

建構下一代國中階段 數學課綱——機率新課程

主持人：單維彰
國立中央大學師資培育中心
MOST 107-2511-H-008-001

目的

- 機率知識
國外教科書寫了些什麼？
- 文本設計
八年級機率模組（許氏機率）
- 圖像表徵
以樹狀圖為解題之主要工具

2

亮點

- 參考國外教科書，分析其教學脈絡與技巧
- 創作許氏機率作為習得樹狀圖技術之文本
- 以前測、後測、延後測探索八年級
機率概念之學習成效
- 建立機率概念層次與不確定性認知層次
- 以實證資料對國中機率課程規劃提出建議

3

機率課程變革史

- 我國的國中小階段機率課程，曾經涵蓋三種機率類型(主觀、古典、頻率)

但是，最近十年，

- 機率僅出現於國中，九年級下學期才開始
- 類型上獨尊古典類型，
- 僅以單一事件為主

然而...

4

事實

- 機率已經於七年級的**生物遺傳**課程出現，並且涉及到獨立性、乘法原理等進階概念
- TIMSS 的成績，國二學生(**尚未學習機率**)在所有數學主題（包括機率）的表現皆超過 TIMSS 量尺中心點的 500 分(林陳涌, 2014)

5

機率課程反省

基礎的古典機率可否提早至八年級？

(可否在九年級嘗試更有實用價值的機率？)

6

機率表徵與工具

是不是能以**樹狀圖**為主要解決機率問題之工具？

優點:具有系統性、邏輯性，並可銜接高中階段之機率概念

7

研究設計

PART A: 後台準備

開發3工具：
 機率試卷、
 教科書分析之規準、
 測驗試題與許氏機率文本

10

研究工具—機率試卷、 教科書分析之規準

1. 機率概念：改編 Jones (1999)
 機率概念層次
2. 不確定性認知層次：改編 NAEP
 數學解題之認知層次

11

機率概念_{向度}

主觀機率 指一個事件發生的機率由某人決定，包括設計上的安排設定，或者根據相信的程度而猜測。

古典機率 假設樣本空間S中的每一個樣本出現機會均等，則事件A發生的機率 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ 其中n(*)表示樣本個數。

12

機率概念_{向度}

頻率機率	由觀察重複試驗之相對次數而來，用實驗設計之觀察結果當作事件發生的機率
------	------------------------------------

單一事件	問題中僅涉及一個事件
------	------------

13

機率概念_{向度}

複合事件	涉及事件及其餘事件的機率，或者需考慮兩事件之交集或(互斥的)聯集
------	----------------------------------

14

機率概念規準_{向度}

獨立性	兩事件互不影響時，各自或皆同發生的機率。
-----	----------------------

條件機率	兩事件彼此影響時，已知其一的前提下，求其二發生的機率；或求二者先後發生的機率。
------	---

15

不確定性認知層次_{向度}

題目的數學概念之機率概念層次。主要評量題目所涉及的機率概念程度及對機率的解釋。

16

不確定性認知層次_{向度}

主要評量題目所涉及的機率概念程度及對機率的解釋。

1. 概念理解：能以記憶性的知識來辨識、轉換機率或統計的概念或原理。
2. 程序執行：能選擇適當的機率或統計定義、公式執行計算，能判讀圖表呈現的資訊，能製作指定的圖表，並能檢驗結果的正確性。

17

不確定性認知層次_{向度}

3. 數學的解題思考：遭遇不確定的情境時，能組織機率或統計的知識，根據定義、定理或公式做「確定」的演算或推論，以解決問題。

4. 不確定性的解題思考：遭遇不確定的情境時，能組織機率或統計的知識，必要時輔以計算，在「不確定」的前提之下做出合理的判斷或決策

18

機率測驗卷(複本測驗)

定義：施測於機率課程之受試者

目的：獲得學生學前、學後機率概念的資料

工具：15題，是非題4、計算題9

題目出處：研究團隊自編。

調整：為了利於分析學生的概念

選擇題→是非題、理由解釋

非選擇題→計算過程題

19

機率測驗(範例)

6. 劉老師以抽籤的方式決定劉江、小童、抽檢三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則江是第一、小童是第二個被家庭訪問的機率為多少？

第一次
劉江
第二次
小童
 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

7. 胡一志的早餐選擇有大籠蝦肉貝菜或小籠煎素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬蒜子皮白苦瓜炒三款。假設選擇每一種食物的機會都相等，則胡一志的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？

第一次
第二次
 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

9. 劉太太、曾太太、梁太太三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁此種，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？

提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況呢！

小-剪刀石頭布
曾-剪刀石頭布
梁-剪刀石頭布
可能出現 21種狀況
 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

20

文本：許氏機率

根據教科書之初步分析，編寫新的機率教學實驗課程。以做中學為主，並結合遊戲學習。練習之題目以學生之真實生活經驗為根據，跳脫常見於教科書例題的虛擬情境。

21

許氏機率(專家討論)



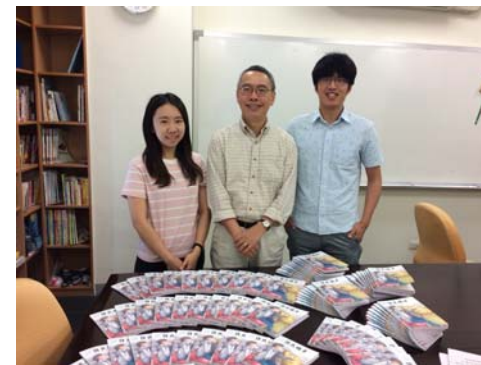
22

許氏機率(桌遊試玩)



23

許氏機率(成品出爐)



24

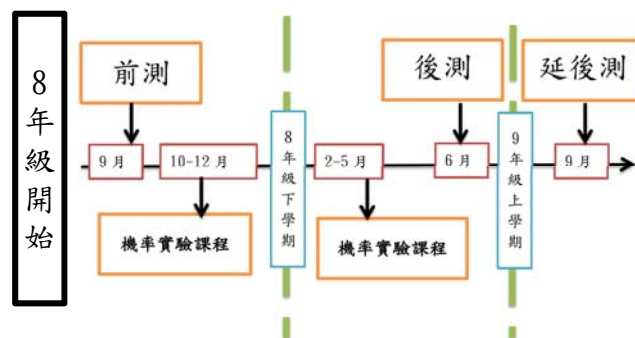
PART B: 入班

研究對象

- 三間國民中學，4個班級。
- 參與活動者N=120，實驗對照組=100人
- 許氏機率課程模組，總時數360分鐘。
- 上課時間由該班及數學老師彈性安排，以八年級內完成即可(可分上下學期)。

26

活動流程



27

簡介機率課程



28

看電視學機率(運氣vs科學)



29

踴躍的學習動力



30

學習使用機率語言



31

分組搶答，笑著學機率



32

古典機率動手玩



33

古典機率動手玩



34

頻率機率一起玩



35

擲瓶蓋體驗頻率機率



36

擲瓶蓋體驗頻率機率



37

擲瓶蓋體驗頻率機率



38

擲頻蓋機率教學發跡地

次數	第一級	第二級	第三級	第四級	第五級	相對頻率					
正面向上	12	15.3	24	0.4	22	0.329	31	0.45	30	0.429	111
正面向下	37	0.817	33	0.55	41	0.814	39	0.65	38	0.657	151
側面向上	5	0.083	1	0.017	4	0.057	0	0	1	0.014	13
側面向下	60	60	70	60	70	300					
正面向上總和											1
正面向下總和											
側面向上總和											
側面向下總和											

39

全員大公測(砸派機的機率)



40

全員大公測(刺激體驗)



41

全員大公測(刺激體驗)



42

研究人員一起玩



43

動動手、來解題



44

有趣的機率題目也有解題信心



45

列舉解題好不好



46

繪製樹狀圖(效率啊~~)

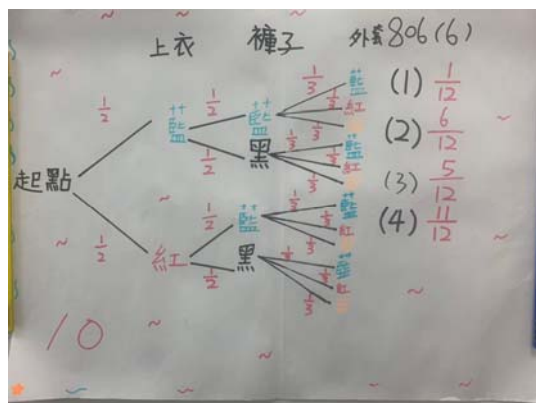


樹狀圖練習



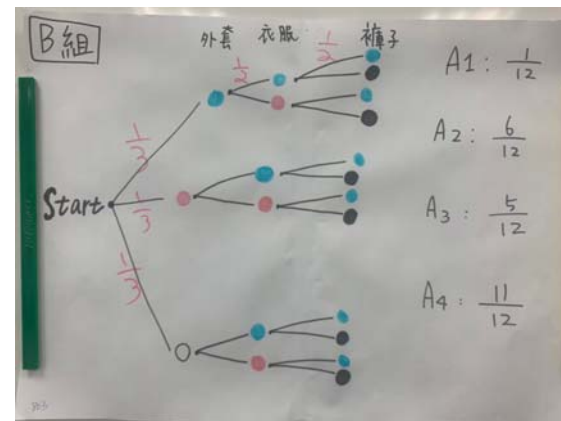
48

各組展示樹狀圖(完整)



49

各組展示樹狀圖(樹枝缺少機率)



50

不只解題，還要會說



51

歡笑滿滿，成功的機率學習



52

研究結果

限制

由於實際入班時程，每班級均不一樣。研究資料尚未全數收集完成

目前僅能以前測成績探討

54

三項發現

1. 教科書分析結果
2. 學生機率測驗成績
3. 樹狀圖之弱點

55

日本教科書分析

	單一事件	餘事件	獨立性	複合(互斥和)	條件機率	小計
主觀機率	0	0	0	0	0	0
古典機率	19	1	0	0	0	20 (77%)
頻率機率	3	0	2	0	1	6 (23%)
小計	22 (84%)	1 (4%)	2 (8%)	0	1 (4%)	26

56

日本教科書分析

除了主觀機率外，皆有題目。

以古典機率比例較高（77%）、其餘為頻率機率（23%）。

顯示日本在發展機率教學時，不以主觀機率出發，而是直接以古典機率引導學生發展機率概念，並結合頻率機率學習進階知識。

57

德國教科書分析

	單一事件	餘事件	獨立性	複合（互斥和）	條件機率	小計
主觀機率	2	0	0	0	0	2 (4%)
古典機率	34	1	4	3	0	42 (74%)
頻率機率	9	1	3	0	0	13 (22%)
小計	45 (79%)	2 (4%)	7 (12%)	3 (5%)	0 (0%)	57

58

德國教科書分析

除了條件機率外，皆有題目。

以單一事件比例最高（79%）。

顯示德國著重單一事件的詮釋，引導學生發展進階的餘事件、獨立性、複合事件。搭配樹狀圖發展上述概念。

59

德國教科書分析

不過條件機率在德國教科書中並未出現，可見德國教科書認為條件機率可能令學生感到困難，不適合於初中階段發展。

60

兩國教科書比較

兩國教科書在機率類型上，主要是主觀機率有無之差異。這影響兩國學生在接觸機率時，是以哪種觀點進行機率知識的建立。

古典機率是過去數學理論之觀點、主觀機率則是經驗法則之觀點。

不同觀點下之機率教學，可能使學生學習機率之思維有所差別。

61

兩國教科書比較

在機率知識分類上，兩國都以古典機率為主要授課內容，搭配樹狀圖為解題工具。

但高層次的機率知識則較少被提及，研究者猜想複合事件、條件機率確實較難被學生理解。

62

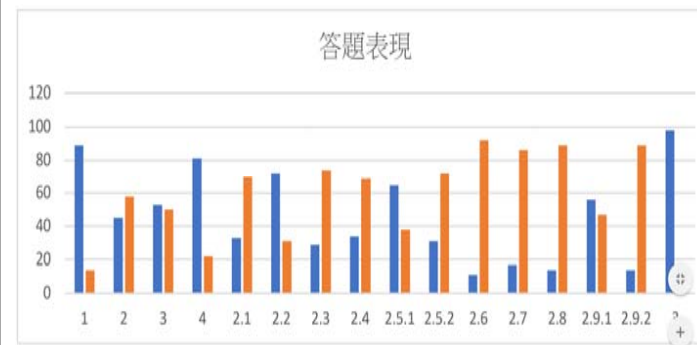
兩國教科書結果之應用

此外，本研究依據兩國教科書之初步分析結果，作為自編教材設計之參考。

確實設計出一套以主觀機率出發並搭配樹狀圖之機率實驗教材，命名為『許氏機率』。

63

機率前測



機率前測

- A. 每道題目都有人解出正確答案。
- B. 可見八年級學生有一定的能力處理機率問題，且不會害怕學習機率。
- C. 但有半數以上的題，答錯人數多於答對人數，缺乏某些概念與解題技術。
- D. 2.4 到 2.9 為本研究定為樹狀圖之題型。⁶⁵

機率前測

	平均數	標準差	高分組
前測	15.24	11.21	30.74
	低分組	中位數	
	4.85	18	

未經過正式的機率教學之學生，能有些微之機率概念，但**概念薄弱且不穩定**。值得注意的是標準差，顯示**學生程度差異大**，亦即無機率概念的學生也佔不少數。⁶⁶

機率前測

八年級學生已有機率自發概念，理當可於此年段進行教學。某些機率概念，需要正式教學才能習得。特別是列舉、樹狀圖這些思考方法。

但現今課綱安排於九年級，有調整之討論空間。⁶⁷

樹狀圖討論

(一) 樣本主體與事件的分類階層判讀：

學生無法解讀題意中所使用之字詞，例如在學習繪製「猜拳」的題目時，學生常無法判斷樹狀圖的節點與分類階層，該填入人名或是拳種，使得繪製出錯誤的樹狀圖。

但研究者發現利用**列舉**時，卻無此困難發生。⁶⁸

教學檢討

步驟1. 在列舉甲、乙兩人猜拳情況時，表示列舉的符號中要填入什麼呢？
 步驟2. 引導學生思考：該填入(甲、乙)還是(剪刀、石頭)呢？
 步驟3. 學生能判斷出應填入(剪刀、石頭)，即括弧中應填入甲和乙所有可能出的拳種。
 步驟4. 所以在繪製樹狀圖時，應以甲和乙所有可能出的拳種為分類名稱。
 步驟5. 教師畫出正確和錯誤類型，幫助學生釐清樹狀圖分類。

正確類 錯誤類

69

樹狀圖討論

(二) 不對稱事件的機率值對應樹狀圖

在課堂中，在對稱事件下，每一根樹枝皆是均勻的機率。學生是能接受的操作。

反之，在不對稱事件下，每一根樹枝變成非均勻的機率。但學生在繪製時，無法辨認每一樹枝所代表之機率值。

70

案例

~~(2)~~ 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

$A = \frac{1}{4}$

71

結論&課程設計建議

國外教學內容脈絡

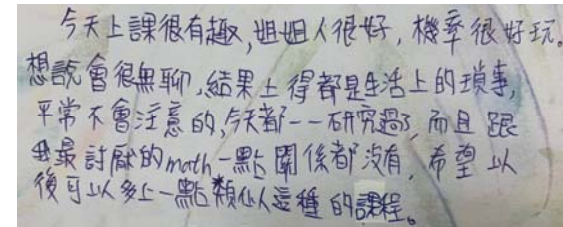
在教科書分析上，德國與日本皆以古典機率為國中階段主要的學習內容。

但德國以主觀機率之觀點引導學生學習機率，有別於日本直接使用偏向數學理論之古典機率作為學習起始點。

或許在國中階段影響不大，但可能在未來獨立性、條件機率等，這些需要推測思維之機率概念上產生困難。⁷³

珍貴的八年級非課程內教學研究

- 做中學的機率課程模組：學生真實回饋



師生皆滿意

74

適合八年級的機率概念

主觀機率

- 感覺機率的的存在性
- 理性與感性

75

適合八年級的機率概念

古典機率(現今九年級的學習課程)

- - 列舉所有可能的結果與事件的集合
- - 以除法計算→有正確答案
- - 嚴謹的程序

76

適合八年級的機率概念

頻率機率

- 過去機率在課程中的主流概念
- 生活中最常接觸或應用的機率
- 結合調查與統計能力

77

適合八年級的機率概念

- 餘事件
 - 從實例中去探討
 - 反向思考的訓練
 - 邏輯訓練

78

對社會的影響力:建基於實徵研究 對於國家機率課程的建議

以樹狀圖
為主要解
題工具

八年級

主觀機率

古典機率

頻率機率

79

發表

※ 期刊

- 許哲毓、單維彰 (2018)。數學「不確定性」教材與評量之分析規準，《臺灣教育評論月刊》7(10), 170-177。

※ 國外研討會發表

- 許哲毓、單維彰 (2019)。Risk literacy education experiment using a probability board game. 654th International Conferences on Economics and Social Sciences. Seoul, South Korea. 2019年7月。

80

發表

※ 學位論文

- 許芷雲(2019)。八年級機率新課程：設計與實踐。國立中央大學數學研究所碩士論文，未出版，桃園。
- 康育綺(2019)。德國初中階段的統計教科書研究。國立中央大學數學研究所碩士論文，未出版，桃園。

※ 工具

- 許氏機率(課程模組)、機率評量。

81

計畫參與人員

- 國立中央大學學習與教學所博班生
 - 許哲毓
- 國立中央大學數學所碩班生
 - 許芷雲
 - 康育綺
- 國中教師
 - 呂琇綾
 - 簡盈沛
 - 張譽穎
 - 卜建中

82

感謝科技部支持

謝謝聆聽

83