機率	不對稱機率	抽象化
學後	1	44	0
延宕	0	34	1

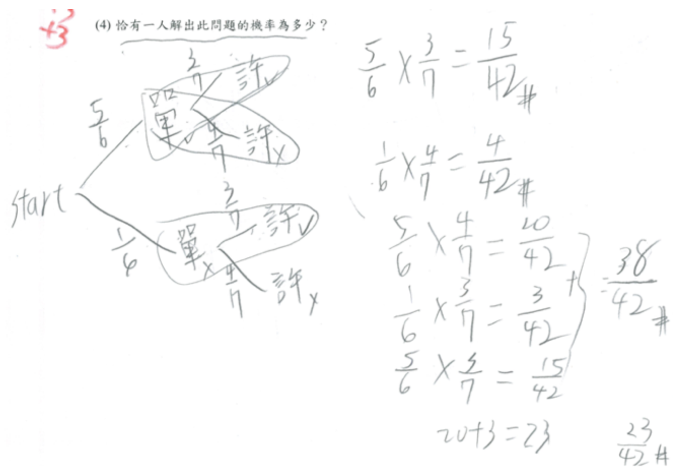
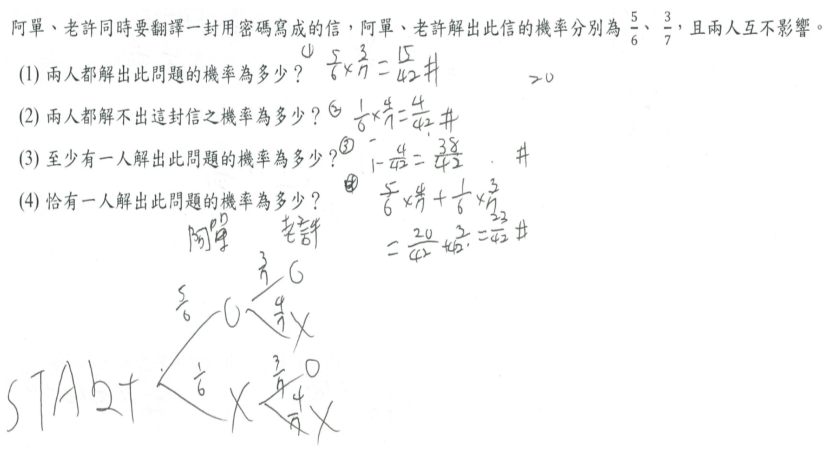
相對地，在延宕測驗中，研究者發現發現全體 81 人中，有 37 人試圖繪製樹狀圖進行解題，使用乘法原理有 6 人，使用列舉有 0 人，其餘未作答。依據樹狀圖之繪製標準可分為，機率對稱型 0 人、機率不對稱型 34 人、抽象模擬型 1 人，而錯誤繪製者有 2 人。

不過，最終可寫出題組 4（四題）正確答案之學生為 28 人。而成功以樹狀圖解題者為 25 人，有 3 人可不繪製樹狀圖，以乘法原理解題，直接使用運算符號計算機率值。最後，從樹狀圖解題模式上發現，成功以樹狀圖解題的 25 人中，全部皆以完全做法解題。此外，沒有發生加法、乘法原理誤用或是樹枝上機率錯誤。

承上述，研究者發現能寫出正確答案之學生中，其樹狀圖繪製以機率不對稱型為主，鮮少有機率對稱型。這類學生的邏輯思路相當清晰，能讀懂文字敘述，不受到兩組獨立樣本的影響。第二小題的列式需能使用餘事件處理，展現出反向思考的能力，特別是能夠區分第三小題與第四小題之題目「恰有」與「至少」所求，顯示其閱讀理解能力較佳，如表 60。

表 60

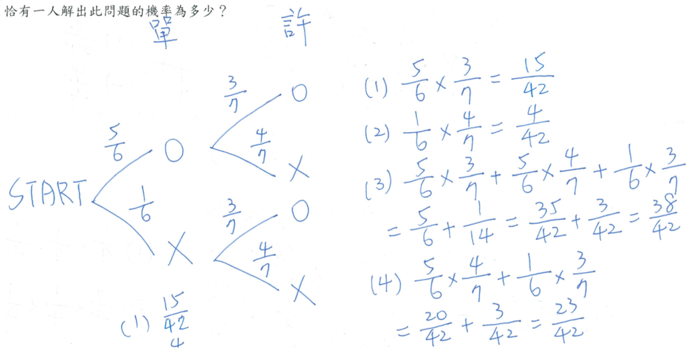
計算題第四題之樹狀圖繪製分析

九年級機率後測	
C10 	1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理
C11 	1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理 4. 運用餘事件之思維

（續下頁）

<table>
<tr><td>

C16

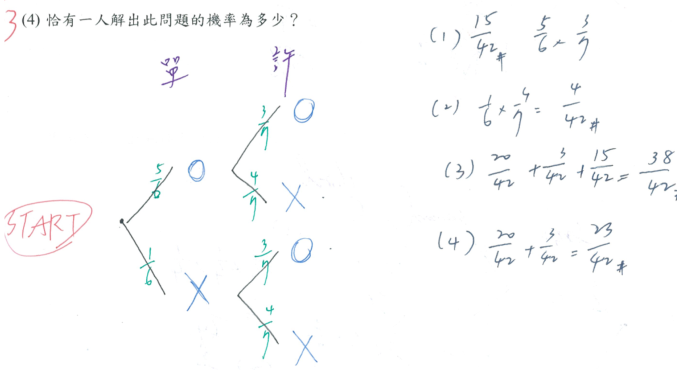


</td><td>

1. 機率不對稱型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理
3. 不同事件分別計算：同層之加法原理

</td></tr>
<tr><td>

C22

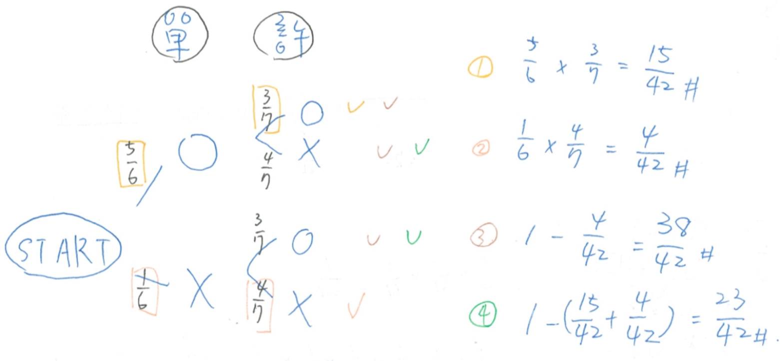


</td><td>

1. 機率不對稱型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理
3. 不同事件分別計算：同層之加法原理

</td></tr>
<tr><td>

A28

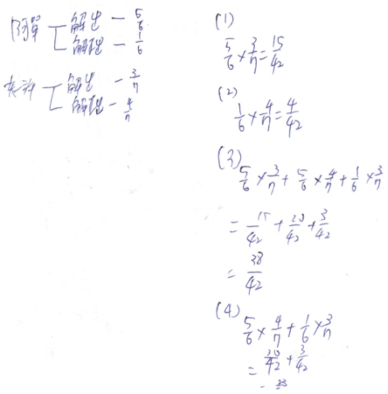


</td><td>

1. 機率不對稱型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理
3. 不同事件分別計算：同層之加法原理
4. 運用餘事件之思維

</td></tr>
<tr><td>

B02



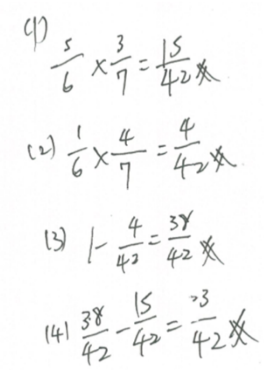
</td><td>

1. 無樹狀圖
2. 乘法原理、加法原理之綜合運用
3. 運用餘事件思維

（續下頁）

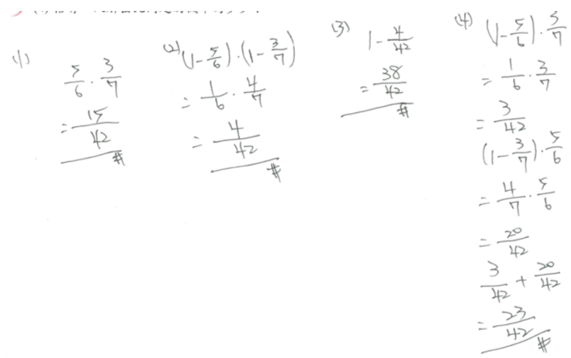
</td></tr>
</table>

B11



1. 無樹狀圖
2. 乘法原理、加法原理之綜合運用
3. 運用餘事件思維

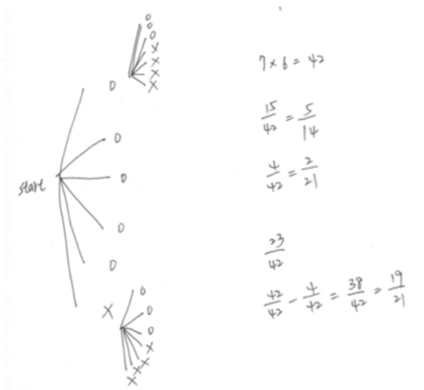
A08



1. 無樹狀圖
2. 乘法原理、加法原理之綜合運用
3. 運用餘事件思維

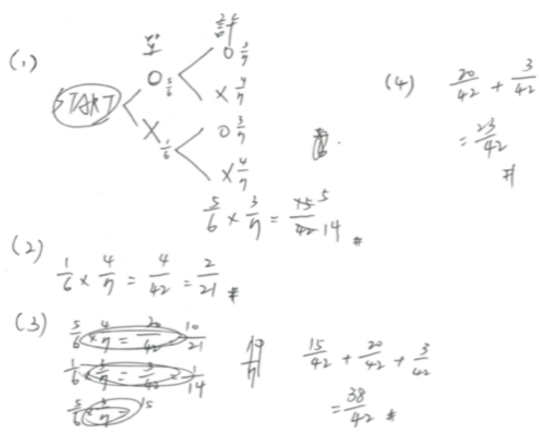
九年級延宕測驗

A30



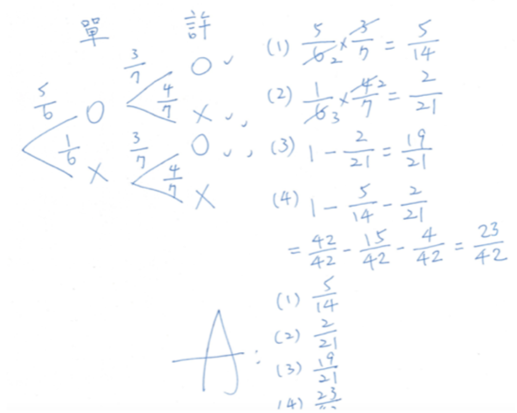
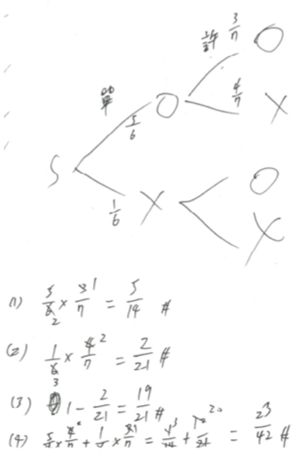
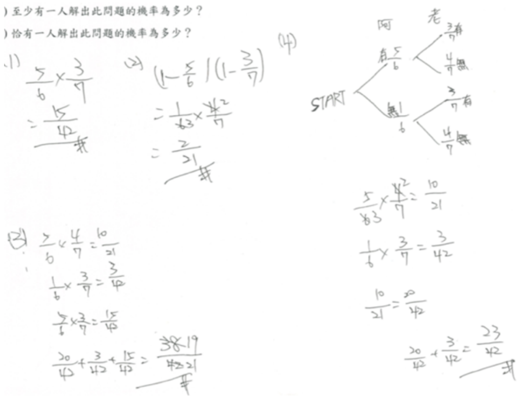
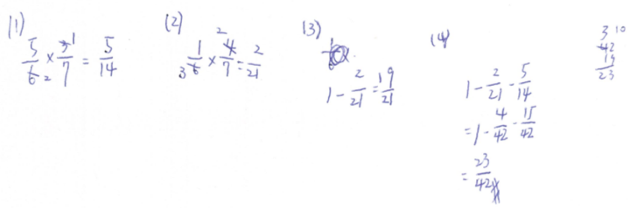
1. 機率對稱型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理
3. 不同事件分別計算：同層之加法原理
4. 運用餘事件之思維

C22



1. 機率不對稱型樹狀圖
2. 不同層樹狀圖之乘法原理
3. 不同事件分別計算：同層之加法原理

（續下頁）

C16 		1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理 4. 運用餘事件之思維
C09 		1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理 4. 運用餘事件之思維
A08 		1. 機率不對稱型樹狀圖 2. 不同層樹狀圖之乘法原理 3. 不同事件分別計算：同層之加法原理
B05 		1. 無樹狀圖 2. 乘法原理、加法原理之綜合運用 3. 運用餘事件思維

第四節 九年級學生之概念結構圖

本節為理解學生個人化的學率概念結構之探究個別化的認知結構圖和各概念的精熟度，並有效分析知識體系中的概念元素，故將學生分為高分組、中分組、低分組進行概念詮釋結構圖分析，其中 α =0.59。再者，除了探究得分相異之表現外，並考量得分相同情況下，學生真實答對題目之組合可能不同，極可能提供相異概念結構之訊息，故亦會了解得分相同者之表現，避免在分析上偏向某方。

（一）得分相異之概念詮釋結構圖

1. 高分組

研究者隨機挑選三位同學，分別為 S4、S13 及 S21，如表 61。並呈現其得分、平均精熟度與作答反應。

表 61
G9 高分組

人	得分	平均精熟度	作答反應													
S4	39	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
S13	38	0.66	2	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
S21	37	0.63	2	2	2	2	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3

S4 同學的概念階層結構圖為一層，如圖 14，即七個概念間互為等價，且精熟度皆為 1。每個概念皆互為指向關係，顯示受試者是有能力掌握並靈活應用。其能力上可比擬完全精熟且類似專家的知識結構。

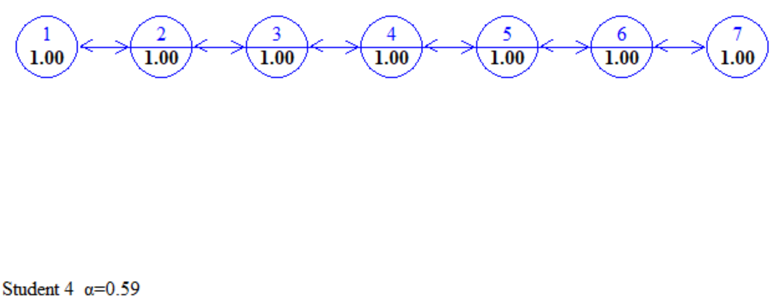


圖 14 S4 的概念階層結構圖

S13 同學的概念階層結構圖為三層，如圖 15，即概念間有階層關係。第一層為獨立性，第二層分別為樹狀圖、頻率機率，第三層分別為古典機率、餘事件、互斥和事件、條件機率。概念間的連結關係方面，獨立性是所有概念之先備概念。樹狀圖與頻率機率是餘事件、條件機率之先備概念。古典機率、餘事件、互斥和事件、條件機率間沒有指向關係。

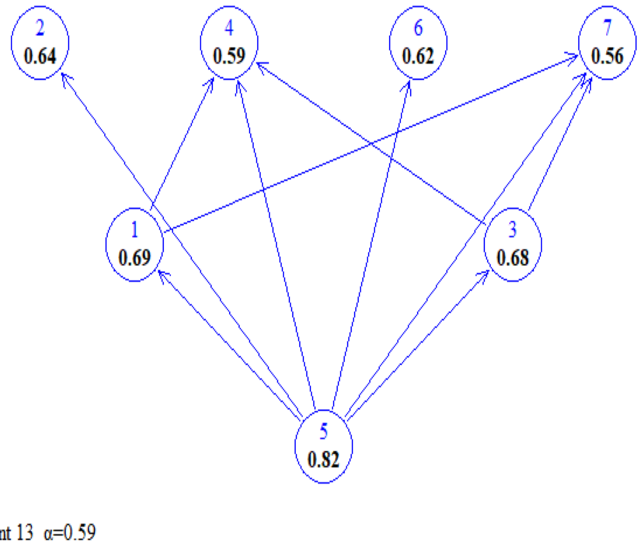


圖 15 S13 的概念階層結構圖

S21 同學的概念階層結構圖為三層，如圖 16，即概念間有階層關係。第一層為獨立性，第二層分別為樹狀圖、古典機率、頻率機率，第三層分別為餘事件、互斥和事件、條件機率。概念間的連結關係方面，獨立性是所有概念之先備概念。古典機率是餘事件、互斥和事件、條件機率之先備概念。樹狀圖是條件機率之先備概念。餘事件、互斥和事件、條件機率間沒有指向關係。

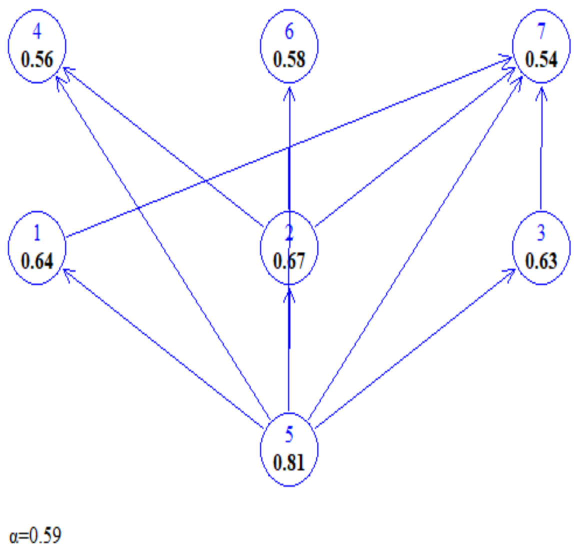


圖 16 S21 的概念階層結構圖

1. 中分組

研究者隨機挑選三位同學，分別為 S25、S34 及 S49，如表 62。並呈現其得分、平均精熟度與作答反應。

表 62
G9 一般組

人	得分	平均精熟度	作答反應													
S25	36	0.59	1	2	1	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3
S34	33	0.54	1	0	1	3	3	3	3	3	2	3	3	3	2	3
S49	23	0.52	2	2	1	3	3	3	2	3	2	2	0	0	0	0

S25 同學的概念階層結構圖為二層，如圖 17，即概念間有階層關係。第一層為樹狀圖、頻率機率、獨立性，第二層分別為古典機率、餘事件、互斥和事件、條件機率。概念間的連結關係方面，古典機率、餘事件、互斥和事件之先備概念為獨立性。條件機率之先備概念則有樹狀圖、獨立性與頻率機率。

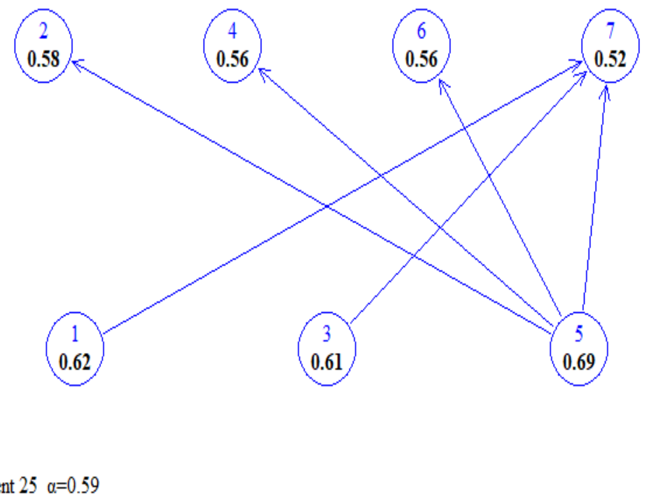


圖 17 S25 的概念階層結構圖

S34 同學的概念階層結構圖為二層，如圖 18，即概念間有階層關係。第一層為樹狀圖、頻率機率，第二層分別為古典機率、獨立性、餘事件、互斥和事件、條件機率。概念間的連結關係方面，古典機率之先備概念為樹狀圖與頻率機率。其餘概念間皆無指向關係。

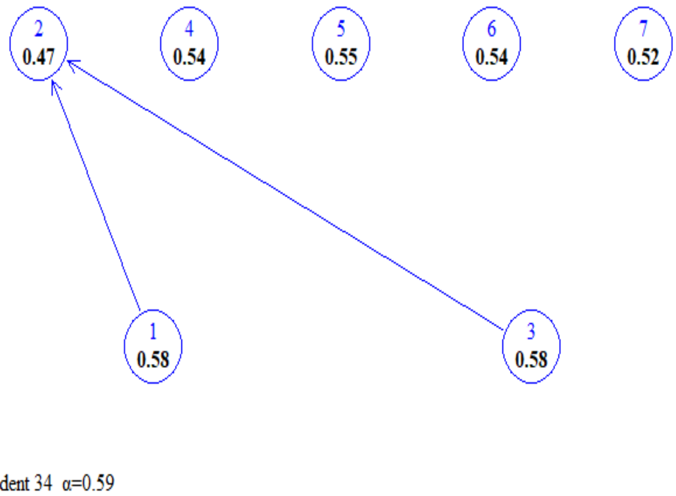


圖 18 S34 的概念階層結構圖

S49 同學的概念階層結構圖為一層，如圖 19，即概念間無階層關係。而每個概念間皆無指向關係，顯示這位學生學習上，較沒有組織機率概念。

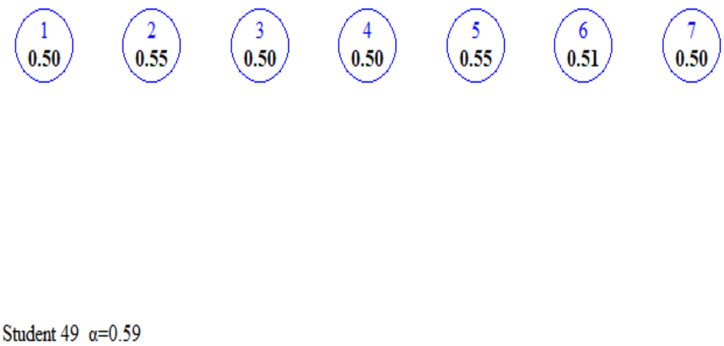


圖 19 S49 的概念階層結構圖

2. 低分組

研究者隨機挑選三位同學，分別為 S58、S62 及 S68，如表 63。並呈現其得分、平均精熟度與作答反應。

表 63

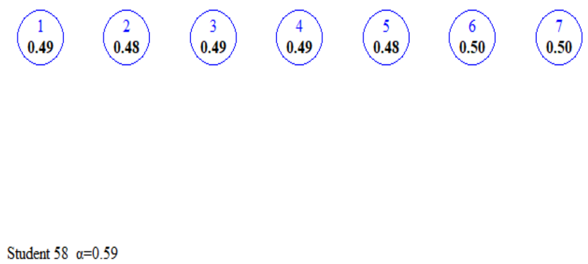
G9 低分組

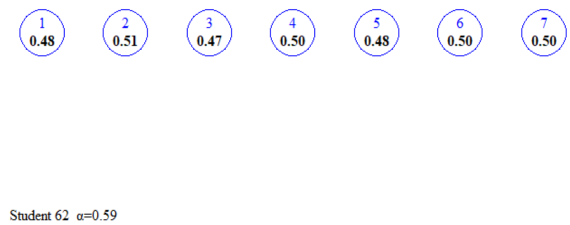
人	得分	平均精熟度	作答反應													
S58	14	0.49	1	0	1	0	0	3	2	1	1	1	1	1	1	1
S62	10	0.49	1	1	2	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S68	3	0.49	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

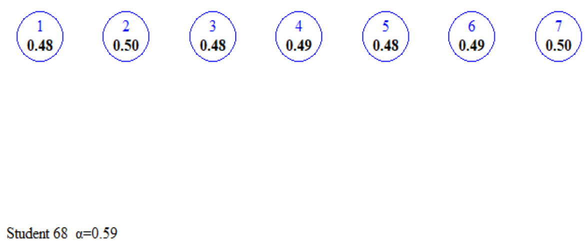
S58、S62 及 S68 同學的概念階層結構圖為一層，即概念間無階層關係。而每個概念間皆無指向關係。三者差異僅是每個概念間精熟度，但差異不大。顯示這位學生學習上，較沒有組織機率概念，且也不熟悉內容，如表 64。

表 64

低分組之概念階層結構圖







（二）得分相同之概念詮釋結構圖

1. 高分組

研究者隨機挑選兩組得分相同之同學，分別為 S13、S18，以及 S19、S21。表 65 呈現其得分、平均精熟度與作答反應。

表 65

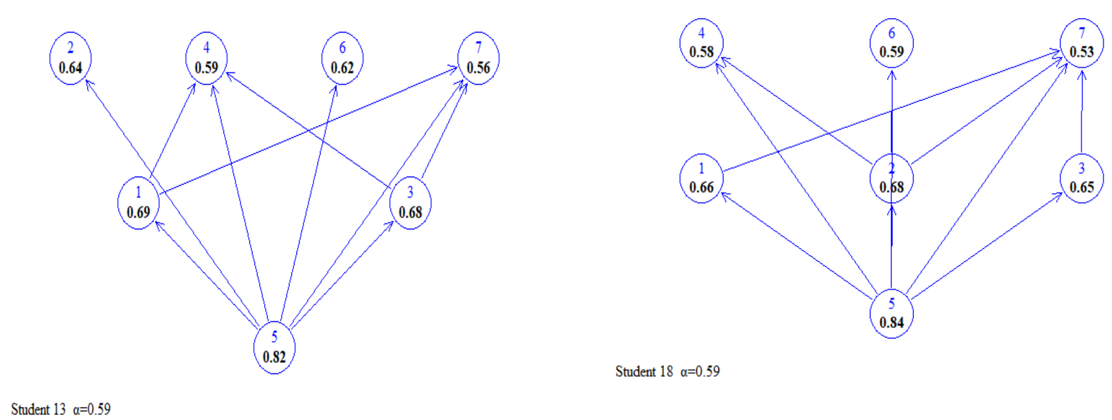
G9 高分組

人	得分	平均精熟度	作答反應													
S13	38	0.66	2	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
S18	38	0.65	2	2	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
S19	37	0.61	0	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
S21	37	0.65	2	2	2	2	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3

第一、得分皆為 38 分。S13 同學如頁 84 所述，而 S18 的概念階層結構圖為三層，即概念間有階層關係。第一層為獨立性，第二層分別為樹狀圖、古典機率、頻率機率，第三層分別為餘事件、互斥和事件、條件機率。概念間的連結關係方面，獨立性是所有概念之先備概念。樹狀圖、古典機率與頻率機率是條件機率之先備概念。古典機率、獨立性是餘事件、互斥和事件之先備概念。如表 66。

表 66

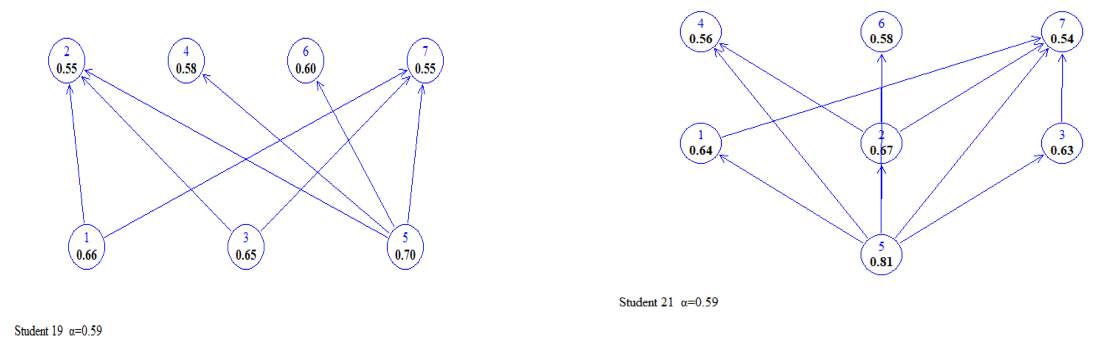
得分皆為 38 分之概念階層結構圖



第二、得分皆為 37 分。S21 如頁 84 所述，而 S19 的概念階層結構圖為二層，即概念間有階層關係。第一層為樹狀圖、頻率機率與獨立性，第二層分別為古典機率、餘事件、互斥和事件、條件機率。概念間的連結關係方面，獨立性是古典機率、餘事件、互斥和事件、條件機率之先備概念。頻率機率是古典機率、條件機率之先備概念。樹狀圖是古典機率、條件機率之先備概念。如表 67。

表 67

得分皆為 37 分之概念階層結構圖



1. 中分組

研究者隨機挑選本組得分相同之同學，分別為 S28、S29 及 S31，如表 68。並呈現其得分、平均精熟度與作答反應。

表 68

G9 一般組

人	得分	平均精熟度	作答反應													
S28	35	0.56	0	0	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
S29	35	0.6	2	2	2	3	3	3	2	3	2	3	3	3	2	2
S31	35	0.58	1	1	2	3	3	3	2	3	2	3	3	3	3	3

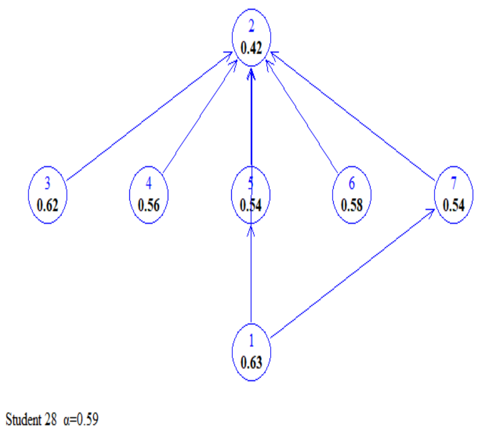
本組得分皆為 35 分。S28 同學的概念階層結構圖為三層，即概念間有階層關係。第一層為樹狀圖，第二層分別為頻率機率、餘事件、獨立性、互斥和事件、條件機率，第三層為古典機率。概念間的連結關係方面，樹狀圖是古典機率、獨立性與條件機率之先備知識。古典機率概念之先備概念則涵蓋所有概念。

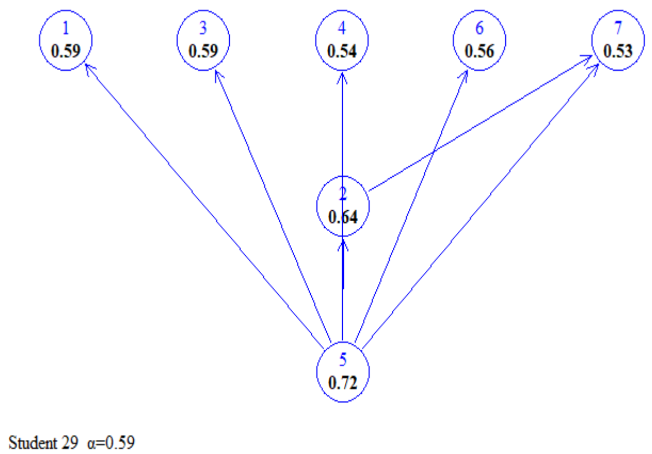
S29 同學的概念階層結構圖為三層，即概念間有階層關係。第一層為獨立性，第二層為古典機率，第三層分別為頻率機率、餘事件、獨立性、互斥和事件、條件機率。概念間的連結關係方面，獨立性是所有概念之先備知識。而條件機率、餘事件之先備知識還需有古典機率。

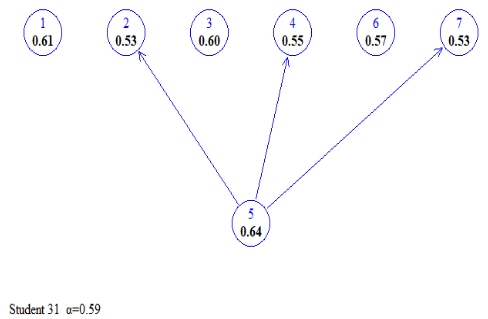
S31 同學的概念階層結構圖為二層，即概念間有階層關係。第一層為獨立性樹狀圖，其餘概念皆在第二層。概念間的連結關係方面，獨立性為古典機率、餘事件與條件機率之先備知識，其餘概念皆無指向關係。如表 69。

表 69

得分皆為 35 分之概念階層結構圖







2. 低分組

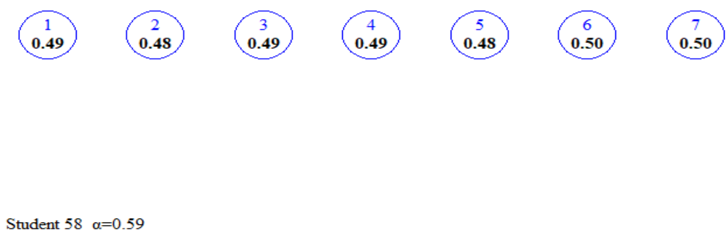
研究者隨機挑選本組得分相同之同學，分別為 S58 與 S60，如表 70。並呈現其得分、平均精熟度與作答反應。

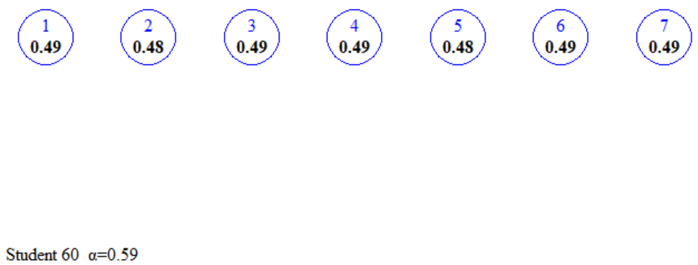
表 70
G9 低分組

人	得分	平均精熟度	作答反應													
S58	14	0.49	1	0	1	0	0	3	2	1	1	1	1	1	1	1
S60	14	0.49	1	0	0	2	2	1	1	3	2	2	0	0	0	0

本組得分皆為 14 分。S58、S60 同學的概念階層結構圖為一層，即概念間無階層關係。而每個概念間皆無指向關係。兩者差異僅是每個概念間精熟度，但差異不大。顯示這位學生學習上，較沒有組織機率概念，且也不熟悉內容，如表 71。

表 71
得分皆為 14 分之概念階層結構圖





綜上所述，研究者統整各分組結果，進行比較後發現幾項機率學習之要素，並可提供給教學者與學習者注意。第一，樹狀圖與獨立性可謂是學習九年級機率課程中最必須清楚了解之基礎概念。第二，表現較好的同學，其機率概念間指向性越多，其概念間之使用也靈活，能有效組織機率知識。第三，低分組同學對於任何一項機率概念皆不精熟，且其概念階層結構圖僅一層，在機率學習上無法有效應用機率概念。

另一方面，從得分之異同之面向也可發現。第一，得分不同之高分組、一般組同學之概念階層結構圖有其差異性，但同組間於機率概念之精熟度卻是雷同的。這樣的數據資料，顯示機率概念精熟度與得分表現具有關聯性。第二，得分相同但作答反應組型不

同之高分組、一般組同學之概念階層結構圖亦有其差異性。此數據資料則顯示，若僅根據同學之得分做評斷，並無法呈現出同分者間實際的概念認知結構，因而可能忽略機率學習上不同的困難與理解盲點。

第五節 討論

前面四節所呈現之結果，本節將分為兩小節進行討論。其一為八、九年級機率課程之成效，其二為樹狀圖錯誤類型之統整。

（一）八、九年級機率課程之成果展現

八年級學生後測與延宕測驗中，樹狀圖使用上之比例下降，可見因時間因素，學生在遭遇不確定事件下，解決問題時可能較難直覺聯想到樹狀圖。還有部分學生在延宕測驗的現場表示，已經遺忘樹狀圖是什麼？或是忘記如何繪製樹狀圖。但兩測驗平均分數統計上未有顯著差異，研究者推測是八年級之測驗題目亦可使用列舉解決，以及些少同學有使用乘法原理的能力，故使得延宕測驗沒有退步、亦沒有進步。樹狀之解析中，亦可發現學生在樹狀圖之使用上學後與延宕測驗中差異不大。顯示多數研究對象仍具備學習《許氏機率 II》之先備基礎，如表 72。

表 72
八年級機率測驗之解題策略

八年級測驗		學後	延宕
總人次		555	525
正確總人次		206	202
解法種類	乘法原理	15	25
	列舉	13	51
	樹狀圖	178	126
樹狀之解析	僅用勾選法	120	110
	樹枝機率與勾選法	56	8
	逐步解析之完整做法	2	8

類似地，九年級學生後測與延宕測驗中，樹狀圖使用上之比例下降，而乘法原理使用之比例約一成，如表 73。研究者推測學生在遭遇不確定事件下，儘管有一年多的學習經驗，但練習量較少、不敵時間因素，較不易直覺聯想到樹狀圖。同樣有多數學生在延宕測驗的現場表示，已經遺忘或忘記如何繪製樹狀圖。而僅使用乘法原理解題者在答題上，容易犯下遺漏事件之結果數，相對於樹狀圖使用者，題目答對率稍低。上述研究者推測是延宕測驗平均分數低於學後測驗，且統計上達顯著差異之因。

表 73

八年級機率測驗之解題策略

九年級測驗		學後	延宕
總人次		300	324
答題正確總人次		148	113
解法種類	乘法原理	20	19
	列舉	0	3
	樹狀圖	128	91
樹狀之解析	僅用勾選法	1	0
	逐步解析之完整做法	127	91

另一方面，從九年級學生之概念結構圖中，可知樹狀圖與獨立性是學習九年級《許氏機率 II》中最基礎之機率概念。這將是發展高層次機率概念之重要因素，必須在教材設計上作為優先考量。且命題或是活動編寫上以樹狀圖與獨立性作為主軸，進而推論發展到貝氏機率等高層次機率知識。不過，值得注意的是，研究者亦發現學生容易出現「獨立性與極端事件之相互干擾」。當學生在解讀新訊息時，其注意力轉換到理解文字敘述上，此時思維易受到自身經驗之干擾，例如認為多次試驗中極小、極大的事件較難發生，因而遺忘獨立性的概念。故在教學、教材上應有提供學生類似的案例思考，將有助於解決在機率知識上的困難與盲點。

（二）樹狀圖錯誤類型之統整

研究者根據在教學現場和九年級測驗中得到的回饋，提出樹狀圖錯誤類型，如表 74，用以改善《許氏機率 I、II》文本內容可能太過簡化，導致學生學習上之困難，以及教學上教師應加強和注意之處，分列如下。

表 74

九年級機率測驗之錯誤類型

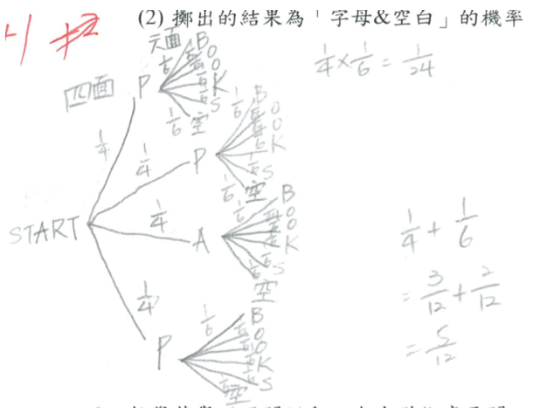
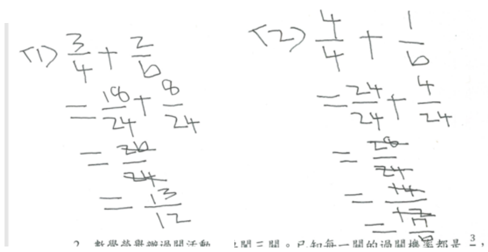
九年級測驗		學後	延宕
總人次		300	324
錯誤總人次		152	211
有答題之人次		21	33
未答題、空白者之人次		131	178
有答題之錯誤類型	加法、乘法原理誤用	5	21
	成對、獨立樣本混淆	13	7
	樹枝上機率誤植、遺漏題目條件	3	5

1. 無法聯結樹狀結構之同層相加、不同層相乘之規則

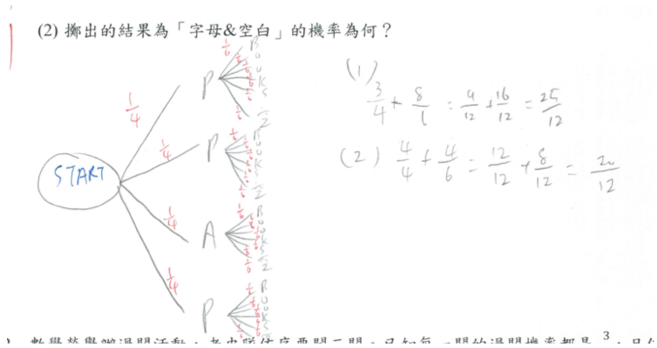
學生容易出現的混亂是，可以正確繪製樹狀圖，且知道計算機率時可以使用之運算符號狀態下，因文字語意與機率語言間未能聯結，導致判斷加法、乘法原理時之誤用。如三道闖關活動中，連續三次都成功之機率。因將機率語言之「連續」視為「總共」導致使用加法，但正確應是「也、亦」。還有，研究者也發現有學生無法理解「恰有」與「至少」之語意，如表 75。上述皆顯示學生反向概念的逆命題思維相當不穩定，推測可能其語文能力，影響機率解題。

表 75

無法聯結樹狀結構之同層相加、不同層相乘之規則之錯誤範例

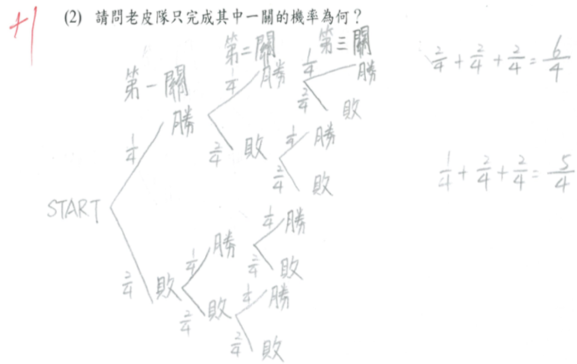
九年級機率後測	九年級延宕測驗
第一題	
B26 	B09 

（續下頁）

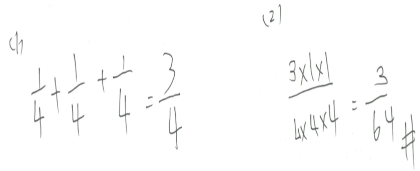


第二題

B26

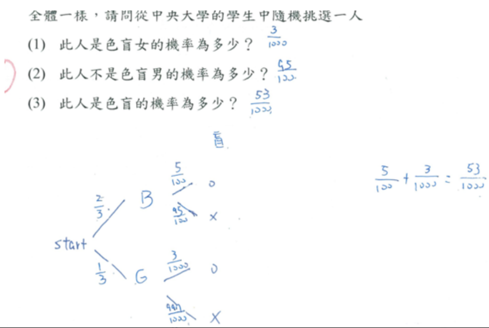


C12

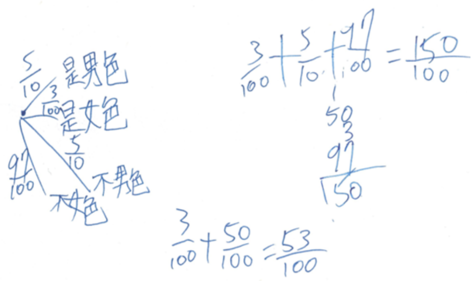


第三題

A26

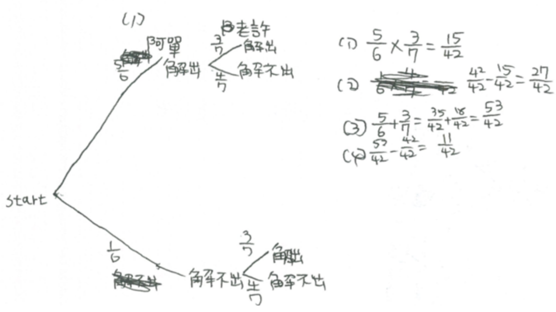


B23

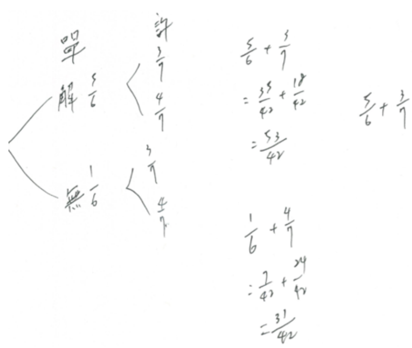


第四題

A07

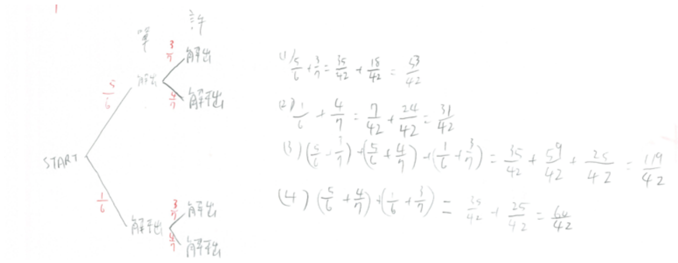


B22



（續下頁）

B07

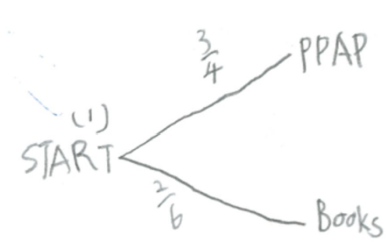


2. 多組獨立、成對樣本間之樹狀圖轉換

這是文字語意的轉換為機率思維的混亂，學生對於分辨多組的獨立、成對樣本產生困難，樣本越複雜化時，學生能成功辨識、歸類的難度越高，導致無法建立正確的樣本空間，如表 76。研究者特別注意到第三題題答對率為整券中最低，發現這困難源自無法判斷「如何分類兩組成對樣本」，導致繪製錯誤的樹狀圖。儘管多數人曾願意嘗試樹狀圖來解決問題，但錯誤率相當高。

不過，以列舉之數對呈現時，錯誤比例下降不少，但列舉較不適用於處理複雜化樣本空間之計算。因此，在教學上必須能提供更多練習機會，讓學生建立如何處理複雜樣本的能力。例如，同一情境下、練習組織不同比例之組別，其參與某項試驗、檢測之邏輯。將有利於高中階段排列組合之學習。

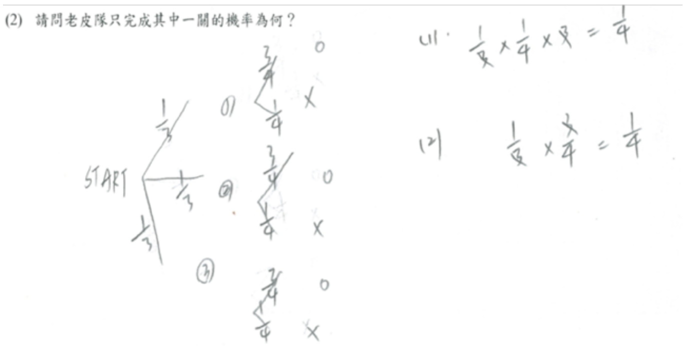
表 76
多組獨立、成對樣本間之樹狀圖轉換之錯誤範例

九年級機率後測	九年級延宕測驗
第一題	
B13 	

（續下頁）

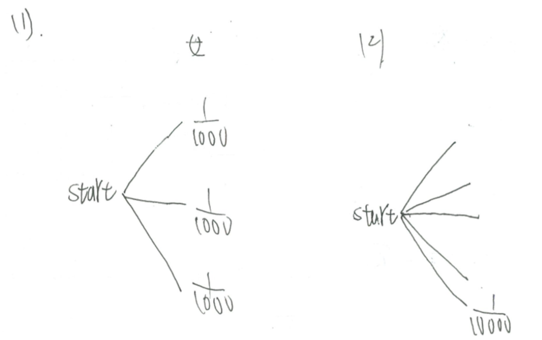
第二題

B24

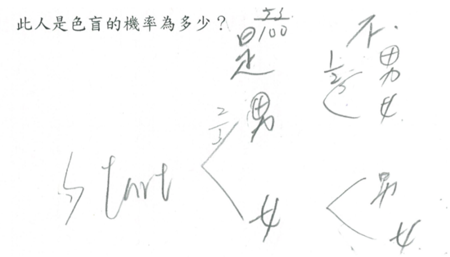


第三題

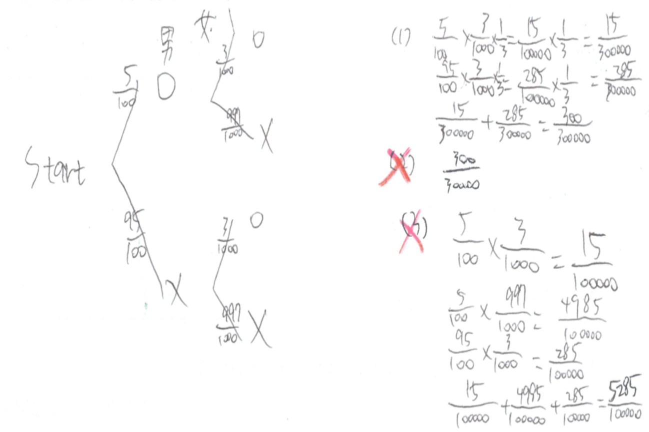
A29



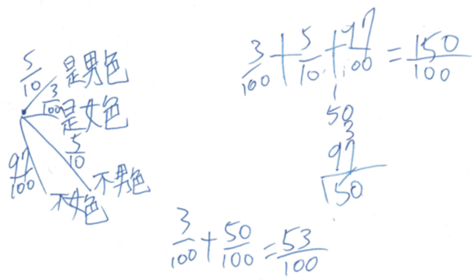
B18



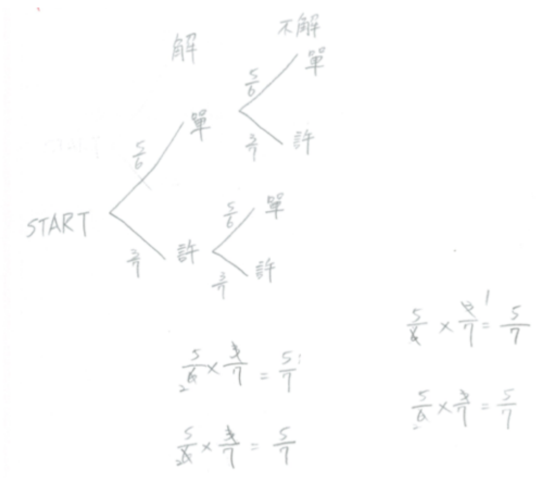
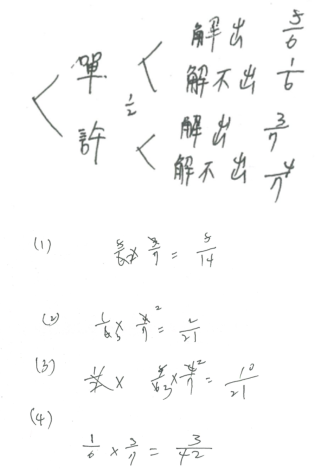
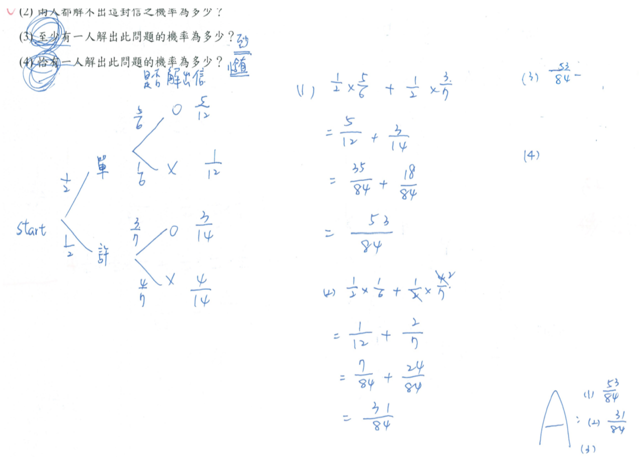
A14



B23



（續下頁）

第四題	
B26 	A18 
A19 	

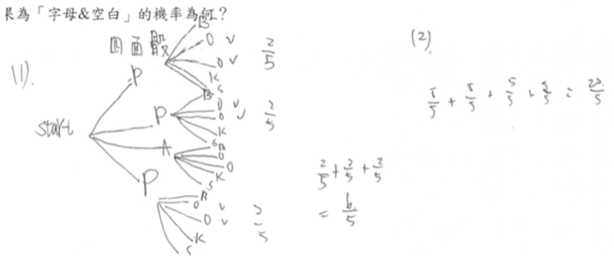
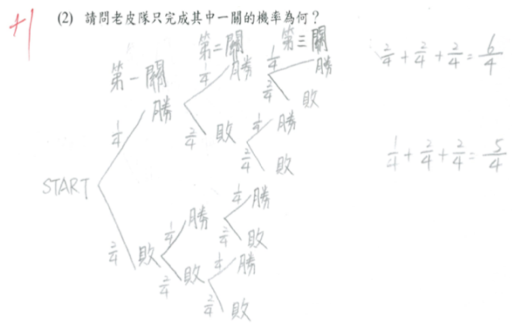
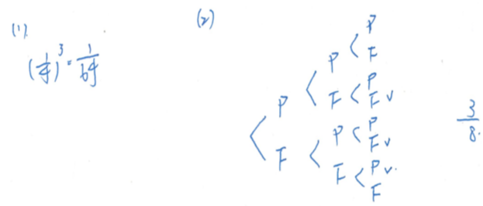
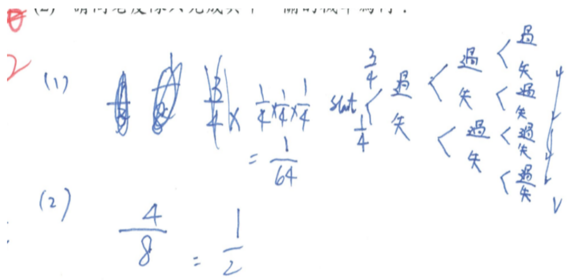
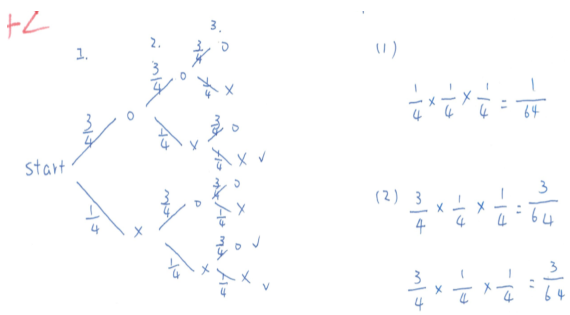
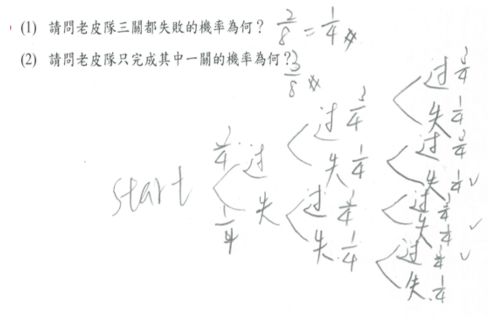
3.　樹狀圖上機率之誤植、或解題時遺漏題目所求之條件

學生在解讀題意後，能正確繪製不對稱型之樹狀圖，但樹枝上之機率卻以公正機率值表示，而非題目敘述之機率值。同時也忽略連結樹狀結構中，同節點之樹枝分枝和應為 1 的概念，如表 77。由此可見，學生雖學過機率課程，但在面對圖形時，還是會受到直觀感受之干擾，導致遺忘題意之敘述。研究者認為可能每個人的生活經驗、國小學習分數之因，使得平分、均等的概念根深蒂固。

如第二題，學生能成功繪製樹狀圖，但文字語意卻無法理解「只完成其中一關」的所有組合，僅列出（成功，失敗，失敗）一種。最後，這是出現在第二小題的錯誤類型。學生未能聯接題意至主要題幹，將機率值與樹狀圖結合，導致計算機率值以$\frac{1}{2}$來做運算。

表 77

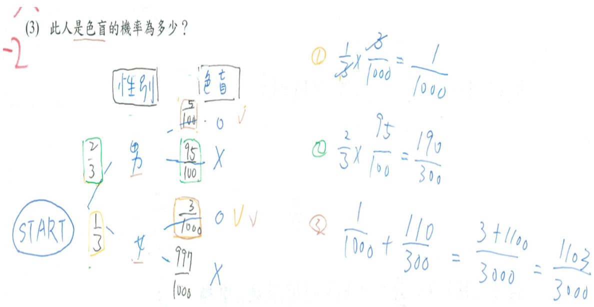
樹狀圖上機率之誤植、或解題時遺漏題目所求之條件之錯誤範例

九年級機率後測	九年級延宕測驗
第一題	
A29 	
第二題	
B26 	A02 
A18 	A18 
A26 	B18 

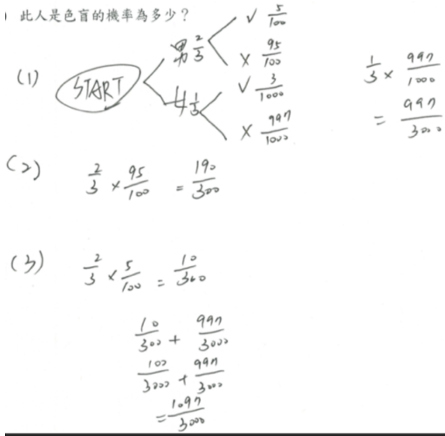
（續下頁）

第三題

A28

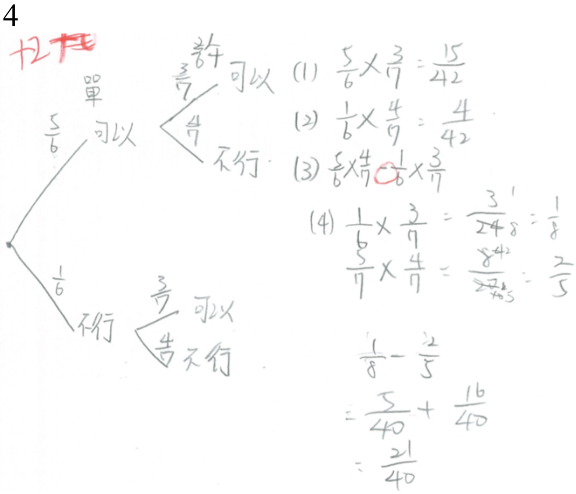


C22

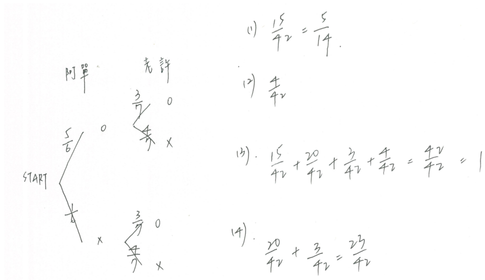


第四題

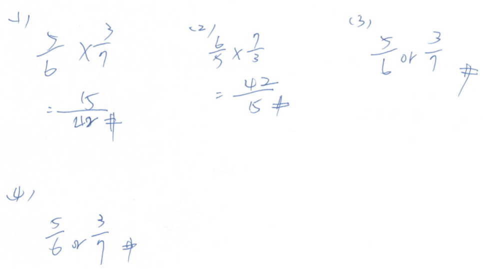
B14



B24



C12



第五章 結論與建議

本研究目的在於可否設計出適用於八、九年級學生，且能綜合介紹古典機率、主觀機率與頻率機率相之教材與其後續機率內容，以提升國中階段不確定性的素養。且以「樹狀圖」作為機率學習之主要工具下，學生是否能運用三種機率觀點與樹狀之結構中，理解基礎與進階之機率概念、並解決機率問題。同時，驗證機率課程之學習適切性、學生進展表現及保留效果，建立一套國中機率新課程。最後，探討學生在接受八、九年級的機率實驗教學課程，是否存在迷思或錯誤的類型，以及遭遇哪些困難點。

由於上述之問題，是過去的研究回顧中，較為缺乏之議題，故希冀透過本研究所獲得的結論與建議進行探討，共分兩節。第一節將依據研究目的與待答問題，統整與歸納出結論；第二節將根據研究發現，提供數學教育領域以及未來機率教學與學習發展相關研究之建議。

第一節 結論

本研究之結果可知，研究團隊所設計之《許氏機率 I、II》教材適切性符合學生年齡之認知發展。使學生單純在課堂中學習，沒有任何複習、回家作業下，依然有預期之學習成效。且藉由樹狀圖在機率知識脈絡上解釋機率事件之狀態（互斥性），確實可使學生不需要先學習數學之集合概念，即可進行單一事件、餘事件學習，更可達到「獨立性」與條件事件」等較高層次之機率概念學習，可有效提升學生不確定性素養。

本研究經比對機率之運算技術而言，亦驗證機率之適學年齡可由八年級開始，包含主觀機率、頻率機率和古典機率，且能以樹狀圖之勾選法為機率解題技術工具，更重要的是九年級的同學可達到處理餘事件、獨立性、條件機率之層次，以及使用完整樹狀圖法結構為解題模型。

再者，樹狀圖作為解決機率問題時，學生可以用視覺觀察到樹狀結構之同層相加、不同層相乘之規則。使得在處理獨立性、條件機率之問題時，能夠在樹狀結構中自然的聯想加法、乘法原理的使用方式，不再感到疑惑。特別是，藉由樹狀圖亦提升學生之機率抽象思考與機率語言的表達。研究者發現能善用口語、數學語言表達機率概念者，在對面問題時，可以口說引導至運算符號使用。過往的學習經驗，多為文字與數學符號敘

述概念，顯得相當抽象。但樹狀圖則是以圖形詮釋、解說概念，使其機率概念從抽象思維轉變為具體化。對此，學生可以減輕機率學習之認知負荷，使其能投入機率的學習中，不感到排斥。

此外，學生練習解說樹狀圖各項結構時，透過口語的表達建立機率概念，再精煉到以數學語言敘述。同時，也能夠拓展學生對於反向邏輯「餘事件」、「至少」的認知。這是一項很重要的反向邏輯培養，在高中階段、甚至是大學的機率命題常常需要使用。但對於樹狀結構觀念不穩定者、文字閱讀理解低落者而言，則會出現思維混亂，反而無法解出正確答案。

然而，《許氏機率 I、II》以樹狀圖作為解決機率問題亦有其劣勢之處，例如獨立性、條件機率等問題之敘述較複雜，尚需要加強學生在文字閱讀、理解之練習。以及如何解決學生在使用樹狀圖工具之迷思等等。研究者亦歸納其迷思與改進，如下說明。

第一、生活經驗、直觀感受之干擾

在機率概念不穩固的學生中，我們發現他們在判斷題意時，雖有學習過題目中所需之機率概念，但在答題時，卻以自身經驗、直觀做抉擇。

第二、機率值誤植與運算規則之混淆

學生在解讀題意時，未能聯結文字語意與機率語言間的關係，導致機率值誤植，以及判斷加法、乘法原理時之誤用。學生雖可正確繪製樹狀圖，但在不對稱型之樹狀圖中，學生卻以公正機率值表示樹枝上之機率，而非題目敘述之機率值。再者，未能應用樹狀結構給予的圖形提示，僅關注在樹狀圖最後的結果，使得無法判斷機率運算。

第三、文字理解與繪製多組獨立、成對樣本樹狀圖之轉換

教學實驗中，學生對於辨識、歸類多組的獨立、成對樣本產生困難，導致無法建立正確的樣本空間。此迷思之雛形在許芷雲（2019）也可見到，但到了不對稱之樹狀圖時，處理複雜化樣本空間之計算更顯嚴重。

另一方面，本研究亦有一項發現，從九年級學生之概念結構圖中，可知樹狀圖與獨立性是學習進階機率概念之重要因素，呼應 Watson（2005）的研究文獻，指出複合事件需要伴隨獨立事件的概念。而樹狀結構之互斥性即是獨立性概念之圖象表徵。如九年級

測驗中計算題第三題之答題表現，將進而影響解決貝氏機率等高層次機率知識的能力。樹狀圖並非單以一個解題工具而存在，而是牽連獨立性等概念建立之關鍵。故在教材設計上必須以「樹狀圖」作為命題考量，且命題或是活動編寫上以「獨立性」為根基。

綜上所述，研究者所發展之《許氏機率 I、II》教材符合國中八、九年段使用，且符合學生年齡之認知發展，並在實際課程中受到喜愛，確實可作為示範機率教材。相對現行課程，確實突破過去制式的學習、僅著重古典機率等。不過，相依事件、條件機率等問題之敘述較複雜，尚需要加強學生在文字閱讀、理解之練習。而貝氏機率的概念雖可用樹狀圖來理解，但在本研究之九年級學生來說，仍有一定理解上的難度，需要給予聯結性更強的活動，進行實際練習。

第二節 建議

根據本研究的結果，對於教學實務面與未來研究提出相關的建議。

（一）課程實施面向

首先，研究者建議我國課綱確實可以對國中階段之機率課程進行調整，除了可以提前安排至八年級，而餘事件、獨立性、條件機率亦可在九年級實施。但需要注意的是，所有的機率內容都應建構在樹狀圖為主的教材，排除交集事件的問題。遭遇抽象機率運算時，應引導學生以樹狀圖作思考，不宜直接進行機率的運算。

再者，教學層面中，研究者建議課室中應以分組進行教學，讓學生浸漬在組別的競爭氣氛中，以增進其學習態度。教學中，教師須著重在概念的建立與澄清錯誤，故應讓學生有口語詮釋、解釋機率概念的機會，藉此不但可釐清自我經驗、直觀感受之干擾，更可提升其文字理解與機率概念之關聯性，使其活化各機率概念之思維

此外，必須讓學生通透樹狀圖之結構，不僅僅是繪製，更需要能口語解說每一層、每一節點之意義，方可使學生真正理解樹狀圖中同層相加、不同層相乘之規則。尤其是不對稱機率之問題時，常因複雜的資訊，樹枝上之機率值變化多，導致學生學習上受到阻礙。還有在不對稱行樹狀圖單元時，需先從提供多種樹狀圖結構，讓學生進行口語詮釋能力之練習，再讓學生進入繪製樹狀圖。另外。應先導入分類、歸納樣本之練習，並要同學以自身經驗舉例，而非直接讓學生閱讀題目後繪圖、解題。

最後，在教材內容層面中，研究者建議以「生活經驗」連結機率概念，多設計不同情境之例題，讓學生可真正活用機率知識。再者，設計教材內容時，也須著重設計加強學生閱讀理解、文字語意的文本，讓學生從文字敘述連結機率知識。此舉可提升學生對於樣本空間的釐清與建立，使其能成功繪製樹狀圖。更關鍵的是，可增加反向邏輯思考的字句連結到機率知識，這是在數學教科書中缺少的練習。最後，教材內容的主軸不以問題、例題為教學導向，應以活動探究機率知識，增加文本與學生之互動性。

（二）研究面向

本研究針對八年級學生進行機率教學實驗，僅驗證出八年級後之學生有學習之能力，且到九年級時，可以學到餘事件、獨立性與條件機率之層次。但近年數據分析的崛起，牽涉其基礎即是機率，加上機率亦是生活經驗中經常遇到的問題。因此，研究者認為未來可以更低的年級來嘗試，例如針對七年級的試驗，了解臺灣學生機率知識之適學年齡，提升國中階段之「不確定性」素養。

再者，本研究之課程設計為一套結合「知、行、識」之模組。目前僅針對機率課程進行研發，往後亦有調整之空間。特別是本研究釐清之機率迷思的部分，需要針對內容進行調整與補充。而研究者亦發現互動式的文本，可增進學生在課堂之投入，而非傳統之講述式。因此，研究者建議《許氏機率 I》與《許氏機率 II》未來可以作為欲進行教學實驗者作為研發國中階段所有的數學內容之板模，讓數學教科書、數學文本的層次轉化到另一水平。

最後，本研究所提出之樹狀圖作為解決機率問題之工具，這與學生學習數學之經驗有相當不同。過去的數學課程主要是紙筆運算，沒有透過圖形解釋數學概念。雖然在八、九年級的實驗比較中可知以樹狀圖理解、解決機率問題為主的實驗組表現較佳，但不同的學習經驗亦使學生發生了樹狀圖之迷思概念。因此，研究者建議可以再探討教材設計、教學解說上如何將數學概念與圖形做更適當的連結，以及探究這些迷思應如何消除？並結合文本設計，提出更穩健的以圖形學數學之基礎。

參考文獻

中華人民共和國教育部（2011）。**數學課程標準**。北京市：北京師範大學出版社。

日本文部省（2010）。**中學校學習指導要領**。東京：文部省。

江孟聰（2011）。國小五年級學童幾何概念階層之概念詮釋結構模式分析。未出版之碩士論文，臺中教育大學，臺中市。

呂秀茹、洪文良、林原宏（2009）。結合 SCM 與 CAISM 分析國小五年級學童時間化聚計算概念。**第一屆科技與數學教育學術研討會論文集**，325-334。

呂溪木（2007）。**民國 75 年之前我國數學課程演變**。論文發表於國立臺灣師範大學舉辦之「吳大猷先生百歲冥誕科學教育學術研討會─我國近五十年之科學教育發展研討會」，臺北市。

李岳霞（2015）。教孩子堅持不放棄！玩桌遊 5 大益處。**親子天下雜誌電子報，69。** 取自 http://www.parenting.com.tw/article/506 7838-教孩子堅持不放棄！玩桌遊 5 大益處/?page=1

李源順（1994）。機率與統計教學研究的文獻探討。**國立僑生大學先修班學報**，**2**，313-352。

林秀燕（2004）。以圖示策略融入低年級教學對改變類及比較類加減法文字題學習成效之研究。未出版之碩士論文，國立屏東師範學院，屏東縣。

林原宏（2005）。模糊取向的詮釋結構模式之概念結構分析與應用。**教育與心理研究**，**28**，161-183。

林原宏（2010）。多元計分概念詮釋結構模式。**教育研究月刊**，195，121-124。

林原宏、莊惠雯、易正明（2009）。教師對於學童數學概念之知識管理整合方法-概念詮釋結構模式與分群在時間概念之分析應用。**管理科學與統計決策**，**6**（1），45-58。

林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。**十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究報告**（計畫編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12）。新北市：國家教育研究院。

林燈茂（1992）。11-16 歲學童之「相對差異」與「大數法則」概念初探。未出版之碩士論文，彰化師範大學，彰化縣。

教育部（1972）。國民中學課程標準。臺北市:正中書局。

教育部（2008）。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。取自 http://teach.eje.edu.tw/data/files/class_rules/math.pdf

教育部（2014）。十二年國民基本教育課程綱要總綱。臺北市:作者。

教育部（2016）。**十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要（草案）**。臺北市：作者。

教育部（2018）。**十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要**。取自 https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/49/pta_17220_2245818_14826.pdf

許天維、林原宏（1994）。詮釋結構模式（Interpretive Structural Modeling）的理論與應用簡介。**國教輔導，34**（1），31-35。

許芷雲（2019）。八年級機率新課程：設計與實踐。未出版之碩士論文，中央大學，桃園市。

許哲毓、單維彰（2018）。數學「不確定性」教材與評量之分析規準。**臺灣教育評論月刊，7**（10），170-177。取自 https://shann.idv.tw/article/zheyu2018.pdf

許哲毓、單維彰、劉柏伸（2016）。**樹狀圖在機率教學的應用-臺灣與英國教科書之比較**。論文發表於國立臺灣大學舉辦之「第四屆師資培育國際學術研討會」，臺北市。

陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛（2005）。**中小學數學科課程綱要評估與發展研究**。教育部，臺北市。

陳欣民、劉祥通（2002）。從兒童機率迷思概念之文獻分析談機率單元的教學與課程。**科學教育研究與發展季刊，26**，40-51。

陳欣民、劉嘉茹、柳賢（2011）。小六學童在探究教學中的樣本空間概念發展。**臺中教育大學學報：數理科技類，25**（1），67-91。

陳玟樺（2017）。**民國五十至八十年代（1961-2000 年）數學課程改革之探究**。教育部普通高級中學課程數學學科中心。

陳柏如（2005）。數學學習困難學生之工作記憶、數學問題表徵與數學解題表現之關係分析研究。未出版之碩士論文，臺南大學，臺南市。

陳殷哲、洪文良（2017）。探索教育課程學習成效評估：概念詮釋結構模式。**課程與教學季刊，20**（3），165-192。

單維彰（2016）。數學教材為支持素養學習所需之解構與重構。論文發表於國家教育研究院舉辦之「我們的教育，我們的未來國際學術研討會」，臺北市。

單維彰（2017）。臺北教育大學，第 19 屆「兩岸三地課程理論」研討會，宣讀〈以知行識作為數學素養培育架構的課程綱要內涵〉。

單維彰（2018a）。論知行識作為素養培育的課程架構—以數學為例。**臺灣教育評論月刊，7**（2），101-106。取自 P.103。

單維彰、許哲毓、陳斐卿（2018b）。以學前診測與自由擬題探討九年級學生的自發性機率概念。**臺灣數學教育期刊**，5（2），39-64。

葉律吟（2008）。運用 S-P 表分析與概念詮釋結構模式於大學部程式設計課程概念之研究。未出版之碩士論文，朝陽科技大學，臺中市。

臺灣 PISA 國家研究中心（2013）。PISA 數學素養應試指南。取自 http://pisa.nutn.edu.tw/download/sample_papers/2009/2013_0311_guide_mathematics.pdf

鄭章華、李源順（2014）。直角三角比的學習應在十二年國教國中課程佔有一席之地。**科學教育月刊**，368，20—24。

賴盈州（2011）。七年級學生比與比例式概念探究-植基於 S-P 表和概念詮釋結構模式之整合分析。未出版之碩士論文，臺中教育大學，臺中市。

戴筱玲（2009）。應用 CAISM 與 SCM 分析國小六年級學童速率概念。未出版之碩士論文，新竹教育大學，新竹市。

Abu-Bakare, V. (2008). Investigating students’ understandings of probability: A Study of grade 7 classroom, The University of British Columbia.

Adams, J. (2006). *Risk*. Taylor & Francis: Routledge.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Aspinwall, L. & Shaw, K. L. (2000). Enriching students’ mathematical intuition with probability games and tree diagrams. *Mathematics Teaching In the Middle School*, *6*(4), 214-220.

Awuah, F. K., & Ogbonnaya, U. I. (2020). Grade 12 Students’ Proficiency in Solving Probability Problems Involving Contingency Tables and Tree Diagrams. *International Journal of Instruction, 13*(2), 819-834.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1997). Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 181-199.

Bernstein, P.L. (1996). *Against the Gods: The remarkable story of risk*. John Wiley: New York.

Biggs, J.B., & Collis, K.F. (1982). Evaluating the quality of learning: The SOLO Taxonomy. New York: Academic Press.

Biggs, J.B., & Collis, K.F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. In H. Rowe (Ed.). *Intelligence: Reconceptualisation and measurement*(pp57-76). Hillsdale, N.J: Laurence Erlbaum.

Bognar, K. & Nemetz, T. (1977). On the teaching of probability at secondary level. *Educational Studies in Mathematics, 8*, 399-404.

Borovcnik, M., Bentz, H. J., & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective, In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-71), Boston: Kluwer Academic Publishers.

Caldwell, M. L. (1998). Parents, board games, and mathematical learning. *Teaching Children Mathematics, 4*(6), 365-367.

Cavanagh, S. (2008). Playing Games in Class Helps Students Grasp Math, *Education Week, 27*, 43-46.

Chomsky, N. (1965). *Aspects of the Theory of Syntax.* Cambridge: The MIT Press.

Clark, R. C., & Mayer, R. E. (2003). *E-learning and the science of instruction*. San Francisco: Jossey-Bass.

Common Core State Standards Initiative. (CCSSI) (2010). *Introduction to the Common Core State Standards*. Washington, DC: Author. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/ccssi-introduction.pdf.

Crews, A. (2011). Getting Teachers on “Board”, *Knowledge Quest*，*40*(1), 10-13.

English, L. & Watson, J. (2014). Development of fourth-grade students’ understanding of experimental and theoretical probability. In J. Anderson, M. Cavanagh, & A. Prescott (Eds.), *Curriculum in focus: Research guided practice. Proceedings of the 37th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Sydney, Australia, 212-222.

English, L., & Watson, J. (2016). Development of probabilistic understanding in fourth grade. *Journal for Research in Mathematics Education*. In press.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht, Holland: Reidel.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? An exploratory research study. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 1-24.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Garfield, J. B. (1999). *Thinking about statistical reasoning, thinking, and literacy*. Paper presented at First Annual Roundtable on Statistical Thinking, Reasoning, and Literacy.

Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on TeachingStatistics* (pp. 766-783). Shefield, UK: Teaching Statistics Trust.

Green, D. R. (1984). Talking of probability. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, *20*(9), 145-149.

Hamari, J., (2013). Transforming Homo Economicus into Homo Ludens: A Field Experiment on Gamification in a Utilitarian Peer-to-peer Trading Service. *Electronic Commerce Research and Application, 12*, 236-245.

Harding, R. (1998). *Environmental Decision-making: the roles of scientists, engineers and the public*. The Federation Press, Sydney.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91, 684-689.

Jitendra, A. K. (2002). Teaching student math problem-solving through graphic representations. *Teaching Exceptional Children*, 34(4), 34-38.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., & Tarr, J. E. (1999). Understanding students' probabilistic reasoning. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in Grades K-12: 1999 Yearbook* (pp.146- 155)**.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glasersfeld(Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp139-165). Holland: Kluwer.

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science, 11*, 65-99.

Leslie A. and Kenneth L. S. (2000). Enriching students' mathematical intuition with probability games and tree diagrams. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(4), 214-220.

Leslie A. and Kenneth L. S. (2000). Enriching students' mathematical intuition with probability games and tree diagrams. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 214-220.

Lin, Y. H., Hung, W. L., Huang, K. J. & Li, C. C. (2009). PWCISM. [manual and software for PWCISM]. Taiwan, Taichung City: National TaichungUniversity.

Maher, C. A. and Ahluwalia, A. (2014). Counting as a foundation for learning to reason about probability. In Egan J. Chernoff and Bharath Sriraman (Ed). *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Prespectives*. New York: Springer Science Business Media Dordrecht.

National Curriculum (2014). *The national curriculum in England*. Retrieved from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/381754/SECONDARY_national_curriculum.pdf.

Nguyen, N. L. (2015). *Developing conceptual understanding and probabilistic thinking through tree diagrams* (Unpublished master thesis). University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba.

Nikiforidou Z. & Pange J. (2007). *Sample space and the structure of probability combinations in preschoolers*. Proceedings of CERME, 782-790. Larnaca. Cyprus.

Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*, New York: Holt, Rinehart and Winston.

Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*, USA: Oxford University Press.

Paivio, A. (1991). Dual coding theory: Retrospect and current status. *Canadian journal of psychology, 45*(3), 255-287.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children* (L. *J.* Leake & P. D. Burrell & H. D. Fischbein, Trans.). London: Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1951)

Polya, J. (1957). *How to solve it (2nd ed.)*. Garden City, NY: Doubleday Books.

Roth, W.-M., & Bowen, G. M. (2003). When are graphs worth ten thousand words? an expert-expert study. *Cognition and Instruction, 21(4)*, 429-473.

Rumsey, D. J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of statistics education*, *10*(3), 6.

Scheaffer, R. L., Watkins, A. E., & Landwehr, J. M. (1998). What every high-school graduate should know about statistics. In S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12* (pp. 3-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Schield, M. (1999). *Statistical literacy: Thinking critically about statistics*. Retrieved August 15 2009, from http://web.augsburg.edu/~schield/MiloPapers/984StatisticalLiteracy6.pdf

Schield, M. (2004). *Statistical literacy*. Retrieved August 15, 2009, from http://www.augsburg.edu/ppages/~schield/

Schmidt, W. H., Mcknight, C. C., & Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., et al. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction, 13*(2), 141-156.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(2), 173-187.

Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching problem-solving skills. *The American Mathematical Monthly, 87*(10), 794-805.

Schroeder, T. L. (1988). Elementary school children's use of strategy in playing microcomputer probability games. In R. Davinson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 51-56). Canada: University of Victoria.

Sharge, G (1983). Misinterpretation of stochastic models. In Scholz, R(Ed.), *Decision Making under Uncertainty* (pp. 351-361) Amsterdam: New York North-Holland.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconception of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at college level. *Educational Studies in Mathematics, 8*(3), 295-316.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: National Council of Teachers of Mathematics and MacMillan.

Shin, J. & Steffe, L. P. (2009). Seventh graders use of additive and multiplicative reasoning for enumerative combinative combinative combinatorial problems. In Swars, S. L., Stinson, D. W., & Lemons-Smith, S. (Eds.). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Atlanta, GA: Georgia State University.

Spiegelhalter, D. (2009). *The Times*. Times Newspapers Ltd.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology, 5*, 207-232.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, *185,* 1124-1131.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, *90*(4), 293-315.

Uesaka, Y., & Manalo, E. (2011). Task-related factors that influence the spontaneous use of diagrams in math word problems. *Applied Cognitive Psychology*, *26*, 251-260.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mild in society: The development of higher psychological*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Warfield, J.N. (1976). *Societal systems planning, policy and complexity*. New York: Wiley.

Warfield, J.N. (1982). *Interpretive structural modeling (ISM) Group Planning & Problem Solving Methods in Engineering*. New York: Wiley.

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for Teaching and Learning, Springer, Berlin, 145-169.*

Watson, J. M. (1997). Assessing statistical thinking using the media. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds), *In The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 107-121). The Netherlands.

Zichermann, G. and Linder, J. (2013). *The Gamification Revolution: How Leaders Leverage Game Mechanics to Crush the Competition, 1st*. New York: McGraw Hill.

附錄一.八年級機率測驗

TREE DIAGRAM

班級：九年＿＿＿班　　座號：＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

一、是非題：請判斷下列敘述是否正確，若為正確，請畫○；若為錯誤，請畫╳。並寫下理由。

(　　)1.　統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$。
理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(　　)2. 連續投擲一顆 1~6 點的公正骰子 150 次（意即骰子每一面被擲出的機會相等），則「6 點」剛好會出現 25 次。
理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(　　)3. 嘟嘟到松山機場追星，前五次都沒遇到她心愛的女團 TWICE，所以第六次他不用去追星。
理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(　　)4. 投擲一顆 1~6 點的公正骰子（意即骰子每一面被擲出的機會相等），則投擲一次丟出「12 點」的機率為 $\frac{12}{6}$。
理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

二、計算題：請閱讀下列題目，回答問題，並寫下完整的計算過程或畫出樹狀圖。

1. 在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？
提示：(完成下方表格)

	A	a
A		Aa
a		

2. 鼎狸工廠共生產 2400 個燈泡，從中隨機抽出 200 個做測試，其中有 5 個燈泡是瑕疵品，則在整批燈泡中，可能會有幾個是瑕疵品？

3. 負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有五月花衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{50}$

4. 從連續正整數 40、41、42、……、97、98、99 中隨機取一數，則
(1) 個位數字等於十位數字的可能有哪幾種？
(例：77)
(2) 個位數字等於十位數字的機率是多少？

5. 有兩個 1~6 點的公正骰子 A 與骰子 B，A 骰出現的點數為 a，B 骰出現的點數為 b，則點數 a 與 b 依序所組成的數為奇數的機率是多少？
例如：當 a=1，b=3 時，所組成的數為 13。

6. 劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則江辰是第一個、小希是第二個被家庭訪問的機率為多少？

7. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？

8. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為$\frac{3}{4}$。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{4}{7}$。
(1) 金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
(2) 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

9. 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？
提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況喔！

三、想一想：請閱讀以下的問題並回答，如果可以，請寫下理由。
民國 109 年時，請你(妳)評估自己考上楊梅高中的機率是多少？

附錄二. 九年級機率測驗

機　率　！BANG！

班級：九年_____班　　座號：_______　　姓名：_________________

一、是非題：請判斷下列敘述是否正確，若為正確，請畫○；若為錯誤，請畫╳。並請寫下理由。

(　)1. 擲一公正的骰子，連續三次皆擲出 5 點，則擲第四次的結果出現 5 點的機率會大於 $\frac{1}{6}$。

理由：____

(　)2. 擲筊 3 次，連續 3 次都擲到聖筊的機率為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$。

理由：____

(　)3. 隨機從籤筒中抽籤，取後不放回，籤上的號碼是 1~40 號。

事件一：抽中 10 號籤的機率。

事件二：抽出 10 號籤後，再抽中 11 號籤的機率。

事件一與事件二的機率值相同。

理由：____

二、計算題：請閱讀下列題目，回答問題，並寫下完整的計算過程或畫出樹狀圖。

1. 分別擲 1 顆公正的四面骰和 1 顆公正的六面骰，四面骰上的英文字母分別為 P、P、A 和 P，六面骰上的英文字母分別為 B、O、O、K、S 和空白。

(1) 擲出的結果為「PO」的機率為何？

(2) 擲出的結果為「字母&空白」的機率為何？

2. 數學營舉辦過關活動，老皮隊依序要闖三關。已知每一關的過關機率都是 $\frac{3}{4}$，且任意兩關之間互不影響。

(1) 請問老皮隊三關都失敗的機率為何？

(2) 請問老皮隊只完成其中一關的機率為何？

3. 根據統計，5%的男性及 0.3%的女性為色盲，中央大學的學生男女比率為 2 : 1。假設中央大學學生的色盲分布跟全體一樣，請問從中央大學的學生中隨機挑選一人

(1) 此人是色盲女的機率為多少？

(2) 此人不是色盲男的機率為多少？

(3) 此人是色盲的機率為多少？

4. 阿單、老許同時要翻譯一封用密碼寫成的信，阿單、老許解出此信的機率分別為 $\frac{5}{6}$、$\frac{3}{7}$，且兩人互不影響。

(1) 兩人都解出此問題的機率為多少？

(2) 兩人都解不出這封信之機率為多少？

(3) 至少有一人解出此問題的機率為多少？

(4) 恰有一人解出此問題的機率為多少？