1997年有限元法及多重網格法的短期課程

凌波函數 (wavelets) 簡介

§1 前言

凌波理論起源於 1984 年左右, 當初是調和分析的一支. 近十年來吸引了不少人對這一領域的投入, 使得凌波函數的理論與應用在 90 年代成指數函數般地發展. 在應用方面, 比較具體獲得成功的包括數位訊號處理 (digital signal processing) 和積分方程的數值解.

在這一短期課程, 我們將作一概括性地介紹, 使得讀者能對凌波理論產生興趣. 由於時間的限制, 並且筆者深信各位學員的基礎能力很強, 因此只作一概略性的簡短報告. 至於由粗到細的工夫, 就留給讀者們推敲了.

這份講義的主體是數學習題. 我們將另外準備一段時間做計算上的練習. 內容的大部分是由嚴健彰先生撰文, 小部分是由單維彰先生增修 (在 §2–§4 中), 另有一小部分直接抄錄自曾正南先生的碩士論文.

§2 預備知識

這段我們簡介富氏分析來作爲凌波理論的預備知識, 當然有些人可以避開富氏分析, 直接學習凌波理論, 但是我們認爲富氏分析可以提供非常有效的工具. 因此我們並不刻意的避開它. 而且筆者也僅僅介紹與凌波理論有關部分.

若 $f(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ 中, 即可定義它的富氏變換

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

習題 1. 令 $f(x) = \chi_{[0,1)}$. 計算 $\hat{f}(\xi)$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$.

經過富氏轉換之後, 希望能再重建回來, 其重建的公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi.$$

不幸的是 f 在 $L^1(\mathbb{R})$ 內經過轉換之後, $\hat{f}$ 未必也還會在 $L^1(\mathbb{R})$ 中, 但是幸運的是 $L^2(\mathbb{R})$ 這空間就不會有以上的問題了.

習題 2. 定義 $f(x) = e^{-x}$ 當 $x \geq 0$ 及 $f(x) = 0$ 當 $x \leq 0$. 計算 $\hat{f}$ 且證明 $\hat{f}(\xi)$ 不在 $L^1(\mathbb{R})$.

以上的定義雖然在 $L^1(\mathbb{R})$ 上, 但是 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 是在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密, 加上 $L^2(\mathbb{R})$ 是 Banach 空間, 因此很容易將它應用到 $L^2(\mathbb{R})$ 空間了. 至於嚴格的推展到 $L^2(\mathbb{R})$ 的過

程, 我們在此省略. 因爲 $L^2(\mathbb{R})$ 空間是一個 Hilber 空間, 因此對於投影算子能明顯的表示, 因此不仿先將整個理論放在 $L^2(\mathbb{R})$ 空間來討論, 而且在這短期課程中, 我們談論的函數也都是在 $L^2(\mathbb{R})$ 空間裡.

以下我們介紹富氏分析上的 Parseval 定理. 敘述如下:

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f},\hat{g}).$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 代表 L^2 內積.

習題 3. 定義 $f(x) = \chi_{[0,1]}$ 和 $g(x) = x * f(x)$ 求 $\hat{f}$ 及 $\hat{g}$ 並驗證 Parseval 定理 ($*$ 代表折積 convolution).

f 和 g 的角色可以調換, 但是就比如說 f 代表一個有限能量的訊號, 而 g 代表一個濾波器. 如果 g 和 $\hat{g}$ 在時間-頻率相位平面 (time-frequence phase plane) 上占有一塊區域, 那麼 (f,g) 就大約是 f 在那塊區域中的平均值. 這塊區域有個數學的定義, 稱之爲海森堡方塊 (Heisenberg box). 這是相位平面上的一個矩形區域, 其邊長爲 σ 和 $\hat{\sigma}$, 各定義如下

$$\sigma^2 = \frac{1}{\|f\|^2}\int x^2\,|f(x)|^2\,dx, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int \xi^2\,|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi.$$

直覺上我們可以體會, 要希望有一個高效率的濾波器, 就相當於要找一個 g 使其海森堡方塊越小越好. 可惜這是有下限的. 以下就是海森堡測不準理論.

習題 4. 假設 $\|f\| = 1$ 且當 $x \to \pm\infty$ 時 $x|f(x)|^2 \to 0$. 則 $\sigma\hat{\sigma} \geq \frac{1}{2}$. 且等號成立時 f 必爲所謂的 Gaussian 函數: e^{-cx^2}.

接下來我們介紹一個有關緊緻涵蓋的定理, Paley-Wiener 定理: f 在 $[a,b]$ 有緊緻涵蓋的充份必要條件是

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C_1(1+|\xi|)^{M_1}e^{b|\mathrm{Im}\xi|} \quad \text{for } \mathrm{Im}\xi \geq 0$$
$$|\hat{f}(\xi)| \leq C_2(1+|\xi|)^{M_2}e^{a|\mathrm{Im}\xi|} \quad \text{for } \mathrm{Im}\xi \leq 0$$

對某些 C_1, C_2, M_1, M_2 都是常數. 約略地想法是如果 $\mathrm{supp}f(x) \subset [a,b]$, 則

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)| &= |\int_a^b f(x)e^{-ix\xi}dx| \\ &\leq C_1(1+|\xi|)^{M_1}(e^{b\xi}+e^{a\xi}).\end{aligned}$$

習題 5. 完成 Paley-Wiener 定理的證明.

我們用多重解析來結束這節. 設 V^ℓ 是一族 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空間且滿足以下條件

(1) $\cdots \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset \cdots$

(2) $\cup V^\ell$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密

(3) $\cap V^\ell = \{0\}$

(4) $f(x) \in V^\ell \Leftrightarrow f(2x) \in V^{\ell+1}$

由以上的四個條件, 我們可知道這些空間可以定義一個從 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 到 V^ℓ 的垂直投影算子 P^ℓ. 從條件 (2) 可知

$$\lim_{\ell \to \infty} P^\ell f = f, \quad \text{for } f \in L^2(\mathbb{R})$$

這裡要提醒的是, 條件 (2) 中的 $\cup_{\ell=-\infty}^{\infty} V^\ell$ 僅僅稠密在 $L^2(\mathbb{R})$, 而未必相等; 且這收斂是範數收斂, 不是點收斂. 從條件 (3) 我們知

$$\lim_{\ell \to -\infty} P^\ell f = 0, \quad \text{for } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

對 (4) 這性質有很好的應用, 使細層到粗層有某種關係, 可經由某種簡單的運算從細層得到粗層的投影. 如果 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, 且

$$V^\ell = \text{span}\{\sqrt{2^\ell}\phi(2^\ell x - j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

滿足 (1) 到 (4) 的條件, 我們稱 ϕ 生成一個多重分析 V^ℓ.

習題 6. 證明 $\phi(x) = \chi_{[0,1)}$ 和

$$\phi(x) = \begin{cases} 1-x & x \in [0,1) \\ x+1 & x \in [-1,0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

各自生成一個多重分析.

有了多重分析的結構, 我們不仿先談談所謂低頻慮及高頻率的意義. 如果 $f \in V^1$, 將 f 投影到 V^0 上, 如果 f 完全落在 V^0 上, 則稱 f 是 V^1 上的低頻, 反之, 如果 V^0 上沒有任何 f 的分量, 則 f 是 V^1 上的高頻, 否則 f 包含了高頻和低頻的頻率.

習題 7. 求 $\phi(2x-k)$ 的傅立葉轉換與 $\hat{\phi}(\xi)$ 之間的關係.

從以上的關係看出來, 利用 $\phi(2^\ell x - k)$ 當做濾波器, 在相位平面上有自動調適的功能. 而且, 倍增的頻率符合人類耳朵聽覺的實際反應.

§3 正規的凌波函數

有限函蓋 (compactly supported) 且正規 (orthonormal) 的凌波函數可說是由 Daubechies 一人發展而成的. 這種凌波理論今天被認爲是比較核心的, 因此我們從這種凌波理論著手. 給定一組有限長的係數 h_j, 且滿足

$$(N) \qquad \sum_j h_j = 2,$$

$$(O) \qquad \sum_j h_j h_{j-2m} = 2\delta_{0,m},$$

$$(A) \qquad \sum_j (-1)^j j^m h_j = 0, \quad \text{for } 0 \le m \le p-1.$$

其中 p 是一個正整數, 也稱作 Daubechies 的凌波函數的階數. 此處我們不證明 h_j 的存在性, 但確實已知對每個 $p \ge 1$ 有 $2p$ 個非零解. 當 $p = 1, 2$ 和 3 的時候, 有唯一的一組解 (去除順序的翻轉); 當 $p \ge 4$ 時就不唯一了, 例如 $p = 4$ 時有兩組解. 這許多組解所構造的自格與凌波函數, 其數學性質都一樣, 但是在應用上未必相同. 例如在做訊號處理的時候, 我們特別喜歡對稱的係數. 已知有限函蓋的凌波函數不可能是對稱的, 故這些係數也不可能是對稱的. 但是儘量地接近對稱還是比較被歡迎的.

例如當 $p = 1$ 時, $h_0 = 1, h_1 = 1$; 當 $p = 2$ 時,

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$

所謂自格函數 $\phi(x) \in V^0 \subset V^1$, 即滿足以下等式 (稱作自格等式)

$$\phi(x) = \sum_j h_j \phi(2x - j). \tag{3.1}$$

爲了 ϕ 能夠生成一個多重分析, 必須 $|\hat{\phi}(0)| = 1$, 讓我們取

$$\int \phi(x)dx = 1. \tag{3.2}$$

由此推得條件 (N) 是必要條件.

習題 8. 證明 $(h_k) = (1/2, 1, 1/2)$ 可以找到一自格函數 $\phi(x)$, 且

$$\phi(x) = \begin{cases} 1+x & x \in [-1, 0) \\ 1-x & x \in [0, 1) \end{cases}$$

又問, 是否存在另外一個函數 $\phi_1(x)$ 滿足 (3.1) 但是也滿足 $\int \phi_1(x)dx = 0$?

習題 9. 若 $\{h_j\}$ 只有有限多個非零項, 且 ϕ 滿足 (3.1), 則 ϕ 是緊緻函蓋.

對這樣的自格函數 $\phi(x)$, 我們希望經過平移所成的集合 $\{\phi(x-j) : j \in Z\}$ 是個正規集合 (orthonormal set). 也就是說, $\{\phi(x-j) :\}$ 成爲 V^0 的一組正規基底.

習題 10. 從 $(\phi(x), \phi(x-j)) = \delta_{0j}$ 得到條件 (O) 是必要條件.

定義自格函數 ϕ 的頻率響應 (frequency response) 函數

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2}\sum_j h_j e^{-j\xi}.$$

則 $\phi(x)$ 亦可由其傅立葉轉換而定義:

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{\ell=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^\ell}),$$

而條件 (N) 和 (O) 等價於

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1.$$

觀察 $|m_0(\xi)|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 之間的圖形, 可以得知 ϕ 作爲一個低頻濾波器的效率.

因爲這個方法常常被使用在凌波理論上, 故我們不仿仔細探討一下. 如果 $\phi(x-j)$ 形成一正規集合, 亦即

$$\begin{aligned}\delta_{0k} &= \int \phi(x)\phi(x-k)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \hat{\phi}(\xi)\overline{\hat{\phi}(\xi)}e^{ik\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_j |\hat{\phi}(\xi+2j\pi)|^2 d\xi\end{aligned}$$

從富氏分析在圓群上的理論, 我們可推知,

$$\sum_j |\hat{\phi}(\xi+2j\pi)|^2 = 1. \tag{3.3}$$

因此再將奇數項和偶數項分開再利用 (3.3), 可得

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1. \tag{3.4}$$

習題 11. 完成上述從 (3.3) 到 (3.4) 的證明.

階數 p 的自格函數可以展開階數不超過 $p-1$ 的多項式, 亦即對所有整數 $0 \le m < p$, 存在係數 s_k^m 使得 $x^m = \sum s_k^m \phi(x-k)$. 關於這點, 在我們介紹凌波函數之後, 便能體會了, 但是以下的習題不仿先練習一下.

習題 12. 證明 $\sum_j \phi(x-j) = 1$.

自格等式 (3.1) 可以用來建構一些積分公式. 以下的兩個練習就可以表明這類技巧的精神了.

習題 13. 令 $M_m = \int x^m \phi(x)\, dx$, 注意 $M_0 = 1$. 證明

$$M_m = \frac{1}{2(2^m - 1)} \sum_j h_j \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} M_{m-k} j^k.$$

習題 14. 令 $\phi(x)$ 是一階數 ≥ 2 的正規凌波函數, 證明

$$(\int x\phi(x)dx)^2 = \int x^2 \phi(x)dx.$$

條件 (N) 和 (O) 只是構成正規有限函蓋之自格函數 (與凌波函數) 的必要條件. 它們並不充分. (N) 和 (O), 或者是 (3.4) 還還有加上一個條件 (K), 才能成爲充分必要條件. 這個條件 (K) 其實有三四種等價的形式, 在此我們只說其中的一種: τ-環 (τ-cycle) 條件.

我們定義 τ-環如下: Given a real number ξ, let $[\xi]$ be the (unique) number in $[-\pi, \pi)$ such that $[\xi] = \xi \pmod{2\pi}$, and let τ be the operator such that $\tau\xi = 2\xi \pmod{2\pi}$. The set $T = \{\xi_i \mid \xi_i \in [-\pi, \pi), 0 \le i \le k-1\}$ is a τ-cycle of length k if (1) $\xi_{i+1} = \tau\xi_i$, (2) $\xi_i = \tau^k \xi_i$, and (3) $\xi_i \ne \xi_j$ for any $i \ne j$.

則 Cohen 的 τ-環條件就是:

(K) 沒有長度 > 1 的 τ-環 T 使得其所有元素 $\xi_k \in T$ 都滿足 $m_0([\xi_k - \pi]) = 0$.

習題 15. 證明任一個長度 > 1 的 τ-環都有某個元素落在 $[-\pi, -\frac{2}{3}\pi] \cup [\frac{2}{3}\pi, \pi]$ 之中. 所以, 如果 $m_0(\xi)$ 在 $[-\pi/3, \pi/3]$ 之中 $\ne 0$, 則條件 (K) 就成立.

我們所有經驗過的 $m_0(\xi)$ 其實都符合上述習題的情況.

套用多重分析, 令

$$V^\ell = \overline{\text{span}\{\phi_j^\ell : j \in Z\}}.$$

在此 $\phi_j^\ell(x) \equiv 2^{\ell/2}\phi(2^\ell x - j)$. 因此 ϕ 生成一多重分析. 我們希望 $V^{\ell+1} = V^\ell \oplus W^\ell$. 而有另一函數 $\psi(x)$ 經過平移所形成的空間也展成 W^0. 稱 ψ 是凌波函數, 而 $\psi \in V^1$, 因此

$$\psi(x) = \sum_j g_j \phi(2x - j). \tag{3.5}$$

我們要求

$$(\phi(x), \psi(x-j)) = 0, \quad \forall j \in Z$$

$$(\psi(x), \psi(x-j)) = \delta_{0,j}, \quad \forall j \in Z$$

透過富氏分析, (3.5) 可得

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_j g_j e^{-ij\xi/2} \hat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \equiv m_1(\frac{\xi}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}).$$

因此有等式

$$m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{m_1(\xi+\pi)} = 0$$

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi+\pi)|^2 = 1$$

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_1(\xi)|^2 = 1$$

最後我們只須定義 $g_j = (-1)^j h_{1-j}$ 即可.

這裡我們可能寫得不夠詳細, 底下直接節錄曾正南先生的碩士論文中的一段, 以茲補充. 注意符號上稍有不同.

我們現在開始推導 $\psi(x)$. 令 $f \in W_0$. 根據 W_0 的定義我們知道 $f \in V_1$ 且 $f \perp V_0$. 因爲 $f \in V_1$, 我們有

$$f = \sum f_n \phi(2x - n),$$

這裡的 f_n 是 $f_n = (f(x), \phi(2x-n))$. 我們可以得到

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\sum f_n e^{-in\frac{\omega}{2}} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = m_f(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}), \tag{3.6}$$

其中 $m_f(\omega)$ 被定義爲

$$m_f(\omega) = \frac{1}{2}\sum f_n e^{-in\omega}; \tag{3.7}$$

m_f 是一個 2π 週期函數, 且 (3.7) 是點收斂. $f \perp V_0$ 這一個條件可以推得 $f \perp \phi_{0,k}$ 對所有的 k 都成立, 即

$$\int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{-ik\omega}\, d\omega = 0$$

或者

$$\int_0^{2\pi} [\sum_n \hat{f}(\omega+2\pi n)\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi n)}]e^{-ik\omega}\, d\omega = 0 \quad \forall k.$$

因此, 我們有

$$\sum \hat{f}(\omega+2\pi n)\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi n)} = 0 \tag{3.8}$$

並且上述的式子在 $L^1([-\pi,\pi])$ 上是絕對收斂的. 再一次應用將奇數項與偶數項拆開的技巧, 可以得到

$$m_f(\omega)\overline{m_0(\omega)} + m_f(\omega+\pi)\overline{m_0(\omega+\pi)} = 0 \quad \text{a.e.} \tag{3.9}$$

因爲 $m_0(\omega)$ 和 $m_0(\omega+\pi)$ 不會同時爲 0, 所以存在一 2π 週期函數 $\lambda(\omega)$ 使得

$$m_f(\omega) = \lambda(\omega)\overline{m_0(\omega+\pi)} \quad \text{a.e.} \tag{3.10}$$

由於 (3.9) 我們有

$$\lambda(\omega) + \lambda(\omega+\pi) = 0 \quad \text{a.e.} \tag{3.11}$$

$\lambda(\omega)$ 可以寫成

$$\lambda(\omega) = e^{i\omega}\nu(2\omega), \tag{3.12}$$

這裡的 ν 也是一個 2π 的週期函數. 將 (3.12) 以及 (3.10) 代入 (3.6) 得到

$$\hat{f}(\omega) = e^{i\omega/2}\overline{m_0(\frac{\omega}{2}+\pi)}\nu(\omega)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}). \tag{3.13}$$

我們將證明正交凌波函數滿足如下形式

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\frac{\omega}{2}}\overline{m_0(\frac{\omega}{2}+\pi)}\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}). \tag{3.14}$$

亦即 $\hat{\psi}(\omega) = m_1(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$, 其中

$$m_1(\omega) = e^{i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)}.$$

如果 $m_1(\omega) = \frac{1}{2}\sum d_n e^{-i\omega n}$, 則

$$\psi(x) = \sum d_n \phi(2x - n).$$

我們暫時不理會收斂性的問題, (3.13) 可以寫成

$$\hat{f}(\omega) = \left(\sum \nu_k e^{-ik\omega}\right)\hat{\psi}(\omega). \tag{3.15}$$

亦即

$$f(x) = \sum \nu_k \psi(x - k).$$

結論是: Let $\phi(x)$ be a scaling function such that $\phi(x-n)$ is an orthonormal basis of V_0. Define the wavelet $\psi(x)$ as in (3.14), then $\psi(x-n)$ is an orthonormal basis of W_0.

雖然條件 (N) 和 (O) 理論上不足以保證正規自格函數和凌波函數的存在, 但是實際上的計算經驗都是可以的. 所以我們可以從 (N) 和 (O) 計算 $2p$ 個係數 h_j. 很明顯的, (N) 和 (O) 的條件個數不足 $2p$. 我們還多了一些自由度. 上面的習題就是告訴我們, 利用這些自由度的方式之一, 就是加諸於條件 (A).

習題 16. 利用條件 (A), 證明

$$\int x^m \psi(x) dx = 0, \quad m = 0, \ldots, p-1. \tag{3.16}$$

成立. 亦即, ψ 正交階數小於 p 的多項式,

條件 (A) 導至 W^0 空間與低階多項式的正交. 由於 W^0 和 V^0 也正交, 從這裡也大至上可以看到, V^0 空間包含了低階多項式.

習題 17. 證明存在某組係數 $\{s_j\}$, 使得 $x^{p-1} = \sum_j s_j \phi(x - j)$.

下面這個習題基本上是說, 如果把 ψ^2 看做是一個機率分佈函數, 則其平均值 (mean value) 總是在其函蓋的中央.

習題 18. 令 $\mathrm{supp}\psi(x) = [-p+1, p]$, 證明 $\int x\psi^2(x)dx = \frac{1}{2}$.

爲什麼 (3.16) 是一好的性質呢? 因爲它保證了 V^ℓ 空間的逼近性質. 定義 $\psi_j^\ell = \sqrt{2^\ell}\psi(2^\ell x - j)$, 則 ψ_j^ℓ 是 W^ℓ 的一組正規基底.

習題 19. 若 $\int \psi\, dx = 0$ 且爲有限函蓋, 若 $f \in C^{0,\alpha}$ 其中 $0 < \alpha \leq 1$ 是 Hölder 連續指數. 證明

$$|(f, \psi_j^\ell)| \leq C 2^{-(\alpha+\frac{1}{2})\ell} \int |x|^\alpha |\psi(x)|\, dx.$$

簡單地說就是 $|(f,\psi_j^\ell)| = O(2^{-(\alpha+\frac{1}{2})\ell})$. 如果 $f \in C^{n,\alpha}$, $n < p$, 則

$$|(f,\psi_j^\ell)| = O(2^{-(n+\alpha+\frac{1}{2})\ell}).$$

凌波函數在訊號壓縮方面的應用就是殿基於這個性質: 平滑函數的高頻部分分量很小.

另一方面, 如果將 f 投影到 $P^\ell f \in V^\ell$, 則 $f - P^\ell f$ 就是 f 在 $W^\ell \oplus W^{\ell+1} \oplus \cdots$ 之中的分量. 如果 f 平滑, 則這些分量很小, 所以 $P^\ell f$ 就會逼近 f.

§4 分解及合成

有了 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 及它們的正交性, 我們可以介紹分解及合成了. 假如 $u(x) \in V^{\ell+1}$ 則 u 可被表示成

$$\begin{aligned} u &= \sum_j u_j^{\ell+1}\phi_j^{\ell+1} \\ &= \sum_j u_j^\ell \phi^\ell + \sum_j w_j^\ell \psi_j^\ell. \end{aligned}$$

運用 $\phi_j^{\ell+1}$ 和 ϕ_j^ℓ, ψ_j^ℓ 的關係, 使得 $u_j^{\ell+1}$ 和 u_j^ℓ, w_j^ℓ 滿足

$$\begin{aligned} u_j^\ell &= (u,\phi_j^\ell) = \sum_k u_k^{\ell+1} h_{k-2j} \\ w_j^\ell &= (u,\psi_j^\ell) = \sum_k u_k^{\ell+1} g_{k-2j} \end{aligned} \tag{4.1}$$

和

$$\begin{aligned} u_j^{\ell+1} &= (u,\phi_j^{\ell+1}) \\ &= \sum_k u_k^\ell h_{2k+j} + w_k^\ell g_{2k+j}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

習題 20. 證明 (4.2) 成立.

以上 (4.1) 稱爲分解的演算法, 而 (4.2) 稱爲合成的演算法. 作分解及合成的意義在於分解後得到的 w^ℓ (ℓ 比較大時) 的向量幾乎都很小, 在小於某個精度的時候我們便將它視爲零了. 連續的零只需記錄始末位置即可, 進而達到壓縮資料的效果. 如果不作壓縮隨即合成, 則必須還原原來的資料, 稱爲完整的分解及重建.

習題 21. 給定 $u^1 = (1,1,1,1,1,1,1,1)$, 利用 $p = 2$ 的凌波函數作分解, 求 u^0 及 w^0.

§5 有關有限函蓋正規凌波函數的平滑性

如果一個函數屬於 C^α 空間, $\alpha = n+\beta$, $n \in N$, $0 \le \beta \le 1$. 亦即 f 是 n 次可微分且 $f^{(n)}(x)$ 有 Hölder 連續指數 β,

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x+t)| \le c|t|^\beta \quad \text{for all } x, t.$$

一函數 f 的平滑度是 C^α 的充份條件是

$$\int |\hat{f}(\xi)|(1+|\xi|)^\alpha < \infty.$$

更特別的是 $|\hat{f}(\xi)| \le (1+|\xi|)^{-\alpha-1-\epsilon}$ 則亦可推得 $f \in C^\alpha$. 現在我們知道

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=0}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j})$$

且 $m_0(\xi) = \sum_{j=0}^{2p-1} h_j e^{-ij\xi}$, $m_0(0) = 1$ 及 $\int \phi(x)dx = 1$. 將 $m_0(\xi)$ 寫成

$$m_0(\xi) = (\frac{1+e^{-i\xi}}{2})^{p-1} \mathcal{L}(\xi).$$

這理 $\mathcal{L}(\xi)$ 也是三角多項式, 推得

$$\hat{\phi}(\xi) = (\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi})^{p-1} \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(\frac{\xi}{2^j}).$$

因此接下來我們想估計 $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(\xi/2^j)$

習題 22. 如果 $q = \sup_\xi |\mathcal{L}(\xi)| < 2^{p-1-\alpha}$ 則 $\phi \in C^\alpha$. (提示: 因 $m_0 = 1$, $\mathcal{L}(0) = 1$; 則 $|\mathcal{L}(\xi)| \le 1 + C|\xi|$, 則

$$\sup_{|\xi|\le 1} \prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}(\frac{\xi}{2^j})| \le \sup_{|\xi|\le 1} \prod_{j=1}^{\infty} \exp(C\frac{|\xi|}{2^j}) \le e^C.)$$

其實我們有一個較好的估計. 定義

$$q_j = \sup_\xi |\prod_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}(\frac{\xi}{2^k})|,$$
$$\mathcal{K}_j = \frac{\log q_j}{j \log 2},$$
$$\mathcal{K} = \inf_{j \in N} \mathcal{K}_j$$

則 $\mathcal{K} = \lim_{j\to\infty} \mathcal{K}_j$. 假如 $\mathcal{K} < p-1-\alpha$ 則 $\phi \in C^\alpha$.

習題 23. 估計 $p = 2$ 的凌波函數的平滑度.

當 $p = 3$, ϕ 大約屬於 $C^{0.099}$; 當 p 很大的時候, ϕ 大約屬於 $C^{0.2p}$.

§6 雙正交的凌波理論

這節我們介紹雙正交的凌波理論, 先討論分解及合成的等式, 例如 $p=2$,

$$m_0(\xi)=(\frac{1+e^{-i\xi}}{2})^2(\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}e^{-i\xi})$$

則若令 $z=e^{-i\xi}$,

$$\begin{aligned}F(z)&:=|m_0(\xi)|^2\\&=z^{-3}(\frac{1+z}{2})^4(\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}z)(\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}z)\\&=z^{-3}(\frac{1+z}{2})^4(-1+4z-z^2)\\&=\frac{-z^{-3}+9z^{-1}+16+9z-z^3}{32}\end{aligned}$$

以上就是所謂的 z-轉換 (z-transform). 因此 $F(z)+F(-z)=1$ 相一致於等式 (3.4). 有了正規的凌波理論, 我們可以想像將 $|m_0(\xi)|^2$ 分配成 $m_0(\xi)\overline{\tilde{m}_0(\xi)}$. 得到分解可用

$$\begin{aligned}m_0(\xi)&=(\frac{1+z}{2})^2\\m_1(\xi)&=(\frac{1-z}{2})^2(-1-4z-z^2)\end{aligned}$$

及重建時可用

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0(\xi)&=(\frac{1+z}{2})^2(-1+4z-z^2)\\\tilde{m}_1(\xi)&=(\frac{1-z}{2})^2\end{aligned}$$

則分解及重建的等式不變.

習題 24. 求一多項式 $Q(z)$ 滿足 $(1+z)^2Q(z)+(1-z)^2Q(-z)=z^2$.

這裡我們寫得不夠詳細, 底下直接節錄曾正南先生的碩士論文中的一段, 以茲補充. 注意符號上稍有不同.

我們定義 $\phi(x)$ 和 $\tilde{\phi}(x)$ 使的兩者都是可以展成多重分析的自格函數. 當我們說 $\{\phi(x),\psi(x),\tilde{\phi}(x),\tilde{\psi}(x)\}$ 爲一組雙正交系統時, 我們指的是:

$$(\tilde{\phi}(x),\phi(x-n))=(\tilde{\psi}(x),\psi)x-n))=\delta_{0,n} \tag{6.1}$$

以及

$$(\tilde{\phi}(x),\psi(x))=(\tilde{\psi}(x),\phi(x))=0. \tag{6.2}$$

因此, 對於任意的整數 n 我們有

$$\begin{aligned}\delta_{0,n} &= (\tilde{\phi}(x), \phi(x-n)) \\ &= \int \hat{\tilde{\phi}}(\omega)\overline{\hat{\phi}(\omega)}e^{i\omega n}\, d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i\omega n} \sum_n \hat{\tilde{\phi}}(\omega+2\pi n)\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi n)}\, d\omega.\end{aligned}$$

由於 n 是任意的, 所以

$$\sum \hat{\tilde{\phi}}(\omega+2\pi n)\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi n)} = (2\pi)^{-1} \quad \text{a.e.} \tag{6.3}$$

我們將 $\hat{\phi}(\omega) = m_0(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ 代入上式, 得到

$$\sum_n \widetilde{m}_0(\omega+\pi n)\overline{m_0(\omega+\pi n)}\hat{\tilde{\phi}}(\omega+\pi n)\overline{\phi(\omega+\pi n)} = (2\pi)^{-1} \quad \text{a.e..}$$

同樣的, 我們再將奇數項與偶數項拆開並配合 (6.3), 我們有

$$\widetilde{m}_0(\omega)\overline{m_0(\omega)} + \widetilde{m}_0(\omega+\pi)\overline{m_0(\omega+\pi)} = 1 \quad \text{a.e..} \tag{6.4}$$

仿造上述方法, 根據 (6.1) 和 (6.2) 我們得到

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_0(\omega)\overline{m_1(\omega)} + \widetilde{m}_0(\omega+\pi)\overline{m_1(\omega+\pi)} &= 0 \\ \widetilde{m}_1(\omega)\overline{m_0(\omega)} + \widetilde{m}_1(\omega+\pi)\overline{m_0(\omega+\pi)} &= 0 \\ \widetilde{m}_1(\omega)\overline{m_1(\omega)} + \widetilde{m}_1(\omega+\pi)\overline{m_1(\omega+\pi)} &= 1 \quad \text{a.e..}\end{aligned}$$

這四條式子是雙正交凌波函數最重要的式子. 只要有兩套自格與凌波函數的特徵函數 $m_0, m_1, \widetilde{m}_0, \widetilde{m}_1$ 滿足上述四個式子, 則此兩套自格凌波函數自動形成一組對偶的雙正交基底. 綜合以上結果, 我們定義

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega+\pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega+\pi) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{M}(\omega) = \begin{bmatrix} \widetilde{m}_0(\omega) & \widetilde{m}_0(\omega+\pi) \\ \widetilde{m}_1(\omega) & \widetilde{m}_1(\omega+\pi) \end{bmatrix}.$$

若

$$\widetilde{M}(\omega)\overline{M^t(\omega)} = 1 \quad \text{a.e.,} \tag{6.5}$$

則對應的兩套自格凌波函數自動形成一組對偶的雙正交基底.

同樣的, 在雙正交凌波函數的情況下, 凌波函數也不是被唯一決定的. 我們有下列定理供讀者參考:

Let ϕ and $\tilde{\phi}$ be a pair of biorthogonal scaling functions, and $\{m_0, \widetilde{m}_0\}$ be the corresponding 2π-periodic characteristic functions. Then $\{m_1, \widetilde{m}_1\}$ satisfy (6.5) if and only if they are chosen from the class

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\widetilde{m}_0(\omega+\pi)}s^{-1}(2\omega) \quad \textit{and} \quad \widetilde{m}_1(\omega) = e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)}s(2\omega),$$

for some $s \in \mathcal{A}$.

REFERENCES

最後, 我們提供幾本自修的參考書或論文.

[1] L. Andersson, N. Hall, B. Jawerth and G. Peters, *Wavelets on closed subsets of the real line,* in "Recent advances in wavelet analysis," Academic Press, Boston, 1994, pp. 1–61.

[2] C. K. Chui, "An introduction to wavelets," Academic Press, Boston, 1992.

[3] A. Cohen, I. Daubechies and J.-C. Feauveau, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets,* Comm. Pure Appl. Math., 45 (1992), pp. 485–560.

[4] A. Cohen, I. Daubechies and P. Vial, *Wavelets on the interval and fast wavelet transforms,* Appl. Comput. Harmonic Anal., 1 (1993), pp. 54–81.

[5] I. Daubechies, "Ten lectures on wavelets," SIAM, Philadelphia, 1992.

[6] B. Jawerth and W. Sweldens, *An overview of wavelet based multiresolution analysis,* Math. Rev. to appear.

[7] G. Strang, *Wavelets and dilation equations: A brief introduction,* SIAM Review, 31 (1989), pp. 614–627.

[8] G. Strang and T. Nguyen, "Wavelets and filter banks," Wellesly-Cambridge Press, Wellesley, 1996.

[9] W. Sweldens, *The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets,* Appl. Comput. Harmonic Anal., 3 (1996), pp. 186–200.

各位也可以參考我的網頁:

`http://www.math.ncu.edu.tw/~shann/`

您可以看到一些論文, 包括我的學生們的碩士論文, 還有相關的指標. 這些網頁隨時在增加改變中.