

國立中央大學

數學研究所

碩士論文

雙正交凌波函數於血壓與
交感神經活性訊號分析之應用

研究生：羅文仁

指導教授：單維彰博士

中華民國九十二年六月十九日



國立中央大學圖書館 碩博士論文授權書

(91年5月最新修正版)

本授權書所授權之論文全文與電子檔，為本人於國立中央大學，撰寫之碩/博士學位論文。(以下請擇一勾選)

- () 同意 (立即開放)
() 同意 (一年後開放)，原因是： _____
() 同意 (二年後開放)，原因是： _____
() 不同意，原因是： _____

以非專屬、無償授權國立中央大學圖書館與國家圖書館，基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、光碟、網路或其它各種方法收錄、重製、與發行，或再授權他人以各種方法重製與利用。以提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名： 羅文仁

論文名稱：雙正交凌波函數於血壓與交感神經活性訊號分析之應用

指導教授姓名：單維彰

系所：數學所 博士 碩士班

學號：90221006

日期：民國 92 年 6 月 19 日

備註：

1. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
2. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應依著作權法相關規定辦理。

摘要

血壓功率頻譜在 0.02 到 1.7 Hz 的頻率範圍內，交感神經具有調節其功率大小的能力。對交感神經活性做特定頻率變動，應該會造成同頻率的血壓變動。這就是欲進行研究的課題。

然而訊號處理的課題裡面，取樣定理與傅立葉轉換是必備工具，同時傅立葉轉換也是大部分訊號處理方法的核心。因此在第一章裡，敘述了取樣定理及其重要性並利用數值積分方法來推導離散傅立葉轉換的公式。在程式的撰寫方面，也對如何使用 MATLAB 來進行快速傅立葉轉換實作方法給了更明確的描述。

儘管傅立葉轉換在訊號分析上應用廣泛，但凌波函數因具備適應性的”窗”與較低的計算複雜度，便成為訊號分析的另一個選擇。在眾多凌波函數中，雙正交凌波函數接近對稱的特性，可使訊號分析結果不產生偏移，因此選擇雙正交凌波函數來進行血壓與交感神經活性訊號分析。所以在第二章裡，把雙正交凌波函數相關知識做一些整理。順便，也重新整理 Battle-Lemaré 和 Meyer 凌波函數。而為了保持論文的完整性，在第三章裡也交代了生物實驗與訊號取得方法。到了第四章，把一些應用在頻譜分析與時間序列相關統計量，統一做了解釋，整理與分析。最後，我們呈現數據分析方法與結果討論。

目錄

第一章 取樣定理與傅立葉轉換	1
1.1 Nyquist 取樣定理	1
1.2 傅立葉轉換	2
1.3 MATLAB, FFT(), IFFT()	5
第二章 雙正交凌波函數	6
2.1 Battle-Lemarié 凌波函數	6
2.2 Meyer 凌波函數	11
2.3 MRA (Multiresolution Analysis)	13
2.4 雙正交凌波函數	17
2.5 完美重建的條件	18
2.6 濾波係數公式	22
第三章 生物實驗與訊號取得	28
3.1 人為刺激部分	28
3.2 無人為刺激部分	29
第四章 頻譜分析與時間序列	31
4.1 Cross-Correlation	31
4.2 Cross-Covariance	31
4.3 CSD 與 PSD	32
4.4 Phase 函數與轉換函數 (Transfer Function)	33
4.5 Coherence	35
4.6 Bartlett 與 Welch 方法	36

第五章 數據分析結果與討論	39
5.1 分析方法	39
5.2 濾波係數取得	40
5.3 凌波分解函式	40
5.4 結果與討論	41
參考文獻	48

第一章 取樣定理與傅立葉轉換

訊號處理的課題裡，取樣定理與傅立葉轉換是必備基本工具，也是訊號處理的核心。所以在這一章裡，我們介紹此兩項主題以及如何使用 MATLAB 進行實作。

1.1 Nyquist 取樣定理

為得到不失真的數位訊號，對類比訊號取樣就顯的重要。取樣頻率 (sampling frequency) 過低的訊號，沒有辦法將訊號重建回來；取樣持續時間 (duration) 過短，無法獲得較低的頻譜。取樣定理關係到兩件事，一是取樣頻率的高低，二是取樣持續時間的長短。

假定數位訊號最大可測頻率 (頻寬) 為 f_{max} ，最小可測頻率為 f_{min} ，取樣定理就是以下兩個條件：

1. 取樣頻率 $\geq 2f_{max}$
2. 取樣持續時間 $\geq 1/f_{min}$

$2f_{max}$ 又稱 Nyquist 頻率。只要滿足上述兩個條件，類比訊號就能以取樣後的數位訊號重建。

實作上，要造出與頻譜對應的頻率橫軸，就需要瞭解取樣定理。而往後在推導離散傅立葉轉換公式時，也提供另一種眼光來建立對應頻率軸方法。

1.2 傅立葉轉換

給定函數 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 則其傅立葉轉換就是

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

而

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

就是 $\hat{f}(\omega)$ 的傅立葉逆轉換。

經由 Euler 公式

$$e^{\pm i\omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$$

得知, \cos 在單位時間 $([0, 1])$ 內的震盪頻率是 $\frac{\omega}{2\pi}$, 這樣的頻率值會造成程式撰寫時的困擾。

令 $\omega \mapsto 2\pi\omega$ 進行變數變換, 如此 ω 就會是真正的震盪頻率。重寫傅立葉轉換公式

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\omega x} dx$$

逆轉換公式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i2\pi\omega x} d\omega$$

有傅立葉轉換與逆轉換的公式後, 便可進一步推導離散傅立葉轉換 (DFT) 的公式。

假設當 $|x| > \frac{A}{2}$ 時 $f(x) = 0$, 則

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\omega x} dx = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x)e^{-i2\pi\omega x} dx$$

把 $[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$ 等分 N 段, 令 N 為偶數, 使得 $\Delta x = \frac{A}{N}$, 令

$$x_n = n\Delta x, \quad n = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2}$$

同時假設已知 $f(x_n)$ ，爲了符號上的方便，令

$$g(x) = f(x)e^{-2i\pi\omega x}$$

然後應用梯形法做數值積分，便可以導出積分值的近似估計是

$$\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} g(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left\{ g\left(-\frac{A}{2}\right) + 2 \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} g(x_n) + g\left(\frac{A}{2}\right) \right\}$$

理論上一個點值的改變，不影響積分值，故可以爲了計算的方便，而令 $g\left(-\frac{A}{2}\right) = g\left(\frac{A}{2}\right)$ ，所以

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} g(x)dx \\ &\approx \Delta x \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} g(x_n) \\ &= \frac{A}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(x_n)e^{-2i\pi\omega x_n} \end{aligned}$$

到此 $\hat{f}(\omega)$ 便可以對任何的 ω 來求值。

然後必須決定有多少和有哪些的 ω 要被使用。由於取樣頻率是 $\frac{N}{A}$ ，且 $\frac{N}{A} \geq 2f_{max}$ 。令 $\Omega = \frac{N}{A}$ ，則 $f_{max} = \frac{\Omega}{2}$ 所以 ω 的範圍是 $[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}]$ 。又因爲取樣持續時間爲 A ，所以 $1/f_{max} = A$ ，故最小可測頻率爲 $\frac{1}{A}$ 。使用最小可測頻率當作頻率域區間的切割間距

$$\Delta\omega = \frac{1}{A}$$

則 $\hat{f}(\omega)$ 只能在

$$\omega_k = k\Delta\omega, \quad k = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2}$$

上取值。因爲只有 N 個節點的值被用在積分估計上，這給了一個好理由讓 ω 取 N 個值就好。

所以取

$$k = -\frac{N}{2} + 1 \dots \frac{N}{2}$$

且

$$\Omega = N\Delta\omega = \frac{N}{A}, \quad \Delta x\Delta\omega = \frac{1}{N}$$

令

$$f_n = f(x_n), \quad F_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-\frac{i2\pi nk}{N}}$$

則

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega_k) &\approx \frac{A}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(x_n) e^{-i2\pi\omega_k x_n} \\ &= \frac{A}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} \\ &= \frac{A}{N} F_k \end{aligned}$$

所以，給定 N 個節點值 f_n ，DFT 就是將 f_n 轉換成 F_k 的線性映射。有了這些 F_k 後就可推論 $\hat{f}(\omega_k)$ 差不多就是 $\frac{A}{N} F_k$ ，到此便完成離散傅立葉轉換公式的推導。

假設在 $[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}]$ 內估計傅立葉逆轉換的積分，離散傅立葉逆轉換公式 (IDFT) 也可以經由相同的推導過程並得到類似離散傅立葉轉換公式的結果：

$$\begin{aligned} f(x_n) &\approx \frac{\Omega}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{f}(\omega_k) e^{i2\pi x_n \omega_k} \\ &= \frac{\Omega}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{f}(\omega_k) e^{\frac{i2\pi nk}{N}} \end{aligned}$$

在此便不再贅述。

1.3 MATLAB, FFT(), IFFT()

我們可以直接用上一節推導出的 DFT 公式，在電腦中寫出轉換與逆轉換程式。若有一維度為 N 的向量 f 要進行 DFT，使用推導公式所寫出的程式將有 $O(N^2)$ 的計算量。計算所需的時間會相當可觀，而所謂快速傅立葉轉換 (FFT) 就是 DFT 快速演算法。

MATLAB 裡有兩個函式，分別是 `fft()` 與 `ifft()`，可用來對數據進行快速傅立葉轉換與逆轉換。在此，我們打算使用這兩個函式來幫助撰寫程式。當程式接收到向量 f 後，會先檢查維度 N 是否為偶數，如果不然，則傳回 f 並終止計算，再來便呼叫 `fft()` 函式進行運算。因 `fft()` 函式本身的寫法，所有負的頻率成分都會與正的頻率成分交換位置存放。所以在進行 `fft()` 後就必須把負的頻率成分重新挪回來，然後再乘上一個常數 $\frac{A}{N}$ 。這樣就會與上一節所推導的結果相同。

```
f=fft(f);  
f=[f(N/2+2:N) f(1:N/2+1)];  
f=A*f/N;
```

DFT 程式片段

以上使用 MATLAB 所寫出的程式片段。值得注意的是，進行逆轉換時，若要逆轉換的向量是由 `fft()` 所製造的話，則必須再把正負頻率對調後再進行逆轉換。否則將導致不正確的結果。而只乘 B (亦即上一節的 Ω) 不除以 N 的原因在於 `ifft()` 已把 $\frac{1}{N}$ 包含在內了。

```
f=[f(N/2:N) f(1:N/2-1)];  
f=ifft(f);  
f=B*f;
```

IDFT 程式片段

第二章 雙正交凌波函數

雖然雙正交的凌波函數才是我們的主角，但是我們也收錄 Battle-Lemarié 和 Meyer 凌波函數，並重新整理一遍。

2.1 Battle-Lemarié 凌波函數

Battle-Lemarié wavelets 就是利用正交化的原理，將基本樣條函數 (B-spline) 造成 wavelets。

若令 $\phi(x)$ 是 Battle-Lemarié wavelets 的自格函數 (scaling function)。令 $\phi_s(x)$ 為 p 階基本樣條函數，且令 $\text{Supp}\phi_s(x)$ 對稱於 $x = 0$ (若 p 是偶數)，或對稱於 $x = \frac{1}{2}$ (若 p 為奇數)。因此 $\{\phi_s(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是線性獨立。為方便起見，這裡的編號 p 與 [1] 一樣；當 $p = 1$ 時，就是一般的零階樣條函數，也就是方盒函數 (box function)。

基本樣條函數已是自格函數，根據 [1, 性質 3.4]，若要讓 $\{\phi_s(x - k)\}$ 形成一組正則基底，必須滿足

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_s(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (2.1.1)$$

已知

$$\hat{\phi}_s(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}\sigma} \left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right)^p$$

其中

$$\sigma = \begin{cases} 1, & p \text{ 是奇數} \\ 0, & p \text{ 是偶數} \end{cases}$$

當 $p \geq 2$ 的時候，(2.1.1) 是不成立的，所以令

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_s(\omega + 2k\pi)|^2$$

則 $H(\omega)$ 會是 2π 且恆正的週期函數, 因此令 $\hat{\phi}$ 與 $\hat{\phi}_s$ 間的關係為

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{H(\omega)}} \hat{\phi}_s(\omega)$$

從 [5, p88] 得知

$$H(2\omega) = -\frac{\sin^{2p}(\omega)}{(2p-1)!} \left(\frac{d^{2p-1}}{d\omega^{2p-1}} \cot(\omega) \right)$$

例如

$$p = 2, \quad H(\omega) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$p = 3, \quad H(\omega) = \frac{2}{15} + \frac{11}{15} \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{2}{15} \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

令 $m_0(\omega)$ 是 $\phi(x)$ 的特徵函數, 則

$$\begin{aligned} m_0(\omega) &= \frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)} \\ &= \frac{\sqrt{H(\omega)} \hat{\phi}_s(2\omega)}{\sqrt{H(2\omega)} \hat{\phi}_s(\omega)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\omega} \end{aligned}$$

這樣就可以找到 c_k 了。 c_k 有無窮多個非零係數, 但屬於多項式消散, c_k 對稱於 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{2}$ 。以下幾頁, 附上了 $p = 2, 3, 4, 5$ 的 c_k , 其取捨的方法為

$$\left| \sum_{k=-n}^n c_k - 2 \right| \leq 5 \times 10^{-6}$$

k	c_k	k	c_k
1	1.15632663044579	10	0.00072356251301
2	0.56186292858765	11	-0.00031720285555
3	-0.09772354847998	12	-0.00017350463597
4	-0.07346181335547	13	0.00007828566487
5	0.02400068439163	14	0.00004244222575
6	0.01412883469138	15	-0.00001954273439
7	-0.00549176158313	16	-0.00001052790655
8	-0.00311402901546	17	0.00000492117905
9	0.00130584362611		

p=2

k	c_k	k	c_k
1	0.96218850337647	14	0.00005149189024
2	0.19510923625013	15	-0.00049372120202
3	-0.17654342735281	16	-0.00001800199152
4	-0.02934097454448	17	0.00019929573525
5	0.05937163254037	18	0.00000645605761
6	0.00599366802040	19	-0.00008104108370
7	-0.02137287194074	20	-0.00000236237046
8	-0.00158880221461	21	0.00003314796576
9	0.00806884459996	22	0.00000087836323
10	0.00047350887755	23	-0.00001362322068
11	-0.00312788862797	24	-0.00000033091386
12	-0.00015251802585	25	0.00000562112308
13	0.00123483234718		

p=3

k	c_k	k	c_k
1	1.08347151256866	17	0.00079186999511
2	0.61365927344264	18	0.00065352962214
3	-0.07099595988486	19	-0.00040359352543
4	-0.15561584376755	20	-0.00032858869439
5	0.04536924029542	21	0.00020653439292
6	0.05949363315412	22	0.00016635055029
7	-0.02429097832036	23	-0.00010606378924
8	-0.02543084221422	24	-0.00008468217554
9	0.01228286171785	25	0.00005463412644
10	0.01159864029621	26	0.00004330399578
11	-0.00615725880956	27	-0.00002821716465
12	-0.00549057846550	28	-0.00002222839431
13	0.00309247829086	29	0.00001460738679
14	0.00266173875568	30	0.00001144675909
15	-0.00156092382332	31	-0.00000757744078
16	-0.00131125702104		

p=4

k	c_k	k	c_k
1	0.94230165749406	22	0.00004787742388
2	0.23935992558848	23	-0.00049967097120
3	-0.19570263414422	24	-0.00002541971835
4	-0.06300189335224	25	0.00029121541201
5	0.09290180706792	26	0.00001365185942
6	0.02154391441627	27	-0.00017028132917
7	-0.04843594992729	28	-0.00000740280973
8	-0.00821303447623	29	0.00009984794930
9	0.02609527570506	30	0.00000404735857
10	0.00342535357307	31	-0.00005869053564
11	-0.01436521645402	32	-0.00000222859178
12	-0.00153122737290	33	0.00003457175320
13	0.00803102176857	34	0.00000123475901
14	0.00072110789898	35	-0.00002040281402
15	-0.00454212409729	36	-0.00000068786968
16	-0.00035284122449	37	0.00001206099474
17	0.00259182385834	38	0.00000038506747
18	0.00017766463859	39	-0.00000714042396
19	-0.00148934274931	40	-0.00000021649660
20	-0.00009143746086	41	0.00000423299342
21	0.00086066342350		

p=5

2.2 Meyer 凌波函數

令 $m_0(\omega)$ 是自格函數 $\phi(x)$ 的特徵函數, 則 $m_0(\omega)$ 是 2π 週期函數, 對 Meyer 凌波函數而言, 其特徵函數定義為

$$m_0(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{3} \\ \beta(\omega), & \frac{\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{2\pi}{3} \\ 0, & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

根據 [1, 性質 3.5], 需選擇 $\beta(\omega)$ 使得 $m_0(\omega)$ 滿足

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

若 $\phi(x)$ 滿足

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

則 $\{\phi(x - k)\}$ 是正則基底。所以將上面的等式繼續推演, 可以得到

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^p}\right)$$

由於

$$m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0, \quad |\omega| \geq \frac{4\pi}{3}$$

$$m_0\left(\frac{\omega}{2^2}\right) = m_0\left(\frac{\omega}{2^3}\right) = m_0\left(\frac{\omega}{2^4}\right) = \dots = 1, \quad |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}$$

所以 $\hat{\phi}(\omega)$ 就可以被化簡成

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} m_0\left(\frac{\omega}{2}\right), & |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0, & |\omega| > \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

令 $\phi(x)$ 是 $\hat{\phi}(\omega)$ 的傅立葉逆轉換, 則 $\{\phi(x - k)\}$ 就會是正則基底。

同樣的想法, 令 $m_1(\omega)$ 是 $\psi(x)$ 的特徵函數, 使得 $\hat{\psi}(\omega)$ 滿足

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

根據 [1, (3.77)] 得知

$$m_1(\omega) = -e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega + \pi)}$$

則

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)m_0\left(\frac{\omega}{4}\right), & |\omega| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0, & |\omega| > \frac{8\pi}{3} \end{cases}$$

故

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \frac{2\pi}{3} \\ m_1\left(\frac{\omega}{2}\right), & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ e^{-i\frac{\omega}{2}}m_0\left(\frac{\omega}{4}\right), & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0, & |\omega| > \frac{8\pi}{3} \end{cases}$$

令 $\psi(x)$ 為 $\hat{\psi}(\omega)$ 的傅立葉逆轉換, 則 $\{\psi(x - k)\}$ 也是一組正則基底。

經由以上的推導, 可見 Meyer 凌波的正則基底是不唯一的, 選擇適當的 $\beta(\omega)$ 符合 $m_0(\omega)$ 的定義, 就可以導出一組正則基底。以下是一個標準的例子。

令

$$\beta(\omega) = \cos\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3|\omega|}{\pi} - 1\right)\right], \quad \frac{\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{2\pi}{3}$$

其中 $v(x)$ 是平滑的階梯函數, 滿足以下兩個條件:

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

和

$$v(x) + v(1-x) = 1$$

選擇

$$v(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$$

得到

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{2\pi}{3} \\ \cos\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right], & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0, & |\omega| \geq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$
$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \frac{2\pi}{3} \\ e^{\frac{i\omega}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right], & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ e^{\frac{i\omega}{2}} \cos\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{4\pi}|\omega| - 1\right)\right], & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

將 $\hat{\phi}(\omega)$ 及 $\hat{\psi}(\omega)$ 進行傅立葉逆轉換，就可以得到 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 。這兩個函數是無限涵蓋的， $\phi(x)$ 對稱於 $x = 0$ ， $\psi(x)$ 對稱於 $x = \frac{1}{2}$ ，不過隨著 $|x|$ 的漸增，它們的值就會越接近 0。

在前面 Battle-Lemarié 自格函數討論到 p 值，但是 Meyer 凌波沒有所謂的 p 值，因為 $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ ，所以 $\int x^k \psi(x) dx = 0$ ， $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ ，也就是 Meyer 凌波正交於所有多項式，因此無須討論 p 值。

2.3 MRA (Multiresolution Analysis)

MRA，或稱為多重解析空間分析，指的是一閉子空間族 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$

$$\dots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots$$

且

$$\forall f \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2^j}\right) \in V_0$$

$$\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad \cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

那麼 V_j 中將會有 Riesz 基底。在此，我們只討論正則基底。若令 $\phi \in V_0$ ，則 $\{\phi(x - n)\}$ 會在 V_0 中形成一組正則基底。

定義

$$\phi_{jk} = \sqrt{2^j} \phi(2^j x - k)$$

則對每個 $j \in \mathbb{Z}$ ， $\{\phi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 會組成 V_j 中的一組正則基底。

把 V_j 想像成 $L^2(\mathbb{R})$ 的不同尺度的逼近空間；則對任意給定的 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 令 $P_j(f) \in V_j$ 是 f 在 V_j 中的投影，則

$$P_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk}$$

又因為 $\phi \in V_0 \subset V_1$ ，所以 ϕ 必須滿足以下形式的等式

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \phi(2x - n) \quad (2.3.1)$$

上述等式稱為自格等式 (scaling equation)，而滿足自格等式的函數 ϕ 稱為自格函數 (scaling function)， c_n 為自格係數 (scaling coefficients)。

經由 $\{\phi(x - k)\}$ 的正交性質便可推得 c_n 必須滿足以下等式

$$\sum_n c_n c_{n+2k} = 2\delta_{k0}$$

然後與這個 MRA 相關聯的凌波函數就可以定義成

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \phi(2x - n), \quad d_n = (-1)^n c_{-n+1} \quad (2.3.2)$$

這裡的 c_n 可以是實數或是複數, 爲了方便, 令所有的 c_n 都是實數。

同樣地, 若定義

$$\psi_{jk}(x) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

則 $\{\psi_{jk}\}$ 會是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一組正則基底。

對每一個固定的 j , $\{\psi_{jk}\}$ 組成 W_j 空間的一組正則基底, 而凌波係數 $\langle f, \psi_{jk} \rangle$ 代表著函數 f 在 V_j 與 V_{j+1} 中投影的差異, 也就是

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j \\ P_{j+1}(f) &= P_j(f) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk} \end{aligned}$$

在 V_j 空間中, 可以計算 f 的投影係數與凌波係數

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_{jk} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n d_{2k+n} \langle f, \phi_{j+1,n} \rangle \\ \langle f, \phi_{jk} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n c_{2k+n} \langle f, \phi_{j+1,n} \rangle \end{aligned}$$

令 $h_l = \frac{1}{\sqrt{2}} c_l$, $g_l = \frac{(-1)^l}{\sqrt{2}} c_{-l+1}$, 所以

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_{jk} \rangle &= \sum_n g_{2k+n} \langle f, \phi_{j+1,n} \rangle \\ \langle f, \phi_{jk} \rangle &= \sum_n h_{2k+n} \langle f, \phi_{j+1,n} \rangle \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

上述公式包含疊積 (convolution) 的架構。提供如何從較小尺度的投影係數來計算較大尺度投影係數與凌波係數方法, 是屬於分解的公式。而從較大尺度投影係數組成較小尺度投影係數的合成公式就是

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_{j+1,m} \rangle &= \sum_k \langle f, \phi_{jk} \rangle \langle \phi_{jk}, \phi_{j+1,m} \rangle + \langle f, \psi_{jk} \rangle \langle \psi_{jk}, \phi_{j+1,m} \rangle \\ &= \sum_k h_{m+2k} \langle f, \phi_{jk} \rangle + g_{m+2k} \langle f, \psi_{jk} \rangle \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

然後將 (2.3.3) 代入 (2.3.4), 整理得到

$$\langle f, \phi_{j+1,m} \rangle = \sum_n \left\{ \sum_k \left[h_{m+2k} h_{n+2k} + g_{m+2k} g_{n+2k} \right] \right\} \langle f, \phi_{j+1,n} \rangle$$

若想要完美的重建就必須 $m = n$ 且

$$\sum_k \left[h_{m+2k} h_{n+2k} + g_{m+2k} g_{n+2k} \right] = \delta_{mn}$$

再加上 $g_n = (-1)^n h_{-n+1}$, 所以上述等式可簡化成

$$\sum_l h_l h_{l+2m} = \frac{1}{2} \sum_l c_l c_{l+2m} = \delta_{m0}$$

在 [1, (3.40)] 得知, 函數 ψ 要成爲一個”凌波母函數”必須要滿足

$$\int \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

其中 $\hat{\psi}$ 是 ψ 的傅立葉轉換。

代入 $\omega = 0$, 加上 $\int \phi(x) dx = 1$ 這個條件, 就得到

$$\hat{\psi}(0) = \int \psi(x) dx = 0$$

可見 ψ 會是一個高頻濾波函數。且

$$\sum_n (-1)^n c_n = 0$$

因此

$$\sum_n g_n = 0$$

因爲 (2.3.1), 同時對等式兩邊進行傅立葉轉換, 發現

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

$m_0(\omega)$ 是 2π 週期函數, 爲 $\phi(x)$ 的特徵函數

$$m_0(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n c_n e^{-in\omega}$$

所以完美重建的條件就可寫成

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

代入 $\omega = 0$ 就會得到

$$m_0(\pi) = 0, \quad |m_0(0)|^2 = 1$$

且

$$\hat{\phi}(0) = \int \phi(x) dx = 1$$

可見 $\phi(x)$ 會是一個低頻濾波函數。

根據前面 (2.3.2), 再加上 $\|\psi\| = 1$ 這個條件, 則 $\{\psi_{jk}\}$ 會是一組在 $L^2(\mathbb{R})$ 的正則基底。並

且可以輕易的證明

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$$

2.4 雙正交波函數

到目前爲止, 所討論的正交波函數都是使用同一組低頻與高頻濾波係數 h_n, g_n 來進行分解和重建。從正交波函數可以推廣到雙正交波函數。也就是, 使用兩組對偶基底 (dual basis) ψ_{jk} 和 $\tilde{\psi}_{jk}$ 每一組都是由單一個函數 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 的脹縮平移所造成。

雙正交凌波基底會比正交凌波基底來得複雜，因為會有兩組多層解析空間。

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

$$\dots \subset \tilde{V}_{-2} \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_2 \subset \dots$$

令 W_j 空間是 V_j 與 V_{j+1} 空間的差異，只是 $W_j \not\subset V_j$ 。在正交基底的情況下，會有

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j+1,k} \rangle|^2 = \sum_k |\langle f, \phi_{jk} \rangle|^2 + |\langle f, \psi_{jk} \rangle|^2$$

在雙正交的情形下，因為 $W_j \not\subset V_j$ ，所以只會存在兩個實數 A, B 滿足 $0 < A \leq 1 \leq B$ 使得

$$\begin{aligned} A \sum_k |\langle f, \phi_{jk} \rangle|^2 + |\langle f, \psi_{jk} \rangle|^2 &\leq \sum_k |\langle f, \phi_{j+1,k} \rangle|^2 \\ &\leq B \sum_k |\langle f, \phi_{jk} \rangle|^2 + |\langle f, \psi_{jk} \rangle|^2 \end{aligned}$$

至此可知，僅有上下界只能保證 $\{\psi_{jk}\}$ 會是一組 $L^2(\mathbb{R})$ 中的 Riesz 基底，卻不能保證使用這組基底可以完美的重建。基於這個理由，於是引進對偶基底的概念。相對於 W_j ，同樣的也會有 \tilde{W}_j 為 \tilde{V}_j 與 \tilde{V}_{j+1} 間的差異，而且有以下「雙正交」的性質： $\tilde{W}_j \perp V_j$ ， $W_j \perp \tilde{V}_j$ 。往後我們更會看到

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk} = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{jk} \rangle \tilde{\psi}_{jk}$$

2.5 完美重建的條件

在此我們想要造出 4 組濾波係數，分別是

$$h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \tilde{h} = (\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \tilde{g} = (\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

其中的兩組 $\{h, g\}$ 用來分解, 另外兩組 $\{\tilde{h}, \tilde{g}\}$ 用來合成。先從一組訊號 $c^0 = (c_n^0)_{n \in \mathbb{Z}}$ 開始, 把 h, g 拿來對 c^0 進行疊積運算, 得到分解公式

$$\begin{aligned} c_n^1 &= \sum_k h_{2n-k} c_k^0 \\ d_n^1 &= \sum_k g_{2n-k} c_k^0 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

再來分別把 \tilde{h}, \tilde{g} 拿來對 c_n^1, d_n^1 進行疊積運算然後相加, 得到合成公式

$$\tilde{c}_l^0 = \sum_n \left[\tilde{h}_{2n-l} c_n^1 + \tilde{g}_{2n-l} d_n^1 \right] \quad (2.5.2)$$

把 (2.5.1) 代入 (2.5.2)

$$\tilde{c}_l^0 = \sum_k \left[\sum_n \tilde{h}_{2n-l} h_{2n-k} + \tilde{g}_{2n-l} g_{2n-k} \right] c_k^0$$

而完美的重建就是 $\tilde{c}_l^0 = c_l^0$, 故要求

$$\sum_n \left[\tilde{h}_{2n-l} h_{2n-k} + \tilde{g}_{2n-l} g_{2n-k} \right] = \delta_{lk}$$

令 $z = e^{-i\omega}$, 可以把訊號與濾波係數表成一個 z 函數 (z-function)。

$$h(z) = \sum_n h_n z^n, \quad c^0(z) = \sum_n c_n^0 z^n, \quad \text{etc, ...}$$

令

$$\bar{a}(z) = \sum_n a_{-n} z^n = \sum_n a_n z^{-n}$$

則對 $|z| = 1$ 和 $a_n \in \mathbb{R}$ 會有 $\overline{a(z)} = \bar{a}(z)$ 。

有了以上資訊, 便可改寫分解公式為

$$\begin{aligned} c^1(z^2) &= \frac{1}{2} \left[h(z) c^0(z) + h(-z) c^0(-z) \right] \\ z d^1(z^2) &= \frac{1}{2} \left[g(z) c^0(z) - g(-z) c^0(-z) \right] \end{aligned}$$

而合成公式爲

$$\tilde{c}^0(z) = \frac{1}{2} \left[\bar{h}(z)h(z) + \bar{g}(z)g(z) \right] c^0(z) + \frac{1}{2} \left[\bar{h}(z)h(-z) - \bar{g}(z)g(-z) \right] c^0(-z)$$

從上式來看完美重建就是

$$\frac{1}{2} \left[h(z)\bar{h}(z) + g(z)\bar{g}(z) \right] = 1 \quad (2.5.3a)$$

$$\frac{1}{2} \left[h(-z)\bar{h}(z) - g(-z)\bar{g}(z) \right] = 0 \quad (2.5.3b)$$

因爲 (2.5.3a) 所以我們知道 $h(-z)$ 和 $g(-z)$ 並不會同時爲 0, 也就是它們不會有共同零根, 或稱爲互質。從 (2.5.3b) 發現, 若 $g(-z) = 0$, 則 $h(-z) = 0$ 或 $\bar{h}(z) = 0$, 加上 $g(-z)$ 與 $h(-z)$ 互質, 所以 $\bar{h}(z) = 0$ 。同理, 當 $h(-z) = 0$ 時, 也會得到 $\bar{g}(z) = 0$ 也就是

$$\begin{cases} g(-z) \text{ 與 } \bar{h}(z) \text{ 有共同的零根} \\ h(-z) \text{ 與 } \bar{g}(z) \text{ 有共同的零根} \end{cases}$$

所以

$$\bar{h}(z) = g(-z)p(z) \quad (2.5.4)$$

$$\bar{g}(z) = h(-z)q(z)$$

這裡的 p, q 都是 z 的整數次方多項式。

形式上, 在 (2.5.4) 的 $\bar{g}(z)$ 這個等式兩邊同乘 $g(-z)$, 得到

$$\bar{g}(z) \cdot g(-z) = h(-z)q(z) \cdot g(-z) \cdot \frac{p(z)}{p(z)} = \frac{q(z)}{p(z)} \cdot \bar{h}(z)h(-z)$$

因爲 (2.5.3b) 所以 $q(z) = p(z)$ 也就是

$$\bar{h}(z) = g(-z)p(z) \quad (2.5.5)$$

$$\bar{g}(z) = h(-z)p(z)$$

再把推得的 \tilde{h}, \tilde{g} 代回 (2.5.3a), 得到

$$p(z) \left[h(z)g(-z) + h(-z)g(z) \right] = 2$$

而上式的 $p(z)$ 唯一可能的解即為

$$p(z) = \alpha z^k$$

所以

$$h(z)g(-z) + h(-z)g(z) = 2\alpha^{-1}z^{-k}$$

α 是複數, k 是整數。再把 $p(z)$ 代入 (2.5.5) 得到

$$\tilde{h} = \alpha z^k g(-z), \quad \tilde{g} = \alpha z^k h(-z)$$

特別來說, 令 $k = 0, \alpha = -1$ 得到

$$\tilde{h} = (-1)g(-z), \quad \tilde{g} = (-1)h(-z)$$

或者

$$g_n = (-1)^{n+1}\tilde{h}_{-n}, \quad \tilde{g}_n = (-1)^{n+1}h_{-n} \quad (2.5.6)$$

然後代入 (2.5.3a), 得到

$$h(z)\tilde{h}(z) + h(-z)\tilde{h}(-z) = 2$$

也就是

$$\sum_n h_n \tilde{h}_{n+2k} = \delta_{k0}$$

2.6 濾波係數公式

從模仿正交凌波基底時的自格函數 ϕ 開始來定義 $\tilde{\phi}$ 。沿用前面的定義方式

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_n c_n \phi(2x - n) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n) \\ \tilde{\phi}(x) &= \sum_n \tilde{c}_n \tilde{\phi}(2x - n) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{h}_n \tilde{\phi}(2x - n)\end{aligned}$$

令 m_0 和 \tilde{m}_0 分別為 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 的特徵函數

$$\begin{aligned}m_0(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_n c_n e^{-in\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\omega} \\ \tilde{m}_0(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_n \tilde{c}_n e^{-in\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \tilde{h}_n e^{-in\omega}\end{aligned}$$

對 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 做傅立葉轉換

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\omega) &= m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \\ \hat{\tilde{\phi}}(\omega) &= \tilde{m}_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\end{aligned}$$

只要 $m_0(0) = 1 = \tilde{m}_0(0)$ ，也就是 $\hat{\phi}(0) = 1 = \hat{\tilde{\phi}}(0)$ 時，則上述的兩個無限乘積就會收斂。

這代表 $\tilde{\phi}$ 和 ϕ 一樣是低頻濾波函數。

同樣的，可以用造正交凌波函數 ψ 的方法來造出雙正交的 ψ 和 $\tilde{\psi}$

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_n d_n \phi(2x - n) \\ \tilde{\psi}(x) &= \sum_n \tilde{d}_n \tilde{\phi}(2x - n)\end{aligned}$$

其中 $d_n = (-1)^l \tilde{c}_{-l+1}$ ， $\tilde{d}_n = (-1)^l c_{-l+1}$ 且令 $g_n = \frac{1}{\sqrt{2}} d_n$ ， $\tilde{g}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{d}_n$ 再加上 (2.5.6) 這個條件

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2x - n) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^{n+1} \tilde{h}_{-n} \phi(2x - n)$$

$$\tilde{\psi}(x) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{g}_n \tilde{\phi}(2x - n) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^{n+1} h_{-n} \tilde{\phi}(2x - n)$$

一樣對 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 等號兩邊做傅立葉轉換

$$\widehat{\tilde{\psi}}(\omega) = e^{\frac{i\omega}{2}} \overline{\tilde{m}_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\widehat{\psi}(\omega) = e^{\frac{i\omega}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

代入 $\omega = 0$, 得到 $\tilde{m}_0(\pi) = 0 = m_0(\pi)$, 也就是 $\widehat{\tilde{\psi}}(0) = 0 = \widehat{\psi}(0)$, 這代表 $\tilde{\psi}$ 和 ψ 一樣是高頻濾波函數。

如同前面所定義的 ψ_{jk} 一樣, 可以定義

$$\psi_{jk} = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k)$$

$$\tilde{\psi}_{jk} = \sqrt{2^j} \tilde{\psi}(2^j x - k)$$

根據 [4, 定理 3.2], 只要存在某個常數 C 和 ϵ 使得 $\widehat{\phi}$ 和 $\widehat{\tilde{\phi}}$ 滿足

$$|\widehat{\phi}(\omega)| \leq C(1 + |\epsilon|)^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$$

$$|\widehat{\tilde{\phi}}(\omega)| \leq C(1 + |\epsilon|)^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$$

也就是 $\widehat{\phi}, \widehat{\tilde{\phi}} \in L^2(\mathbb{R})$, 就會有 $\psi, \tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$, 然後對任意 $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \tilde{\psi}_{jk}$$

$\{\psi_{jk}\}, \{\tilde{\psi}_{jk}\}$ 均會組成一組 $L^2(\mathbb{R})$ 中的 Riesz 基底。而 $\{\tilde{\psi}_{jk}\}$ 是 $\{\psi_{jk}\}$ 的對偶基底, 上述的等式告訴我們, 不論我們是使用那一組基底來對 f 做分解, 都可以再由另一組對偶基底將 f 重建回來。

接下來要介紹更多有關特徵函數 m_0 的性質。若特徵函數 m_0 滿足

$$m_0(\omega) = e^{-i\lambda\omega} |m_0(\omega)|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

就稱 m_0 具有線性相位差 (linear phase)。由於 m_0 是 2π 週期函數, 所以會迫使 $\lambda \in \mathbb{Z}$, 特別來說, 可以令 $\lambda = 0$ 。加上只要 c_n 是實數, 就會使得上式寫成

$$m_0(-\omega) = m_0(\omega)$$

這樣的對稱型態, 對稱中心為 0 (對稱於 c_0) 所以又稱為偶對稱。

上面對 m_0 的討論已經排除了 Haar 函數的情況, 這是因為 Haar 的自格函數 ϕ 是對稱於 $\frac{1}{2}$ 。而不是 0 也就是

$$\phi_{Haar}(1-x) = \phi_{Haar}(x)$$

對稱於 $\frac{1}{2}$ 的自格函數 ϕ 所對應的特徵函數 m_0 不滿足上述偶對稱的等式, 而滿足

$$e^{-\frac{i\omega}{2}} m_0\left(\frac{-\omega}{2}\right) = e^{\frac{i\omega}{2}} m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$e^{i\omega} m_0(\omega)$ 是 2π 週期函數, 且對稱於 c_1 , 或稱為奇對稱。

在此假設所有被討論的自格函數 $\phi, \tilde{\phi}$ 其特徵函數 m_0, \tilde{m}_0 不是偶對稱就是奇對稱; 用序列的眼光來看, 也就是序列對稱於 c_0 不然就是對稱於 c_1 。

選定自格函數 ϕ , 有 m_0 後, 我們還需要決定一個 \tilde{m}_0 來使得下述等式成立

$$m_0(\omega) \overline{\tilde{m}_0(\omega)} + m_0(\omega + \pi) \overline{\tilde{m}_0(\omega + \pi)} = 1 \quad (2.6.1)$$

\tilde{m}_0 和 m_0 一樣具有相同的偶對稱或奇對稱的性質。

另一方面, m_0, \tilde{m}_0 應要被 $(1 + e^{-i\omega})^L (1 + e^{-i\omega})^{\tilde{L}}$ 所整除, $L, \tilde{L} \geq 1$ 。若要求 L, \tilde{L} 能越大, 則 $\psi, \tilde{\psi}$ 越平滑。

根據 [4, 性質 6.2] 得知, 若 m_0, \tilde{m}_0 是偶對稱, 則 m_0, \tilde{m}_0 就可表成

$$m_0(\omega) = \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2l} p_0(\cos \omega)$$

$$\tilde{m}_0(\omega) = \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2\tilde{l}} \tilde{p}_0(\cos \omega)$$

若為奇對稱, 則可以寫成

$$m_0(\omega) = e^{\frac{-i\omega}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2l+1} p_0(\cos \omega)$$

$$\tilde{m}_0(\omega) = e^{\frac{-i\omega}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2\tilde{l}+1} \tilde{p}_0(\cos \omega)$$

其中 p_0 是一多項式, $p_0(-1) \neq 0$, $l, \tilde{l} \in \mathbb{N}$ 。

不論是偶對稱或是奇對稱, 代入 (2.6.1) 都會得到下列等式

$$\left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2k} p_0(\cos \omega) \tilde{p}_0(\cos \omega) + \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k} p_0(-\cos \omega) \tilde{p}_0(-\cos \omega) = 1$$

在偶對稱時 $k = l + \tilde{l}$; 在奇對稱時 $k = l + \tilde{l} + 1$ 。若用 $\frac{1-\cos \omega}{2} = \sin^2 \frac{\omega}{2}$ 代入上式, 得到

$$\left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2k} P(\sin^2 \frac{\omega}{2}) + \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k} P(\cos^2 \frac{\omega}{2}) = 1$$

或者是

$$(1-x)^k P(x) + x^k P(1-x) = 1, \quad x = \sin^2 \frac{\omega}{2} \quad (2.6.2)$$

根據 [4, 定理 6.3] 若 p_1, p_2 為次數分別是 n_1, n_2 的多項式, 且 p_1, p_2 沒有共同的零根 (互質); 則會存在唯一的, 最高次數分別為 $n_2 - 1, n_1 - 1$ 的多項式 q_1, q_2 使得

$$p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1 \quad (2.6.3)$$

成立。應用這個定理, 令 $p_1(u) = (1-u)^k, p_2(u) = u^k$, 因為 $p_1(1-u) = p_2(u)$, 用 $1-u$ 來代替 u 代入 (2.6.3) 得到

$$p_2(u)q_1(1-u) + p_1(u)q_2(1-u) = 1$$

令 $\tilde{q}_1(u) = q_2(1-u)$, $\tilde{q}_2(u) = q_1(1-u)$ 根據 q_1, q_2 的唯一性, 得到 $q_2(u) = q_1(1-u)$ 使得 $P(u) \equiv q_1(u)$ 的確會是 (2.6.3) 的一個解。在此情況下, 重寫 (2.6.2)

$$P(u) = (1-u)^{-k} - u^k(1-u)^{-k}P(1-u)$$

在等號右手邊對 $P(u)$ 做泰勒展開, 已知 P 的次數是 $k-1$, 所以只要展開前面的 k 項就好, 得到

$$P(u) = \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k+n-1}{n} u^n$$

同時, $P(u)$ 也是次數最小的解。

所以

$$P(\sin^2 \frac{\omega}{2}) = p_0(\cos \omega) \tilde{p}_0(\cos \omega) = \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1+n}{n} (\sin^2 \frac{\omega}{2})^n$$

$$P(\cos^2 \frac{\omega}{2}) = p_0(-\cos \omega) \tilde{p}_0(-\cos \omega) = \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1+n}{n} (\cos^2 \frac{\omega}{2})^n$$

以下我們介紹 CDF [4] 之特殊雙正交凌波函數的造法。令 ϕ_N 為階數 N 的樣條函數 (見 2.1 節), 從 [4, p540] 得知對應的特徵函數 m_0^N 也可以寫成

$$\begin{aligned} m_0^N(\omega) &= \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right) N e^{i\omega \lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \\ &= e^{-i\sigma \frac{\omega}{2}} (\cos \frac{\omega}{2})^N \\ &= \sum_{n=-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^{N-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} 2^{-N} \binom{N}{n + \lfloor \frac{N}{2} \rfloor} e^{-in\omega} \\ &= \frac{1}{2} \sum_n c_n e^{-in\omega} \end{aligned}$$

且

$$m_0^{2L}(-\omega) = m_0^{2L}(\omega), \quad m_0^{2L+1}(-\frac{\omega}{2}) = e^{i\omega} m_0^{2L+1}(\frac{\omega}{2})$$

令 $l = L$, $p_0 \equiv 1$ 則滿足 (2.6.1) 的 \tilde{m}_0 就會是

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0^{N, \tilde{N}} &= e^{-i\sigma\frac{\omega}{2}} \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{\tilde{N}} \left[\sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1+n}{n} \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2n} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \tilde{c}_n e^{-in\omega}\end{aligned}$$

$\tilde{N} \geq 1$, $N + \tilde{N} = 2k$ 為偶數, 而

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{if } \tilde{N} \text{ 為偶數} \\ 1, & \text{if } \tilde{N} \text{ 為奇數} \end{cases}$$

在第五章將用 $N = 6$, $\tilde{N} = 8$ 的濾波係數, 做數據分析。

第三章 生物實驗與訊號取得

許多心血管疾病和自主神經系統活性息息相關，若要直接偵測內臟自主神經活性，必須經過傷害性較大的手術，對人而言，就失去醫療本意。所以對臨床醫學而言，發展出傷害性小且能忠實反應自主神經活性的方法就顯得重要。為了保持文章的完整性，特地將 [2] 裡所提到之動物實驗方法收錄在此，以供參考。

3.1 人為刺激部分

六隻 Wistar 老鼠 (重量 380 至 450 克) 由腹腔注射 pentobarbital (50 mg/kg)，麻醉後，做股動、靜脈插管以便測量動脈壓和藥物的靜脈注射。做氣管插管並接上人工呼吸器，將呼氣的二氧化碳含量控制在 3.5% 至 4.0% 之間。經由恆溫電毯維持動物的肛溫於 $38 \pm 1^\circ\text{C}$ 。

接著，切開老鼠腹腔，自左腎上方的結締組織中分離出腎交感神經，以鑷子將腎交感神經之遠心端夾捏破壞，把近心端置於不銹鋼雙極電極上，充灌矽膠於電極和神經周圍用以固定神經和電極並藉此絕緣及防止神經乾枯。神經的電位變化訊號經過一頻寬為 30 ~ 3K Hz 之帶通濾波器進行濾波，再放大一萬倍後以多通道磁帶記錄器記錄於磁帶中。同時，血壓訊號經動脈插管傳至轉能器 (頻率範圍: $DC \sim 75\text{Hz}$) 轉換為電位訊號，利用類比放大器，與交感神經之電訊號同步記錄於磁帶中。待實驗結束後，靜脈注射神經節阻斷劑 hexamethonium bromide (20 mg/kg) 以去除交感神經活性，記錄無神經電訊號時系統的背景雜訊值。

老鼠頭部以立體定位儀固定，以伏臥姿勢將咬棒調整於耳間線以下十毫米處。自枕骨大孔揭開枕骨、露出腦幹背部，三極金屬電極以 20 度斜角插入腦部，探測 obex 前後各 2.0 毫米、中線左右各 2.0 毫米、距背部表面深度 0.5-2.5 mm 中的交感興奮區。在以電刺激的方式找到交感興奮區後，於開始組串電刺激之前，先靜脈注射神經-肌肉偶和的阻斷劑 gallamine (50 mg/kg)， β_1 -adrenoceptor 的阻斷劑 atenolol (1 mg/kg) 及 angiotensin II converting

enzyme 的抑制劑 captopril (10 mg/kg)。此後每隔十至十五分鐘便補充注射各藥物以上述劑量的四分之一。接著以組串電刺激器 (Anapulse stimulator model 302-T, WPI Inc., New Haven, CT) 進行不同條件的方波脈衝刺激。刺激條件的參數如下：脈衝時距為 500 ms, 脈衝強度為 10-50 mA, 脈衝頻率為 50 Hz, 整組脈衝的時距為 500 ms。而兩組脈衝間的時距為 0.6 至 50 秒, 一個組串刺激的時間為 80-90 秒。兩個組串之間的時間時距則視動物的血壓及交感神經活性何時回復穩定而定。於本實驗中, 每一隻老鼠大約可完成 20 個組串的刺激。

實驗結束後, 取 64 秒記錄於磁帶內的每個組串刺激所得之血壓及交感神經之類比訊號, 利用類比/數位轉換器 BIOPAC (System, Inc., Goleta, CA) 以 6 kHz 取樣頻率轉換為數位訊號。交感神經的數位訊號另再利用重置時間設為 20 毫秒的數位積分器作前處理。

3.2 無人為刺激部分

六隻 Wistar 老鼠 (350 至 450 克) 以 pentobarbital (50 mg/kg) 麻醉後, 如第一部份所述完成股動、靜脈插管及埋設腎交感神經的記錄電極。另外以一不鏽鋼雙極電極由腹腔伸入並往前抵住橫膈的肌肉, 以便記錄呼吸過程中橫膈肌肉的肌電位變化。手術完畢後, 靜待動物恢復至對捏其後腳掌能產生縮腿反射時便由靜脈插管施以 pentobarbital (12.5 mg/kg) 作小劑量麻醉, 記錄動物在甦醒過程中, 血壓及交感神經的訊號。當動物又恢復到能產生縮腿反射後就停止記錄並對動物進行感壓反射去除手術。手術完成後, 如上之記錄程序再重複一次。記錄所得之血壓及神經訊號每隔一分鐘取 64 秒的時間長度, 因為每段記錄的總時距約為二十五至三十五分鐘, 所以每段記錄可得到 13 組資料。

另外六隻 Wistar 老鼠 (重量 350 至 450 克) 於股動、靜脈插管及埋設橫膈肌電位和腎交感神經活性之記錄電極手術完成後, 待動物恢復至對捏其後腳掌能產生縮腿反射時, 由靜脈插管施以 pentobarbital (40 mg/kg) 作較大劑量麻醉, 記錄動物在甦醒過程中血壓及交感神經的

訊號。當動物又恢復縮腿反射後，停止記錄。記錄所得之血壓及神經訊號每隔五分鐘取64秒的時間長度。因為每段記錄的總時距約為七十至九十分鐘，所以每段記錄可分成15組的資料。

在 [2] 這篇論文裡指出，血壓頻譜中 0.02 到 1.7 Hz 的頻率範圍內，交感神經具有調節其功率大小的能力。對於特定頻率的交感神經活性變動會造成同頻率的血壓變動。而且隨著刺激頻率的增加，交感神經活性對造成血壓變動量會成指數下降。

第四章 頻譜分析與時間序列

在數位訊號處理上, 有很多統計方法被用來估測不同數位訊號間的相關性等等的定量方法。在這裡, 我們要對這些被用來估測頻譜的相關統計方法, 做進一步的進行解釋與討論。

4.1 Cross-Correlation

令 $x(n), y(n)$ 為兩組有限維度的數位訊號, 則它們彼此間的 cross-correlation 就是先將其中一組數位訊號 $x(n)$ 固定, 另一組數位訊號 $y(n)$ 再經由利用時間延遲 (time delay) 來與 $x(n)$ 進行內積後再求其期望值, 也就是

$$r_{xy}(m) = E\{x(n)\overline{y(n+m)}\}$$

所以

$$r_{xx}(m) = E\{x(n)\overline{x(n+m)}\}$$

$$r_{yy}(m) = E\{y(n)\overline{y(n+m)}\}$$

也由於時間延遲這個因素, 使得訊號處理上的 cross-correlation 會不同於統計上的單一數值形式, 而改以一組序列的形式存在。特別來說, 則我們稱 r_{xx} 和 r_{yy} 為 autocorrelation。

4.2 Cross-Covariance

另一種類似 cross-correlation 的統計量就是 cross-covariance。先將兩組訊號, 先減去個別的期望值後, 再做 cross-correlation 運算, 也就是

$$c_{xy}(m) = E\{[x(n) - \mu_x]\overline{[y(n+m) - \mu_y]}\}$$

μ_x 為 $x(n)$ 的期望值, μ_y 為 $y(n)$ 的期望值, 因為期望值在運算時具有線性關係所以上述 c_{xy} 又可以寫成以下形式

$$c_{xy}(m) = r_{xy}(m) - \mu_x \overline{\mu_y}$$

4.3 CSD 與 PSD

有了 cross-correlation 的概念後, 就可以進一步探討頻譜分析的方法。兩組訊號 $x(n), y(n)$ 的 Cross Spectral Density (CSD), 就是利用 $x(n), y(n)$ 的 cross-correlation 來重新定義一個新的三角多項式

$$P_{xy}(\omega) = \sum_m r_{xy}(m) e^{-i\omega m}$$

而

$$P_{xx}(\omega) = \sum_m r_{xx}(m) e^{-i\omega m}$$
$$P_{yy}(\omega) = \sum_m r_{yy}(m) e^{-i\omega m}$$

分別是 $x(n)$ 與 $y(n)$ 的 Power Spectral Density (PSD)。

令

$$X(\omega) = \sum_n x(n) e^{-i\omega n}$$
$$Y(\omega) = \sum_n y(n) e^{-i\omega n}$$

分別為 $x(n)$ 與 $y(n)$ 的三角多項式, 再加上 r_{xy} 這條式子, 就可以重新改寫上述的 CSD 公式

$$\begin{aligned}
P_{xy}(\omega) &= \sum_m r_{xy}(m)e^{-i\omega m} \\
&= \sum_m \sum_n x(n)y(n+m)e^{-i\omega m} \\
&= \sum_m \sum_n x(n)y(m)e^{-i\omega m}e^{i\omega n} \\
&= \left(\sum_n x(n)e^{i\omega n} \right) \left(\sum_m y(m)e^{-i\omega m} \right) \\
&= \overline{X(\omega)} \cdot Y(\omega)
\end{aligned}$$

同理

$$P_{xx}(\omega) = \overline{X(\omega)} \cdot X(\omega)$$

$$P_{yy}(\omega) = \overline{Y(\omega)} \cdot Y(\omega)$$

4.4 Phase 函數與轉換函數 (Transfer Function)

首先定義轉換函數公式

$$P_{xy}(\omega) = H(\omega)P_{xx}$$

與 Phase 函數公式

$$\Phi(\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}[P_{xy}(\omega)]}{\text{Re}[P_{xy}(\omega)]} \right\}$$

以下我們經由一種特殊情況來說明 Phase 與轉換函數。

令 $x(t), y(t)$ 兩組訊號間的關係只有單純的時間差 τ , 也就是

$$x(t + \tau) = y(t)$$

上面這條式子是以 $y(t)$ 做為標的來看的: 若 $\tau > 0$ 表示在時域上 $x(t)$ 領先 $y(t)$, 若 $\tau < 0$ 代表 $x(t)$ 落後 $y(t)$, $\tau = 0$ 則是 $x(t) = y(t)$ 。這種領先與落後的關係取決於以 $x(t)$ 或 $y(t)$ 做為標的來看的結果。

對上述 $y(t)$ 進行傅立葉轉換, 得到

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int y(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int x(t + \tau)e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{i\omega\tau} \int x(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{i\omega\tau} X(\omega) \end{aligned}$$

將上面所推導出來的式子帶入 CSD 公式, 得到

$$P_{xy}(\omega) = \overline{X(\omega)} \cdot e^{i\omega\tau} X(\omega) = e^{i\omega\tau} P_{xx}(\omega)$$

與轉換函數作比較就會發現

$$H(\omega) = e^{i\omega\tau}$$

也就是 $x(t)$ 與 $y(t)$ 在只有時間差的情況下, 其轉換函數僅是因為時間差所造成的相位差 $e^{i\omega\tau}$ 而已。

因為 P_{xx} 本身是一個實函數, 套用 Euler 公式, 就會得到

$$P_{xy}(\omega) = P_{xx}(\omega) \cos(\omega\tau) + iP_{xx}(\omega) \sin(\omega\tau)$$

令

$$\text{Re}[P_{xy}(\omega)] = P_{xx}(\omega) \cos(\omega\tau)$$

$$\text{Im}[P_{xy}(\omega)] = P_{xx}(\omega) \sin(\omega\tau)$$

分別為 P_{xy} 的實部與虛部。所以

$$\frac{\text{Im}[P_{xy}(\omega)]}{\text{Re}[P_{xy}(\omega)]} = \tan(\omega\tau)$$

令

$$\Phi(\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}[P_{xy}(\omega)]}{\text{Re}[P_{xy}(\omega)]} \right\} = \omega\tau$$

$\Phi(\omega)$ 就是在一般論文裡常見的 "phase"。因此針對不同的頻率點 ω 就可以找出 $x(t), y(t)$ 相對的時間差, 也就是

$$\tau = \frac{\Phi(\omega)}{\omega}$$

要注意的是, 上式要有意義必須 $\omega \neq 0$ 才行。

所以, 對一個固定的頻率點 ω 而言, 如果時間差 $\tau = 0$ 則 $x(t) = y(t)$, $X(\omega) = Y(\omega)$, $P_{xy}(\omega) = P_{xx}(\omega)$, $H(\omega) = 1$ 而且 $\Phi(\omega) = 0$ 。

4.5 Coherence

Coherence 被用來估測兩組訊號在頻譜的相似度

$$C_{xy}(\omega) = \frac{|P_{xy}(\omega)|^2}{P_{xx}(\omega)P_{yy}(\omega)} = \frac{\overline{P_{xy}(\omega)}P_{xy}(\omega)}{P_{xx}(\omega)P_{yy}(\omega)}$$

其值會介於 $[0, 1]$, 值越接近 1, 代表兩組訊號在頻譜的相似度越大。若將前述的 P_{xx}, P_{xy}, P_{yy} 直接帶入, 則

$$\begin{aligned} C_{xy}(\omega) &= \frac{\overline{X(\omega)} \cdot Y(\omega) \cdot \overline{X(\omega)} \cdot Y(\omega)}{\overline{X(\omega)} \cdot X(\omega) \cdot \overline{Y(\omega)} \cdot Y(\omega)} \\ &= \frac{X(\omega) \cdot \overline{Y(\omega)} \cdot \overline{X(\omega)} \cdot Y(\omega)}{\overline{X(\omega)} \cdot X(\omega) \cdot \overline{Y(\omega)} \cdot Y(\omega)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

會得到均為 1 的常數函數, 並無鑑別能力, 也不能提供資訊。為使得所計算的 coherence 值有鑑別能力, 以下說明兩種改進的方法。

4.6 Bartlett 與 Welch 方法

前述計算 coherence 方法, 是直接從 P_{xx}, P_{xy}, P_{yy} 得來。想像維度 N 的 $x(n)$ 是分佈在整個時域上, 然後利用一個維度與 $x(n)$ 相同的 "窗" 把 $x(n)$ 從整個時域上取下來。這麼直接且粗糙的 "窗", 就會使得 P_{xx}, P_{xy}, P_{yy} 有很大的 variance, 這樣的結果, 就算是我們把 $x(n)$ 維度增加也無濟於事。

為降低 P_{xx} 的 variance, 將維度 N 的 $x(n)$ 打散成 m 段維度均為 $\frac{N}{m}$ 且不重疊的分片訊號。分別對每片訊號進行 P_{xx} 運算, 得到分片訊號各自的 $P_{xx}^1, P_{xx}^2, \dots, P_{xx}^m$ 然後取 $P_{xx} = (P_{xx}^1 + P_{xx}^2 + \dots + P_{xx}^m)/m$ 來取代原先定義的 P_{xx} 。如此, 就能降低 P_{xx} 的 variance。而且原訊號 $x(n)$ 所能切割的分片訊號數目越多, 其 P_{xx} 之 variance 值降低效果就越明顯。當 m 越接近 N 時, P_{xx} 的值越趨近於 0。同樣的, 也可以使用相同的方法來計算 P_{xy} 和 P_{yy} 。這種將訊號分割為不重疊的分片訊號方法, 就稱為 Bartlett 方法。

Bartlett 方法已經可以有效降低 P_{xx}, P_{xy} 和 P_{yy} 的 variance, 但仍有缺失。有限維度的訊號, 所能分割的分片訊號總數是有限的, 最多就 N 段, 每段分片訊號就只有包含一個數值, 這樣固然可以達到最多的分片訊號, 卻也因為每段分片訊號過短而未能包含足夠資訊。

為解決 Bartlett 方法的缺失, 在 1976 年 Welch 提供了一個改善的方法。主要的改進就是, 允許分片訊號可以互相的重疊。藉由重疊度的增加, 就可以得到足夠多的分片訊號, 而且每段分片訊號都能夠含有足夠的資訊。如此, 就能更有效降低計算 P_{xx}, P_{xy}, P_{yy} 時所造成 variance。

MATLAB 的 Signal Processing Toolbox 裡, 提供一個使用 Welch 方法的 `cohere()` 函式來計算兩組訊號的 coherence, 在對 Welch 方法稍有了解以後, 就能使用 `cohere()` 這個函式來計算。

以下是 MATLAB 之 `cohere()` 函式的宣告:

$$[\text{coh}, f] = \text{cohere}(x, y, \text{nFFT}, F_s, \text{window}, \text{noverlap})$$

其中 x, y 是兩組準備用來計算彼此 coherence 的訊號, nFFT 為分片訊號的維度, F_s 是取樣頻率。window 則是幫分片訊號加 "窗", 例如: hamming, hanning 等等。"窗" 的維度必須與 nFFT 的值相同。加了 "窗" 的分片訊號在進行 FFT 時就可以減少 leakage 的產生。最後, noverlap 為分片訊號間彼此的重疊度。當 $\text{noverlap}=0$ 時, 就相當於使用 Barlett 方法。

以下我們將以一套實驗來建議 nFFT 和 noverlap 這兩個參數。我們用來做實驗的訊號為 allcos 和 allsin , 定義如下: 單位時間內震盪頻率為 k 的 \cos 與 \sin 函數, 分別以 20 為間隔進行累加得到兩個新函數

$$f_{\cos}(x) = \sum_k \cos(2\pi kx) \quad k = 0, 20, 40 \dots, k_{\max}$$

$$f_{\sin}(x) = \sum_k \sin(2\pi kx) \quad k = 0, 20, 40 \dots, k_{\max}$$

k_{\max} 為最大震盪頻率, 且 $f_{\cos}(x), f_{\sin}(x)$ 具有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差。在時間 $x \in [0, t]$ 的範圍內, 對 $f_{\cos}(x)$ 與 $f_{\sin}(x)$ 以 f_s 的取樣頻率進行取樣得到數位訊號 allcos 與 allsin 。因此 allcos 與 allsin 維度均為 $N(=f_s \times t)$ 。

令

$$\text{nFFT} = N * (m/10), \quad m = 1, 2, \dots, 10$$

$$\text{noverlap} = \text{floor}(\text{nFFT} * \text{op}), \quad \text{op} = 0, 0.1, \dots, 0.9$$

然後針對不同的分片訊號維度 (nFFT) 與重疊度百分比 op (overlap percentage) 來分別代入 $\text{cohere}()$ 計算 allcos 與 allsin 的 coherence 值, 並統計其值大於 0.5 所佔之百分比。下表是以 $k_{\max} = 100, f_s = 1024, t = 10$ 進行計算的例子, 其中 - 代表不具鑑別能力的狀況, 故不予統計。

$\frac{op}{m}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	66	33	33	44	33	68	33	34	33	33
2	66	31	38	44	54	69	31	31	31	31
3	71	59	53	42	37	74	59	38	31	33
4	<u>78</u>	53	69	42	55	73	46	63	30	31
5	70	<u>73</u>	<u>76</u>	<u>80</u>	85	75	<u>80</u>	<u>79</u>	<u>78</u>	80
6	-	-	-	-	56	<u>82</u>	65	48	71	34
7	-	-	-	-	-	-	56	63	69	<u>86</u>
8	-	-	-	-	-	-	-	-	68	59
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	80
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

經由上表可以看出，除了那些因為 nFFT 維度過長所造成 allcos 與 allsin 訊號彼此無法分辨 (coherence 都是 1, 以 - 表示) 不予統計的情況外，在 $m=5$ 時，均有較大的值。雖然 $op=90\%$, $m=6$ 時有 85.91 的值，但是使用維度較長的分片訊號維度與較高的重疊度百分比，會比其他種組合含有更多的分片訊號，造成更大的計算量，所以 $op=40\%$, $m=5$ 會是比较好的選擇，也就是 $nFFT=\frac{N}{2}$ 且 $noverlap=\frac{N}{5}$ 。

此外，會影響上表數值還有 k_{max} 這個因素。 k_{max} 設定的越大，整體數值就會跟著下降，因為較寬的頻率範圍，就相對會有更多 coherence 小於 0.5 的頻率成分。但是即使數值下降，相對最大值產生處還是不變。以此便可作為計算 coherence 時，選擇參數時的一個依據。

以上所討論的 nFFT 與 noverlap 兩參數，將會在第五章計算血壓與交感神經活性訊號彼此間的 coherence 時使用。

第五章 數據分析

5.1 分析方法

在 [2] 論文裡提到, 他們的頻譜分析方法是先將記錄血壓和交感神經活性的數位訊號分段做離散傅立葉轉換, 取平均, 再進行頻譜分析。這種不經修飾的訊號往往包含許多雜訊, 而影響到頻譜分析的品質和準確性。在此我們引進 Wavelet 的想法, 希望利用 Wavelet 本身具有適應性的 "窗" 的特性, 來幫助我們進行訊號在離散傅立葉轉換前的前置處理, 以期降低計算量並不失濾波效果。在實作上, 利用 MATLAB 來進行計算與程式開發。以下在頻譜分析上, 也會將注意力全集中在 0.02 到 1.7 Hz 的頻率範圍內來進行觀察。

將存有血壓 (BP) 和交感神經活性 (SNA) 與訊號紀錄時間的資料載入, 分別進行凌波分解, 將訊號分解成不同層級的低頻與高頻。在 0.02 到 1.7 Hz 範圍內, 交感神經活性刺激頻率會對血壓產生同頻震盪。此同頻震盪, 存在於血壓與交感神經活性的各層低頻訊號裡。

MATLAB 的 Wavelet Toolbox 提供與凌波函數相關的函式。例如: `dwt()` 與 `wavedec()` 分別提供一層凌波分解與多層凌波分解功能。只是對雙正交系列的凌波函數而言, 使用 Wavelet Toolbox 所提供的函式反而會有訊號經過分解後, 低頻與高頻分解係數維度不正確的反效果。以 $j = 10$ 維度 1024 為例:

n	A_n	D_n	$N/2^n$	diff
1	520	520	512	8
2	268	268	256	12
3	142	142	128	14
4	79	79	64	15
5	46	48	32	16
6	32	32	16	16
7	24	24	8	16
8	20	20	4	16
9	18	18	2	16
10	17	17	1	16

此差異性，又會對分解後的低頻係數在傅立葉轉換時造成頻譜偏移的不正確結果。於是，捨棄 Wavelet Toolbox 所帶來的便利性，重新撰寫凌波分解的程式來修正訊號分解後的低高頻訊號維度不正確的問題。

5.2 濾波係數取得

針對 Biothogonal 6.8 (bior6.8)，它需要兩組低高濾波係數，其中一組用來進行分解，另一組用來進行合成，也就是需要四組不同的濾波係數，低頻分解 (Ld)，低頻合成 (Lr)，高頻分解 (Hd) 與高頻合成 (Hr) 四組係數。使用 Wavelet Toolbox 裡的 `wfilters()` 就可以取得這四組低高頻濾波係數，事先以 `.mat` 的形式存放，在必要時載入。

5.3 凌波分解函式

`mydwt()` 是進行凌波分解的函式，主要的演算方法來自 [1, Ch4]。宣告如下：

$$[A, D, L, tout]=mydwt(sig, step, tin)$$

其中 `sig` 是欲進行凌波分解的訊號，`step` 是要進行分解的 "次數"，`tin` 則是訊號所記錄的時間。`mydwt()` 函式只處理 2 的整數次方維度的訊號，若輸入訊號不符，則採取截去訊號的方式來處理。並將對應的時間點傳回給 `tout`。只要訊號本身所記錄的時間夠長，截去訊號的動作並無不妥。

由於 $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ ，在雙正交凌波函數空間並不成立，於是使用 A_n (Approximation) 和 D_n (Detail) 分別表示訊號在第 n 層凌波分解的低頻與高頻係數，也就是

$$A_{n-1} = A_n \oplus D_n$$

然後將每次分解的低頻與高頻訊號分別收集合併到 A 及 D 裡面。由 L 記錄各層凌波分解的低高頻訊號的維度。同時, L 本身的維度也代表了此訊號所分解的次數。

adcoefget() 可從 A 與 D 裡取出各層分解的低頻與高頻係數。宣告如下:

$$w=\text{adcoefget}(x, L, \text{level})$$

其中 x 可以是 A 或 D, L 是存放各層低頻與高頻維度的向量, level 則是指定欲取出哪一層低頻或高頻訊號, 然後傳回給 w。

血壓或交感神經活性訊號在經由 mydwt() 進行分解後, 可以把所有的低頻係數與高頻係數重新看成兩個不同類型的訊號, 透過傅立葉轉換進行頻譜分析, 這部分使用 fftspec() 來完成。

$$[\text{spec}, \text{freq}]=\text{fftspec}(\text{sig}, \text{time})$$

fftspec() 需要輸入欲進行傅立葉轉換的訊號 (sig) 及其所記錄的時間 (time), 然後傳回訊號的頻譜 (spec) 與其對應的頻率軸 (freq)。

5.4 結果與討論

以 [2] 內提供所謂 sti3 的 BP 和 SNA 訊號為例 (Figure 7), 刺激頻率 0.63 Hz 的 SNA 對 BP 所造成的同頻振盪經過 FFT 後清晰可見 (Figure 1)。但是所計算出來的頻譜與其 coherence 並不理想 (Figure 3)。原因在於直接進行 FFT 的 BP 和 SNA 訊號本身含有的雜訊, 而這些雜訊便污染了分析結果。於是在對 BP 和 SNA 進行 FFT 前, 先將訊號進行凌波分解, 每經過一次凌波分解, 細節的部分就會跟著轉移到高頻, 就相當是對每一層低頻訊號進行濾波。

經過凌波分解後, BP 和 SNA 就可以分別拆解成兩組不同系列的低頻係數 (A_n) 與高頻係數 (D_n)。可以發現, 大部分的高頻係數都是雜訊和部份頻率的轉移。而欲觀察的 0.02 到 1.7 頻率範圍就存在於各層的低頻係數裡面。除非經過非常多層的凌波分解才有機會把我們要觀察的頻率轉移到高頻。然而過多的凌波分解, 所得到的低頻與高頻的維度過短, 若再對其進行 FFT 也無法再獲得什麼資訊。

對各層低頻係數分別進行 FFT, phase 和 coherence 的計算, 取出第一層低頻的分析結果並與直接進行 FFT 的結果比較就會發現, 同頻振盪更加清晰可見 (Figure 2), 整個頻譜也因為凌波分解效果而變得比較乾淨, 也有較好的 coherence (Figure 4)。若繼續對往下幾層的低頻作計算, 在不影響觀察的頻率範圍內, 雖然濾波的效果持續但是其結果都和第一層的結果差異並不大 (Figure 5, Figure 6), 這代表大部分的雜訊在第一層凌波分解就已經濾除。

每一層的低頻訊號維度都是其上一層的低頻訊號維度的一半, 時域上所對應的尺度增加一倍, 對應的取樣頻率減半, 可測頻寬跟著減半。若把每層低頻係數的 FFT 所對應的最大頻率取出來看, 就會看到最大可測頻寬的變化, 每經過一層分解, 所得可測頻寬就對減半。假定 F 為訊號可測頻寬, 則第 n 層分解的低頻 (A_n) 可測頻寬就是 $F/2^n$ 。加上 F 是有限的, 所以不可能會無止盡的分下去。令 $[f_{min}, f_{max}]$ 為欲觀察的頻率範圍, 則

$$f_{max} \leq F/2^n$$

也就是

$$n \leq \log_2(F/f_{max})$$

在欲觀察的頻率範圍內, 最多只要做 n 層的凌波分解就可以了。例如取樣頻率 6144, 可測頻寬為 3022, 假定要觀察的頻率範圍在 $[0,2]$ 則

$$n \leq \log_2(3022/2) = 10.5613$$

也就是只要做 10 層可以。

除了 0.63 Hz 的同頻震盪頻率外, 血壓訊號頻譜在 0.05 Hz 的頻率有個不小的振幅。為看清楚, 於是將 sti3 訊號分解到第 13 層。

sti3 的血壓訊號經過 13 層凌波分解後可以看到在第 10 層以前都是密密麻麻的合成波, 但是到了第 10 層以後就有了明顯變化 (Figure 8)。除了血壓本身的 pulse 外, 更看到了在第 10 層以前都看不到的一個現象 — 一個超低頻的波。從這個超低頻波的涵蓋範圍來換算出對應頻率, 就會發現剛好與血壓頻譜中 0.05 Hz 的頻率相符。到了第 13 層, 我們所要觀察的 0.63 Hz 的同頻震盪頻率也已經轉移到高頻, 所以這個超低頻波也就完全顯現出來了。

傅立葉轉換可以得知訊號具有哪些不同頻率的成分, 但是卻無法得知含有這些頻率的訊號在時域上的長相。而凌波轉換可以將訊號拆解成在時域上含有不同成份的低頻與高頻訊號, 但是卻沒有辦法明確的指出訊號所含有的頻率。所以將凌波轉換搭配傅立葉轉換就可以兼顧訊號在時域與頻率域的表徵。

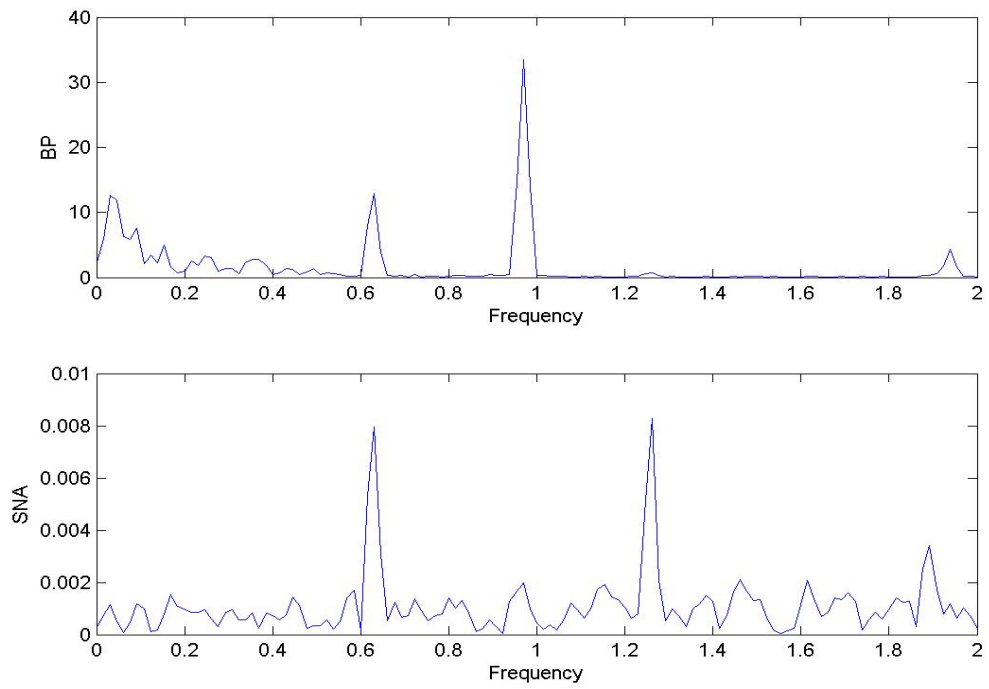


Figure 1: 直接進行 FFT 的 BP 與 SNA 頻譜

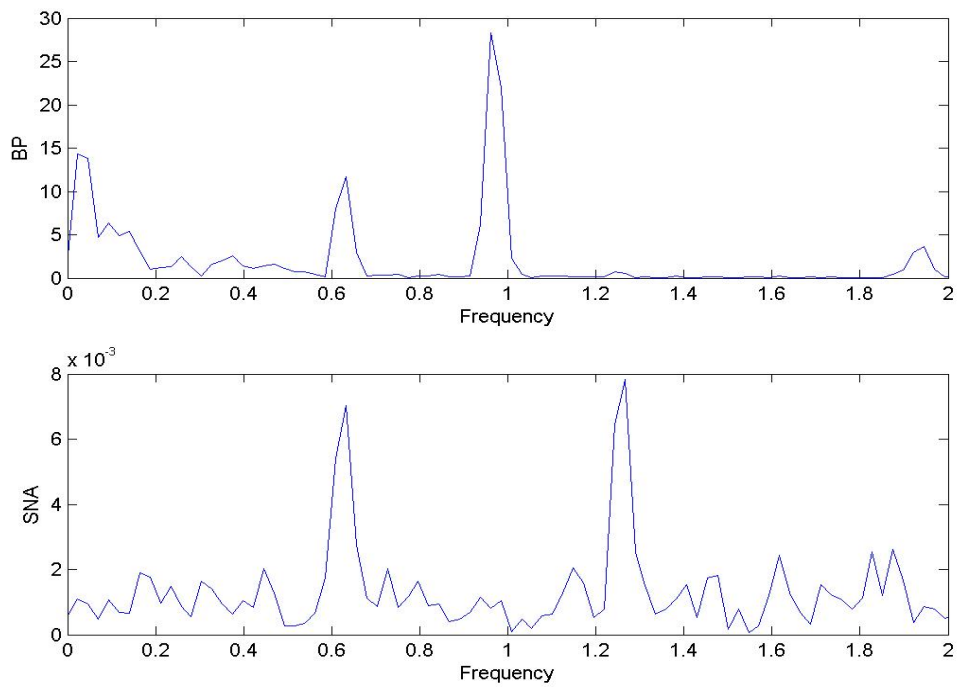


Figure 2: 一層凌波分解的 BP 與 SNA 低頻頻譜

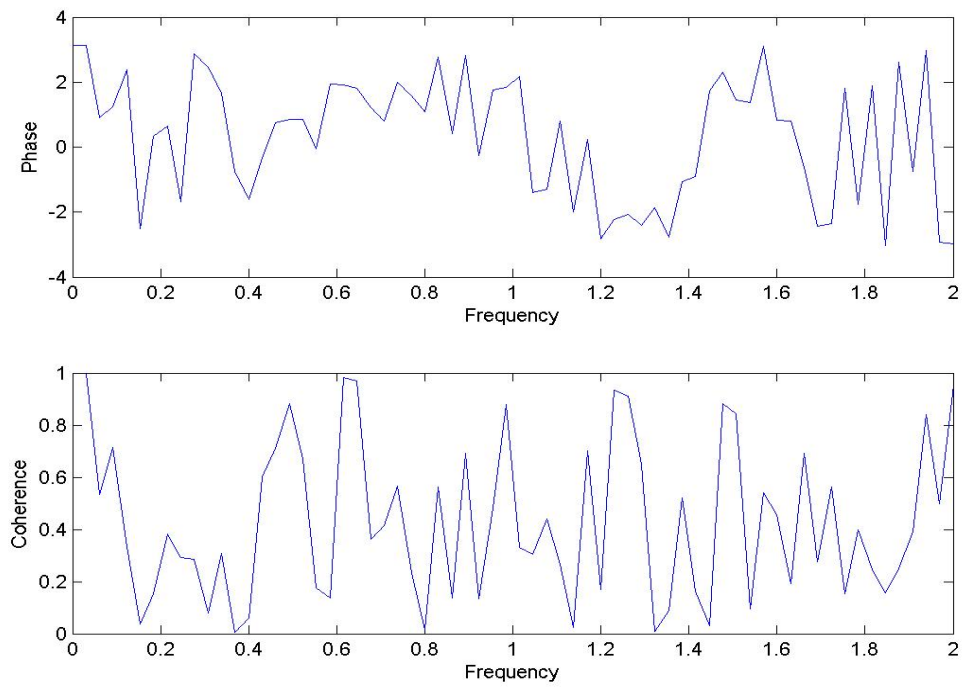


Figure 3: BP, SNA 直接使用 FFT 的 Phase, Coherence

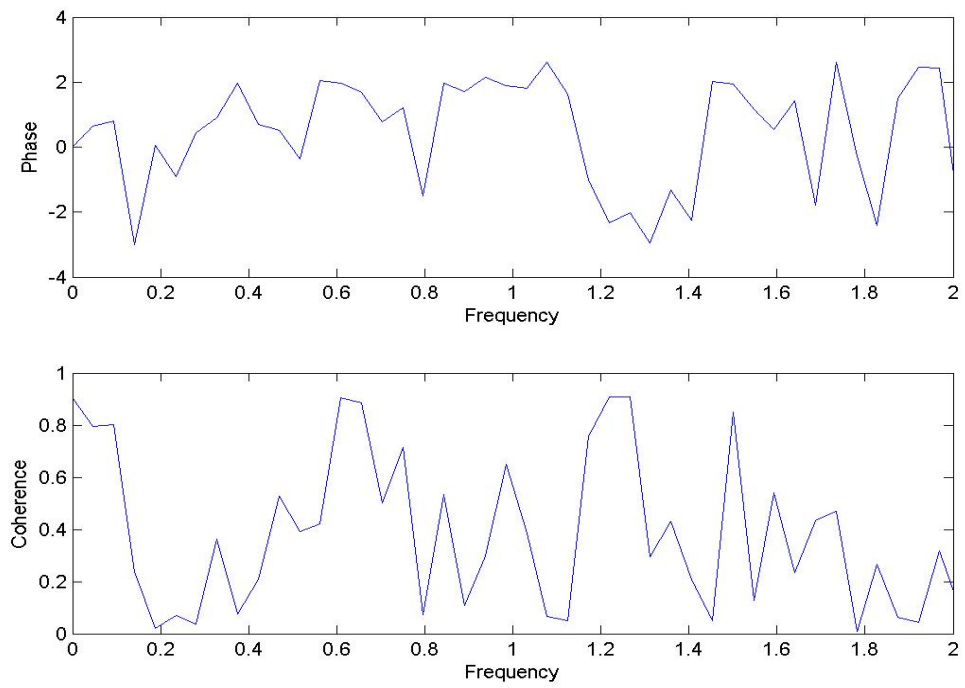


Figure 4: BP, SNA 一層凌波分解低頻的 Phase, Coherence

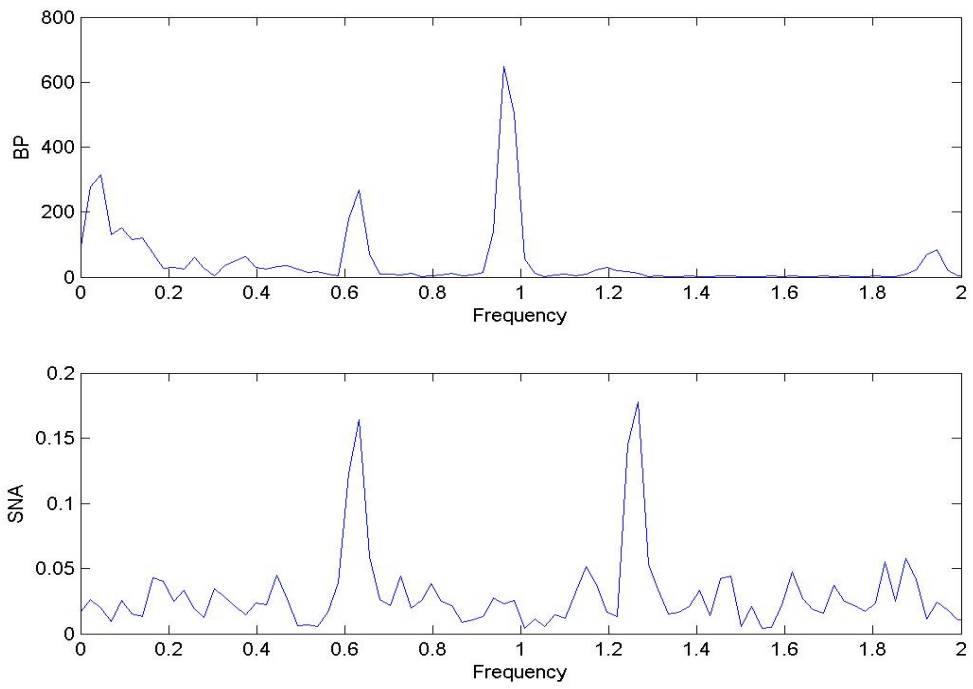


Figure 5: 十層凌波分解的 BP 與 SNA 低頻頻譜

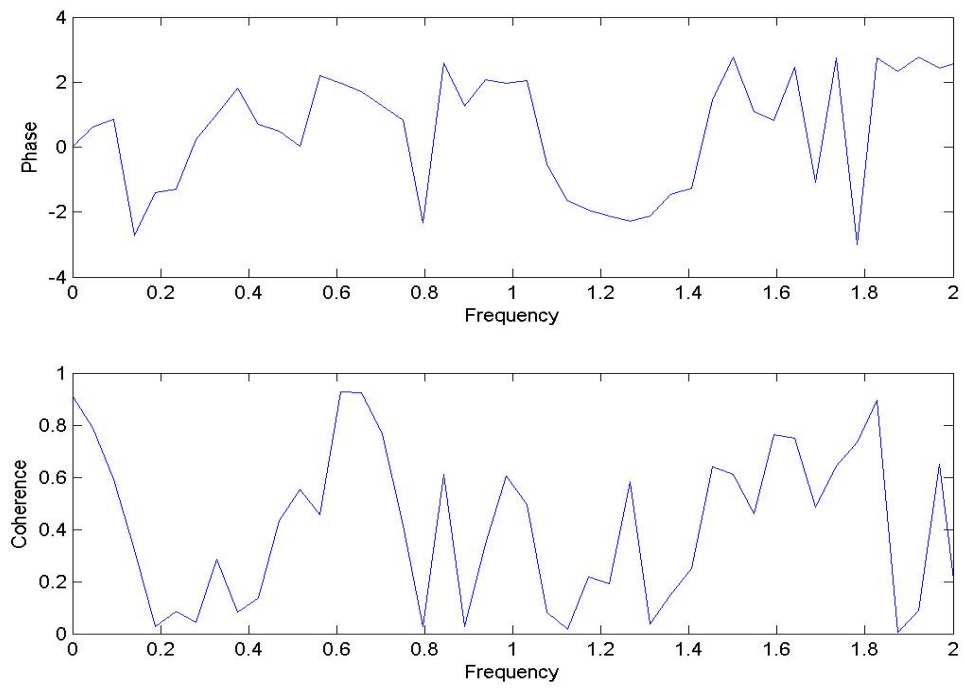


Figure 6: BP, SNA 十層凌波分解低頻的 Phase, Coherence

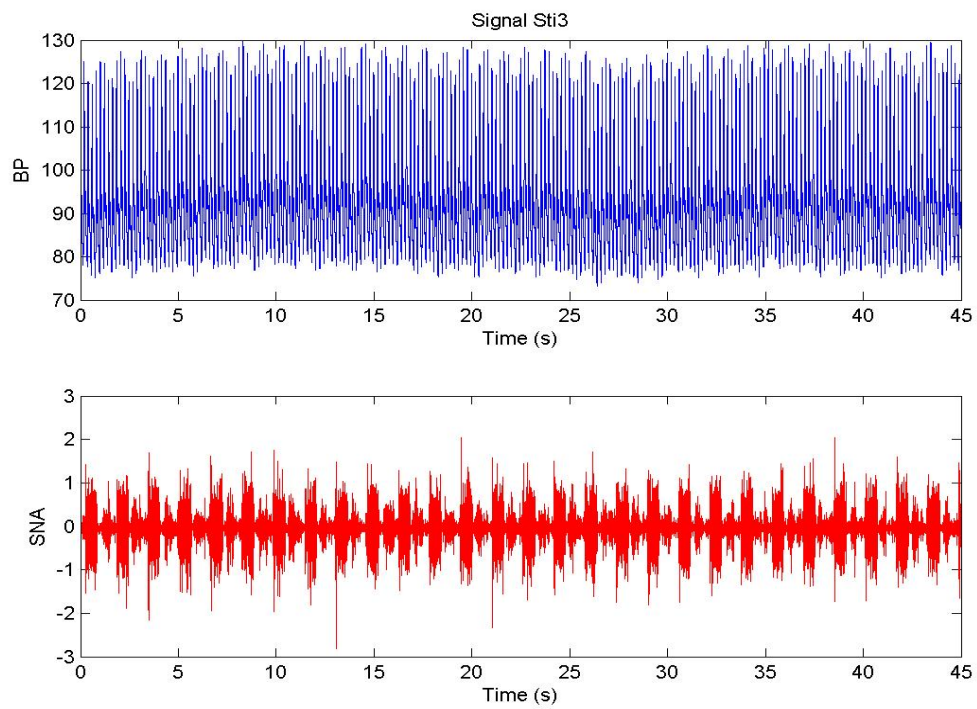


Figure 7: BP 與 SNA 訊號

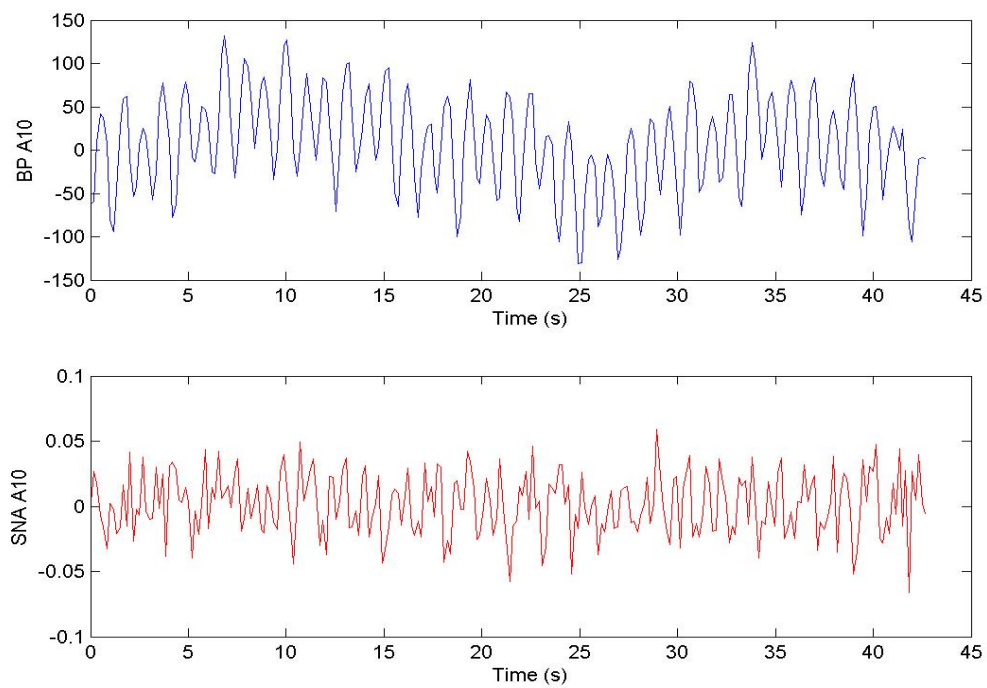


Figure 8: 經過十層凌波分解的 BP 與 SNA 低頻訊號

參考文獻

- [1] 單維彰, 凌波初步, 全華科技圖書公司, 1999。
- [2] 蔡孟利, 血壓功率頻譜中之交感神經活性訊息, 國立台灣大學動物學研究所博士論文, 1997。
- [3] 秦芷翎, 影像放大與直脊函數, 國立中央大學數學研究所碩士論文, 2002。
- [4] A.Cohen, Ingrid Daubechies, J.-C. Feauveau, *Biothogonal Bases of Compactly Supported Wavelets*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLV, 485-560, 1992。
- [5] C.K.Chui, *An Introductio to Wavelets*, ACADEMIC PRESS, 1992。
- [6] Jitendran Muthuswamy, Nitish V. Thakor, *Spectral analysis methods for neurological Signals*, JOURNAL OF NEUROSCIENCE METHODS 83 1-14, 1998。
- [7] Rong Zhang, Julie H. Zuckerman, Cole A. Giller, Benjamin D. Levine, *Transfer function analysis of dynamic cerebral autoregulation humans*, American Physiological Society, 1998。
- [8] Stéphane Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing, Second Edition*, ACADEMIC PRESS, 1999。
- [9] William L.Briggs, Van emden Henson, *The DFT, An owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*, SIAM., 1995。