綜合高級中學
數學科銜接教材
B

國家教育研究院

李惠雯、黃淑娟、蔡淇茂　編　著

前言

綜合高中是我國後期中等教育的一種學制，其課程之規劃，在一年級採用普通高中課程，二年級以後，則按學生對於專門學程的選擇而依循高職或高中的課程。然而，高中與高職的數學課程綱要由兩組專家學者分別制訂，各自適應該學制的學習需求，導致部分綜合高中學生，從一年級轉銜二年級時，缺乏適當的市售數學教科書，而教師必須經常性地負起自編教材的責任。

針對上述現象，教育部於民國 102 年 9 月發佈綜合高中課綱微調的命令，自 103 學年起逐年實施。對於微調之後，仍在二年級職業專門學程的數學課程中存在的少數重複或需補強內容，則由國家教育研究院以「綜合高級中學數學科銜接教材」專案計畫，委託具數學教育專業與實務教學經驗的教師與學者，為二年級分流後銜接高職 A 版、B 版、或 C 版數學課程的綜高師生，分別編撰一份可開放下載列印的銜接教材，搭配職業學校之第三冊或第四冊數學教科書使用。現在這份銜接教材，就是該計畫的產出。

此「銜接教材」根據上述「微調」後的綜合高中數學課程編制，由鄭英豪教授整理出重複的課題與需補強的內容，經蕭建華老師和曾政清老師推薦資深數學教師李惠雯、馬雅筠、黃淑娟、黃敏哲、黃嘉男、陳吳煜、蔡淇茂、與蕭文婷，依照現行各版本之教學習慣編撰而成。然後由鄭章華博士、單維彰、與前述所有同仁共同審閱校定。本銜接教材之經費與行政資源，皆由國家教育研究院支持，謹此一併致謝。

計畫主持人 單維彰

誌於中壢中央大學

民國 103 年 4 月 17 日

主編

單維彰／國立中央大學

編著者

李惠雯／國立溪湖高級中學

黃淑娟／國立溪湖高級中學

蔡淇茂／國立溪湖高級中學

審閱委員

曾政清／台北市立建國高級中學

蕭建華／國立溪湖高級中學

鄭英豪／臺北市立大學

鄭章華／國家教育研究院

編輯

郭潔如／國立中央大學

莊珺涵／國立中央大學

ঌ目錄ঌ

使用須知

本銜接教材依據教育部於民國 102 年 9 月 17 日發佈之臺教技 (一) 字第 1020131965A 號令「微調」之後的綜合高級中學數學課程綱要而作，自 103 學年度起，於綜合高級中學逐年實施，至十二年國教的新課綱實施止。

這份銜接教材應搭配經審訂之高職數學 B 版第三冊教科書使用。假設學生在一年級時，按照綜高數學課程綱要，學習了普通高中《數學Ⅰ》和《數學Ⅲ》的內容，則以下課題可以從高職數學教科書中省略或擇要複習：

- （三角的）和差角公式與二倍角公式、正弦定理與餘弦定理
- 解三角形問題（含三角測量）
- 圓方程式、圓與直線的關係

由上述課題的節略，教師約有 24－48 節課可用以實施本銜接教材，並不須要額外加課。

本教材之版權屬國家教育研究院，開放給全國各界自由使用，包括下載列印或複印，但印刷與傳播之費用不屬於本教材支援之範圍。雖然這本教材有部分的彩色頁面，但都經過實驗，確保改以黑白（灰階）列印時，不至於影響閱讀。所以，此教材可以用彩色或者黑白列印。

這本書從封面到封底，已經安插適當的空白頁，讓讀者可以採用「雙面輸出」的方式列印。原稿的空白頁，就造成雙面輸出時的單面頁。

第一章　三角函數

百花盛開的春天、酷熱的夏天、涼爽的秋天以及嚴寒的冬天，四季氣溫輪替變化。在夏季裡日照時間長而冬季日照時間短。漲潮退潮規律的變化與週期。這些自然界的現象總是週而復始的出現循環不已，它們是能以三角函數來描述的。

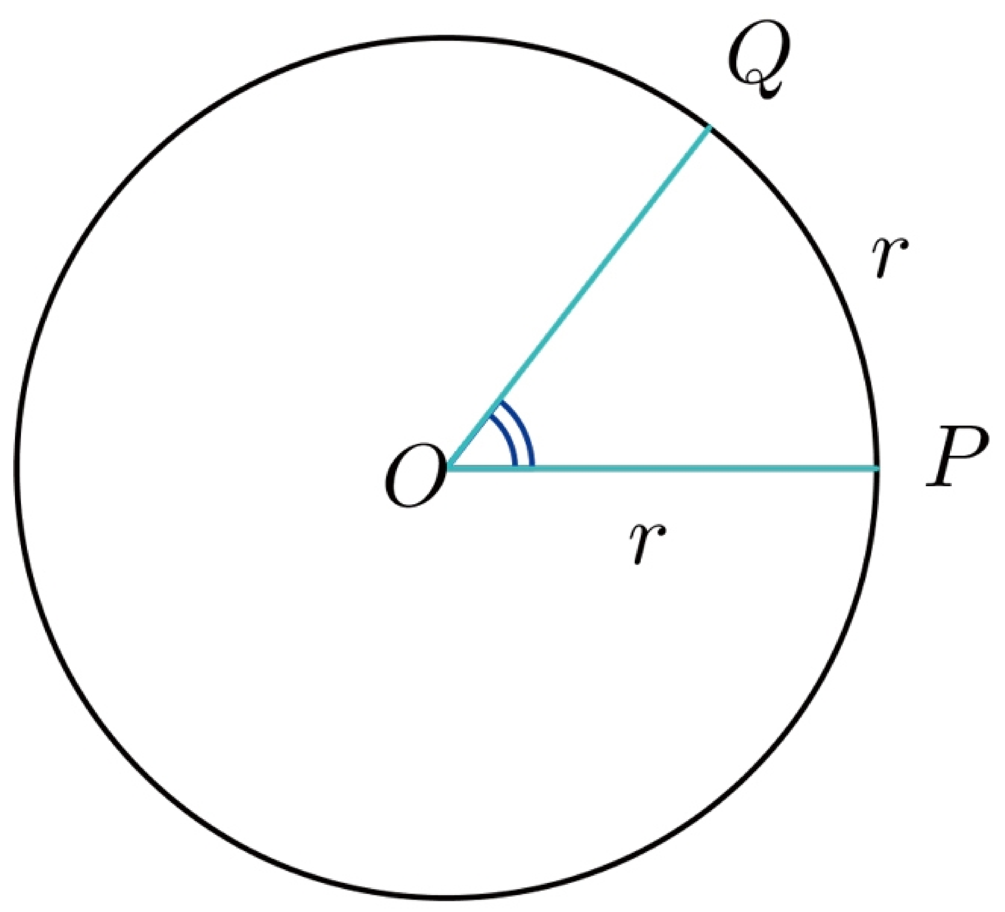
在本章我們將先複習角度的另一個度量單位「弧度」。接著複習正弦函數、餘弦函數、正切函數，並討論正割函數、餘割函數、餘切函數等六個三角函數的性質。最後則是三角函數圖形的探討。

1-1 弧度

我們常會使用不同的單位來表示同一件事物。例如，我們會以一打來表示十二罐飲料，以英吋或公分來表示物體的長度。在角的度量上，也可以使用不同的單位來表示一個角度的大小。現在，就讓我們來認識新的度量單位，以及弧長、扇形的相關問題。

1-1.1 弧度

在測量一個角時，除了我們所習慣的「度」之外，還有一種「弧度」的單位。現在假設一圓 O 之半徑為 r，如圖 1，則當圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的長度等於半徑 r 時，我們規定圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 所對的圓心角 $\angle POQ$ 為 1 弧度。



〈圖 1〉

【定義】

弧度：設圓 O 的半徑為 r，圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 在圓周上，若圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的長度等於半徑 r，規定圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 所對的圓心角為 1 弧度。

根據以上的定義，當圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的長度等於 $2\pi r$ 時，其對應的圓心角為 $\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi$ 弧度。而一個圓周所對應的圓心角為 $360°$，因此 2π（弧度）$=360°$，即 π（弧度）$=180°$。

◎說明

π 弧度 $=180°$，1 弧度 $=\dfrac{180°}{\pi}\approx 57.3°$，或者 $1°=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度

習慣上，我們用弧度來表示角度時，常會省略「弧度」兩個字。接下來，我們將練習「度」與「弧度」的換算。

例題 1

試將下列各角的度數轉換成弧度 ① $45°$ ② $60°$ ③ $270°$

解：

① 設 x 為所求，則 $\dfrac{\pi}{x}=\dfrac{180°}{45°}$，$x=45\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{4}$ 弧度

② 設 x 為所求，則 $\dfrac{\pi}{x}=\dfrac{180°}{60°}$，$x=60\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}$ 弧度

③ 設 x 為所求，則 $\dfrac{\pi}{x}=\dfrac{180°}{270°}$，$x=270\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{3\pi}{2}$ 弧度

隨堂練習 1

試將下列各角的度數轉換成弧度 ① $90°$ ② $135°$ ③ $315°$

答：

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② $\dfrac{3\pi}{4}$ ③ $\dfrac{7\pi}{4}$

例題 2

試將下列各角的弧度轉換成度數 ① $\dfrac{\pi}{8}$ ② $\dfrac{2\pi}{3}$ ③ $\dfrac{\pi}{5}$

解：

① 設 x 為所求，則 $\dfrac{\pi}{(\frac{\pi}{8})}=\dfrac{180°}{x}$，$x=\dfrac{\pi}{8}\times\dfrac{180°}{\pi}=\dfrac{180°}{8}=22.5°$

② 設 x 為所求，則 $\dfrac{\pi}{(\frac{2\pi}{3})}=\dfrac{180°}{x}$，$x=\dfrac{2\pi}{3}\times\dfrac{180°}{\pi}=120°$

③ 設 x 為所求，則 $\dfrac{\pi}{(\frac{\pi}{5})}=\dfrac{180°}{x}$，$x=\dfrac{\pi}{5}\times\dfrac{180°}{\pi}=36°$

隨堂練習 2

試將下列各角的弧度轉換成度數 ① $\frac{5\pi}{4}$ ② $-\frac{2\pi}{3}$ ③ 2

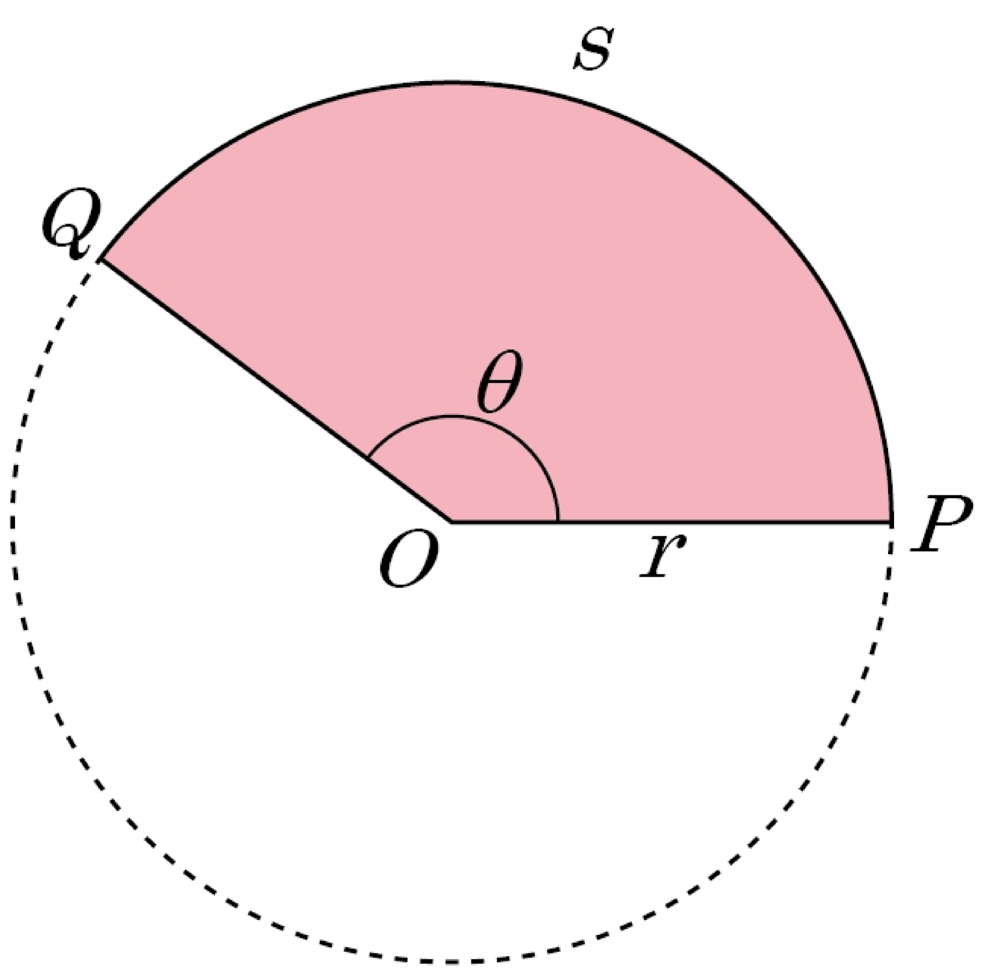
答：

① $225°$ ② $-120°$ ③ $(\frac{360}{\pi})°$

1-1.2 扇形的弧長與面積

在國中時期我們已學會，如何利用圓心角佔全圓的比例來求扇形弧長與面積，本節將討論如何運用弧度與半徑來求扇形弧長與面積。

設圓 O 的半徑為 r，P 與 Q 為圓周上兩點，如圖 2 所示。當扇形 POQ 的圓心角 $\angle POQ$ 為 θ 弧度時，我們要如何計算扇形弧長 s 與面積呢？



〈圖 2〉

由弧度的定義，我們知道 $\theta=\frac{s}{r}$，因此可得 $s=r\theta$

即「**扇形弧長等於扇形半徑與圓心角的弧度之乘積**」。

接下來，我們設扇形 POQ 的面積為 A，由於扇形面積 A 與圓面積 πr^2 之比值等於其所對應的圓心角 θ 與圓周角 2π 之比值，所以由

$$\frac{A}{\pi r^2}=\frac{\theta}{2\pi}$$

整理可得

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$

亦可推得

$$A=\frac{1}{2}r(r\theta) \quad (因為\ s=r\theta)$$
$$=\frac{1}{2}rs$$

即「**扇形面積等於扇形弧長與半徑乘積之一半**」。

由上述之討論，我們可整理出底下的公式。

【扇形的弧長與面積公式】

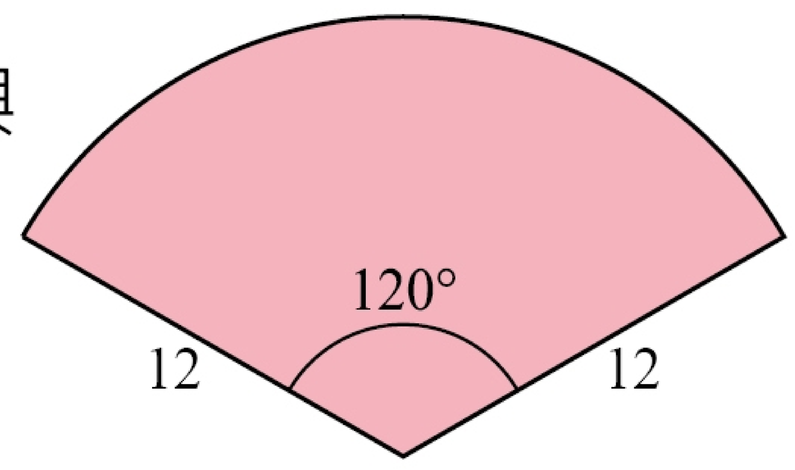
若一扇形的半徑為 r，圓心角為 θ 弧度，則扇形的弧長 s 與扇形面積 A 之公式為：

$$s=r\theta \ 與\ A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rs$$

(注意：圓心角的大小是以弧度為單位)

例題 3

已知一扇形的半徑為 12 公分，其圓心角為 $120°$，求扇形的弧長與面積。



解：

因為 $120°=120\times\frac{\pi}{180}$ 弧度 $=\frac{2\pi}{3}$ 弧度，所以利用扇形弧長與面積公式，得

扇形弧長為 $s=r\theta=12\times\frac{2\pi}{3}=8\pi$ (公分)

扇形面積為 $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times 12^2\times\frac{2\pi}{3}=48\pi$ (平方公分)

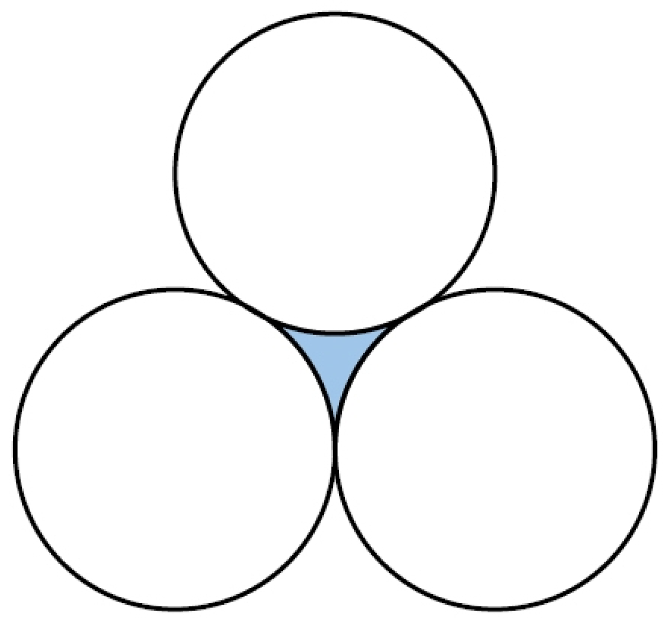
隨堂練習 3

已知一扇形的半徑為 6，弧長為 2π，試求其圓心角及面積。

答：圓心角 $\theta=\frac{\pi}{3}$ (弧度)，扇形面積 $A=6\pi$

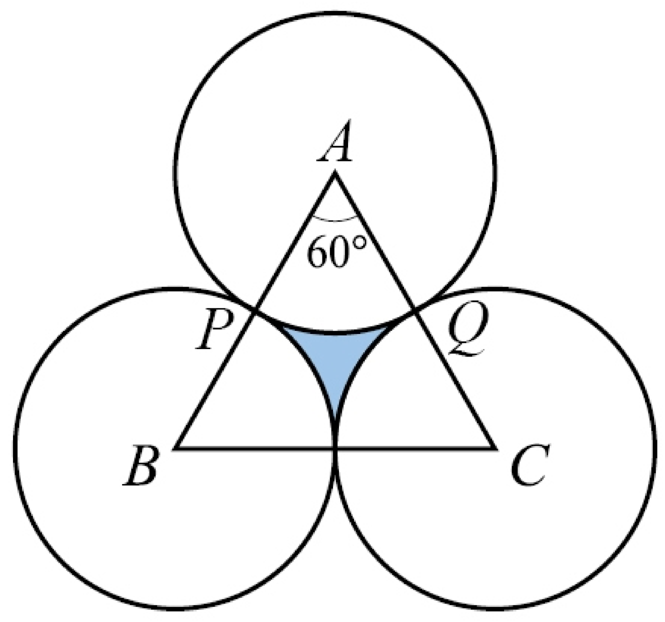
例題 4

如右圖，設半徑為 2 的三個圓互相外切，則此三個圓所圍的區域面積為何？



解：

如右圖，設 A，B，C 為三圓之圓心，P，Q 為切點。



因為三圓互相外切，所以 ΔABC 為邊長 4 的正三角形，

因此，$\angle A=60°=60\times\dfrac{\pi}{180}$ 弧度 $=\dfrac{\pi}{3}$ 弧度

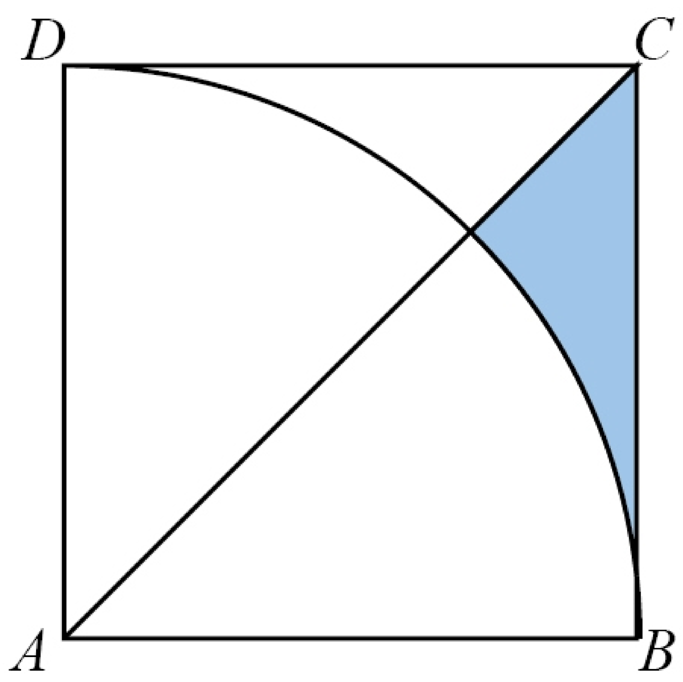
故所圍區域的面積為

ΔABC 的面積－ 3× 扇形 APQ 的面積

$$=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin60°-3\times(\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{3})=4\sqrt{3}-2\pi$$

隨堂練習 4

如右圖，已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 4，以 A 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫弧，求鋪色部分面積？



答：$8-2\pi$

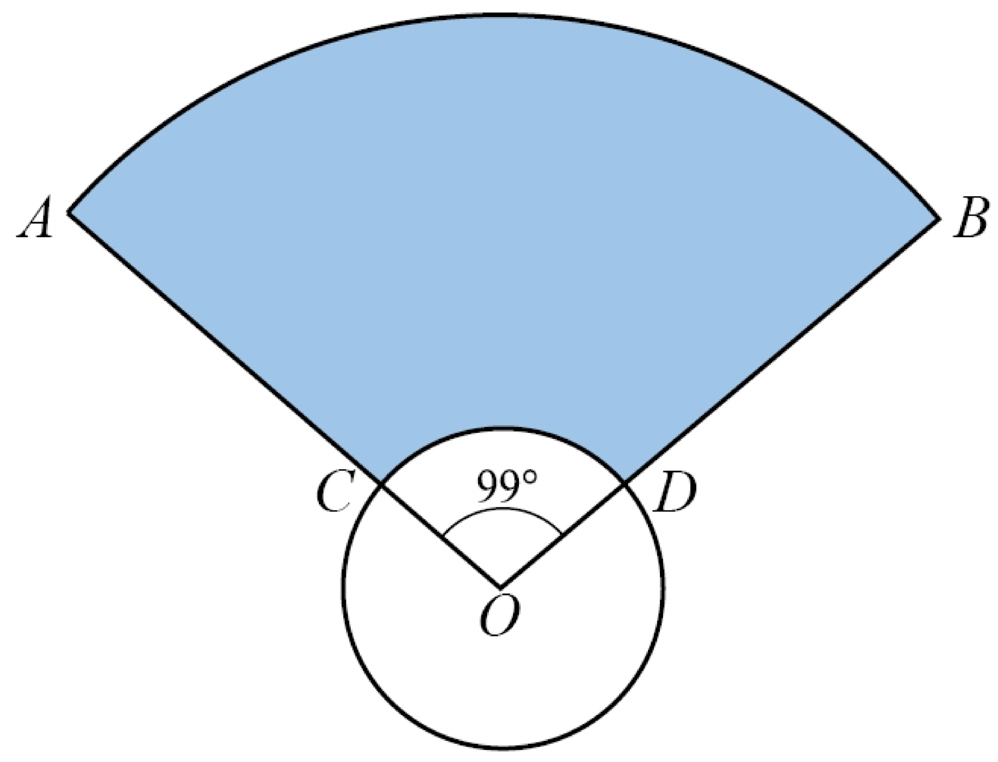
在我們生活周遭也常見到以扇形設計的用品或建築物，例如扇子、音樂廳劇場以及扇形車庫等。圖 3 是位於彰化市的扇形火車車庫，用來停放火車頭進行檢修。由於早期蒸汽火車只能往前行駛，因此需要在車庫前方圓形轉車台上迴轉才能將車頭轉回前方。

（資料來源：維基百科）

圖 3 彰化扇形車庫

例題 5

彰化扇形車庫(如右圖)的半徑$\overline{OA}=29$公尺,它是以半徑$\overline{OC}=11$公尺的圓形轉車台為中心,朝車庫 $\overset{\frown}{AB}$ 方向以 99 度分散。最近工務部門將進行車庫(鋪色部分)的維修,請問整修區域面積為多少平方公尺?



解:

$\angle AOB=\angle COD=99°=99\times\dfrac{\pi}{180}$ 弧度$=\dfrac{11\pi}{20}$ 弧度

由圖可知,整修面積為

扇形 ABO 面積-扇形 COD 面積

$=(\dfrac{1}{2}\times29^2\times\dfrac{11\pi}{20})-(\dfrac{1}{2}\times11^2\times\dfrac{11\pi}{20})$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{11\pi}{20}\times(29^2-11^2)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{11\pi}{20}\times(29+11)\times(29-11)$

$=198\pi\approx622$(平方公尺)

故整修面積為 198π(約 622)平方公尺。

隨堂練習 5

承例題 5,請算出整修區域(鋪色部分)的周長。

答:$22\pi+36$(約 105)公尺

1-1 弧度習題

1. 試將下列各角的度數轉換成弧度 ①$150°$　②$300°$

2. 試將下列各角的弧度轉換成度數 ①$\frac{5\pi}{12}$　②$-\frac{3\pi}{4}$

3. 如下圖 1，已知 $\angle AOB = 60°$，半徑 $\overline{OA} = \sqrt{3}$ 求弓形 (鋪色部分) 面積。

4. 已知一車輪旋轉 5 弧度之後，共前進了 200 公分，則此車輪之半徑為多少公分？

5. 已知一扇形面積為其圓心角所對弧長的 3 倍，則此扇形半徑為何？

6. 如下圖 2，已知一時鐘的分針長 12 公分從 8 點到 8 點 20 分，分針所移動的弧長與面積為何？

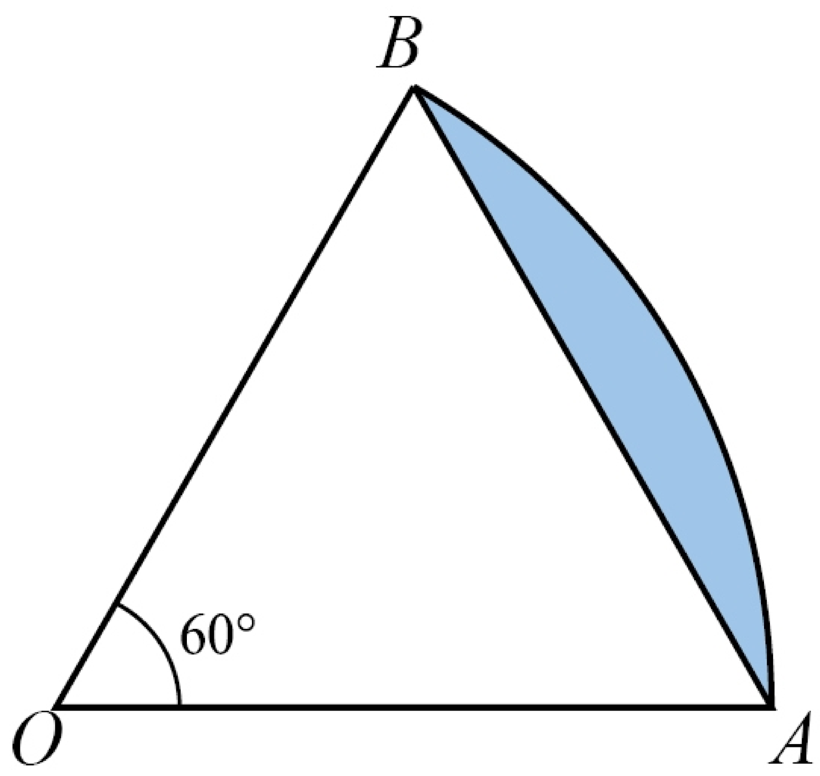


圖 1

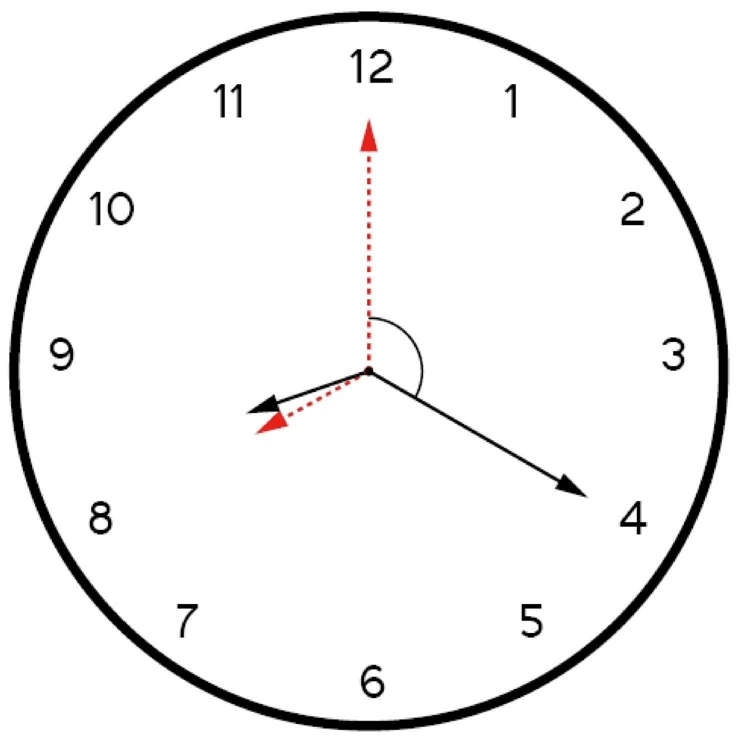


圖 2

簡答：

1. ① $\frac{5\pi}{6}$ 弧度　② $\frac{5\pi}{3}$ 弧度

2. ① $75°$　② $-135°$

3. $\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

4. 40 公分

5. 6

6. 弧長 8π 公分，面積 48π 平方公分

1-2 銳角的三角函數

我們曾利用國中所學相似三角形的概念以及三角比值，學到正弦，餘弦，正切的定義。在這裏我們將複習正弦、餘弦、正切並定義另外三個三角函數，進而討論其相關性質。

1-2.1 銳角三角函數的定義

在直角 ΔABC 中，設 $\angle C$ 為直角，則 AB 稱為斜邊，AC 稱為 $\angle A$ 的鄰邊， BC 稱為 $\angle A$ 的對邊。設 $\overline{BC}=a$ ，$\overline{AC}=b$ ，$\overline{AB}=c$ ，如圖 4，則我們定義 $\angle A$ 的六個三角函數為

$\angle A$ 的正弦函數：$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$ (sine)

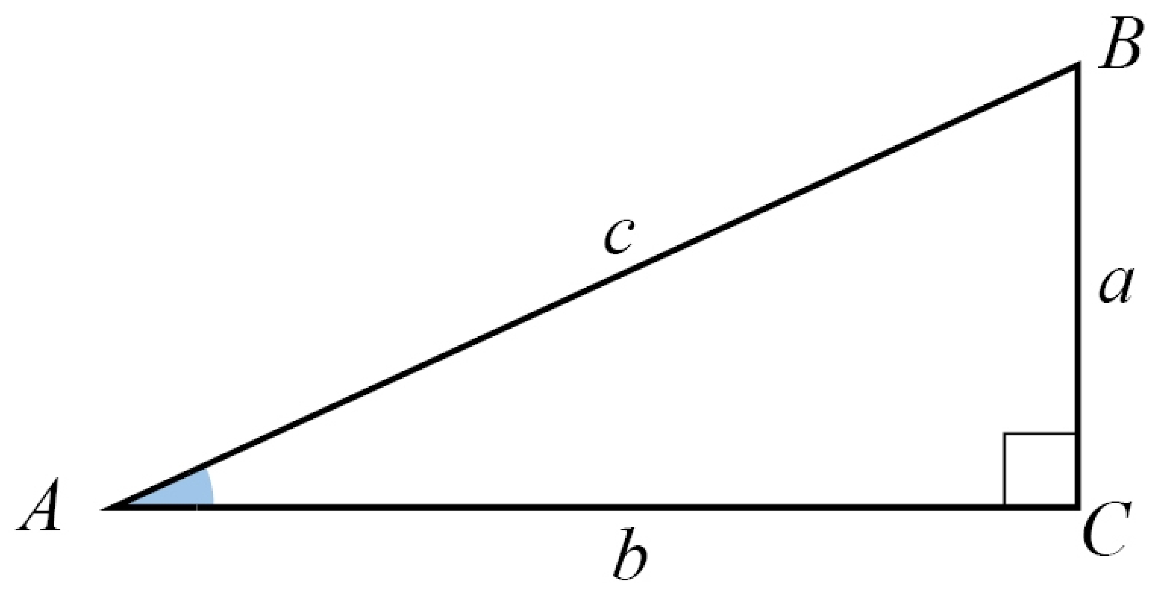
$\angle A$ 的餘弦函數：$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$ (cosine)

$\angle A$ 的正切函數：$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$ (tangent)

$\angle A$ 的餘切函數：$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{b}{a}$ (cotangent)

$\angle A$ 的正割函數：$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$ (secant)

$\angle A$ 的餘割函數：$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{c}{a}$ (cosecant)



〈圖 4〉

例題 1

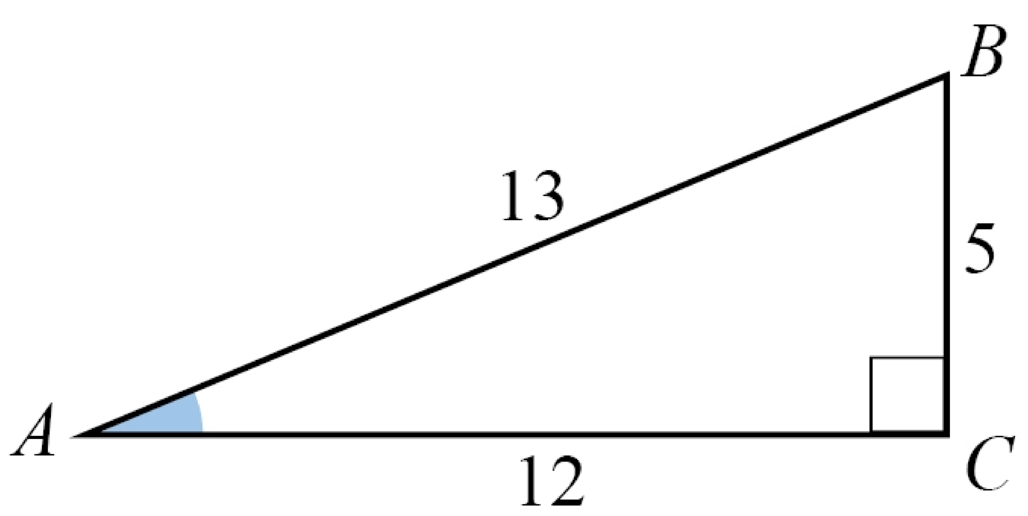
如右圖，直角 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=13$， $\overline{AC}=12$， $\overline{BC}=5$，試求 $\sin A$， $\cos A$， $\tan A$，$\cot A$， $\sec A$， $\csc A$ 之值。

解：

根據三角函數的定義，得

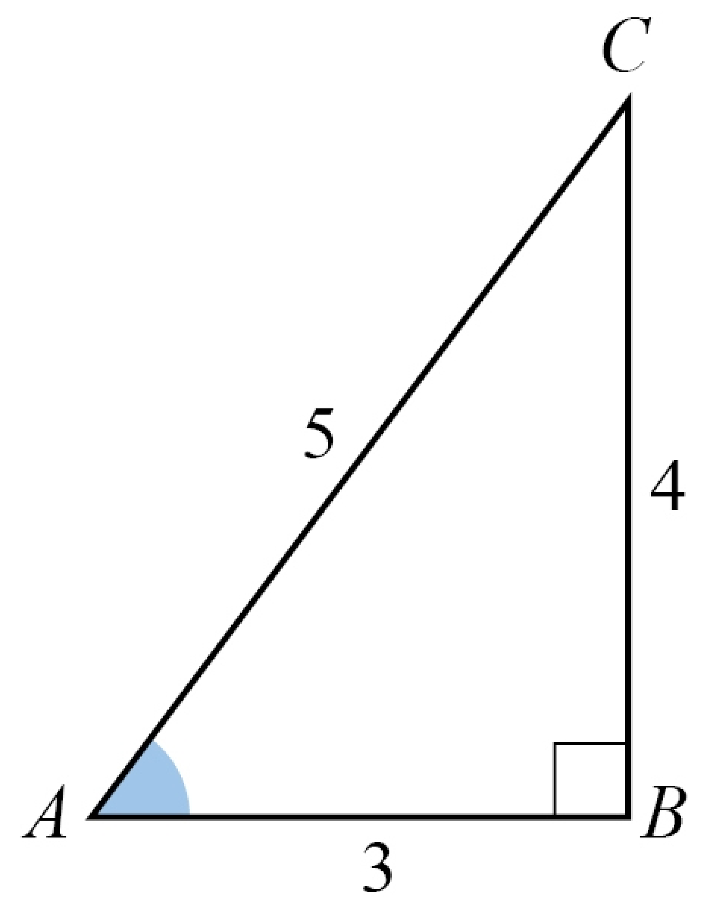
$\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{5}{13}$ ， $\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{12}{13}$ ， $\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{12}$

$\cot A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{12}{5}$ ， $\sec A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{13}{12}$ ， $\csc A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{13}{5}$



隨堂練習 1

如右圖，直角 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=4$，試求 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$，$\cot A$，$\sec A$，$\csc A$ 之值。



答：

$\sin A=\dfrac{4}{5}$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\tan A=\dfrac{4}{3}$

$\cot A=\dfrac{3}{4}$，$\sec A=\dfrac{5}{3}$，$\csc A=\dfrac{5}{4}$

1-2.2 銳角三角函數的基本關係

在高一時，我們討論到 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 三個三角函數的基本性質，它包括了商數關係、平方關係和餘角關係，那麼 $\cot\theta$，$\sec\theta$，$\csc\theta$ 是否也具備這些基本關係呢？

由銳角三角函數的定義，我們可以發現三角函數之間的一些關係，如 $\sin 30°\times\csc 30°=1$；$\tan 60°$ 等於 $\sin 60°$ 和 $\cos 60°$ 的比值；$\sin^2 45°+\cos^2 45°=1$；$\sin 30°=\cos 60°$。這些三角函數之間的關聯，我們將做進一步的探討。

首先，由 1-2.1 三角函數定義可得 $\sin A\times\csc A=\dfrac{a}{c}\times\dfrac{c}{a}=1$

$$\cos A\times\sec A=\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}=1$$

$$\tan A\times\cot A=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$$

可推得下列三組倒數關係：

【倒數關係】

$\sin A\times\csc A=1$，即 $\csc A=\dfrac{1}{\sin A}$

$\cos A\times\sec A=1$，即 $\sec A=\dfrac{1}{\cos A}$

$\tan A\times\cot A=1$，即 $\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$

現在我們利用倒數關係求三角函數值。

例題 2

用倒數關係求下列各式的值：

① $\cot 60^\circ$　② $\sec\dfrac{\pi}{6}$　③ $\csc 45^\circ$

解：

由倒數關係計算如下：

① 已知 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ 則 $\cot 60^\circ=\dfrac{1}{\tan 60^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

② 已知 $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 則 $\sec\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

③ 已知 $\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 則 $\csc 45^\circ=\dfrac{1}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

隨堂練習 2

試以倒數關係求下列各式的值：

① $\cot\dfrac{\pi}{4}$　② $\sec 60^\circ$　③ $\csc\dfrac{\pi}{3}$

答：

①1　②2　③ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

例題 3

試化簡 $\dfrac{1}{1+\sin 20^\circ}+\dfrac{1}{1+\csc 20^\circ}$

解：

由倒數關係知

$\csc 20^\circ=\dfrac{1}{\sin 20^\circ}$，所以

$$\frac{1}{1+\sin 20^\circ}+\frac{1}{1+\csc 20^\circ}=\frac{1}{1+\sin 20^\circ}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sin 20^\circ}}$$

$$=\frac{1}{1+\sin 20^\circ}+\frac{1}{\dfrac{\sin 20^\circ+1}{\sin 20^\circ}}$$

$$=\frac{1}{1+\sin 20^\circ}+\frac{\sin 20^\circ}{1+\sin 20^\circ}=\frac{1+\sin 20^\circ}{1+\sin 20^\circ}=1$$

隨堂練習 3

試化簡 $\frac{1}{1+\tan 15^\circ}+\frac{1}{1+\cot 15^\circ}+\frac{1}{1+\sec 15^\circ}+\frac{1}{1+\cos 15^\circ}$

答：2

除了倒數關係外，由銳角三角函數的定義，亦可推得商數關係：
整理如下。

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\sin A}{\cos A}\text{ ，}\cot A=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\cos A}{\sin A}$$

【商數關係】

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}\text{ ，}\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

例題 4

試求 $\sin^2 15^\circ\times\cot 15^\circ-\cos^2 15^\circ\times\tan 15^\circ$ 的值。

解：

利用商數關係 $\sin^2 15^\circ\times\cot 15^\circ-\cos^2 15^\circ\times\tan 15^\circ$

$$=\sin^2 15^\circ\times\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}-\cos^2 15^\circ\times\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$=\sin 15^\circ\times\cos 15^\circ-\cos 15^\circ\times\sin 15^\circ$$

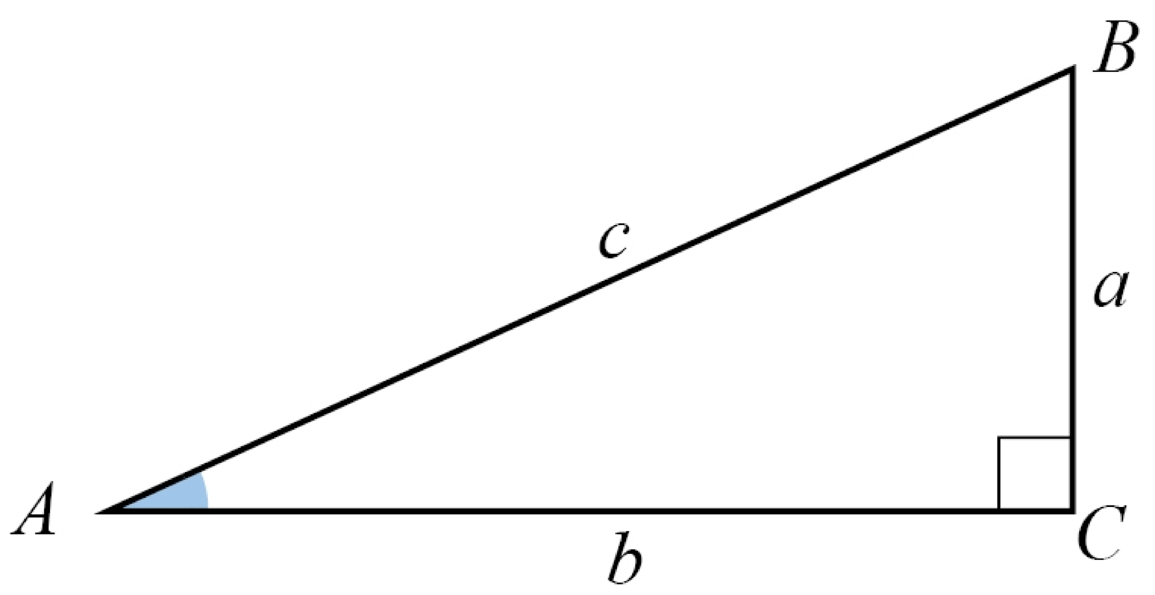
$$=0$$

隨堂練習 4

試求 $\cos^2 28° \times \tan 28° - \sin^2 28° \times \cot 28°$

答：0

此外，在圖 5 的直角三角形中，由畢氏定理可知 $a^2 + b^2 = c^2$，我們將等式兩邊同除以 c^2，推得 $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1$



〈圖 5〉

根據銳角三角函數定義，即為 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

若將 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 之等號兩邊同除以 $\sin^2 A$，可得平方關係：

$$1 + \left(\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin A}\right)^2 \Rightarrow 1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

若兩邊同除以 $\cos^2 A$，可再得另一個平方關係：

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos A}\right)^2 \Rightarrow \tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

故得平方關係如下。

【平方關係】

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$， $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$ ， $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$

例題 5

試化簡 $\sin^2 5° - \tan^2 5° + \sec^2 5° - \csc^2 5° + \cot^2 5° + \cos^2 5°$

解：

利用平方關係 $\sin^2 5° - \tan^2 5° + \sec^2 5° - \csc^2 5° + \cot^2 5° + \cos^2 5°$

$$= (\sin^2 5° + \cos^2 5°) + (\sec^2 5° - \tan^2 5°) + (\cot^2 5° - \csc^2 5°)$$
$$= 1 + 1 + (-1)$$
$$= 1$$

隨堂練習 5

試化簡 $\sin^2 10° - \csc^2 10° + \tan^2 10° + \cot^2 10° - \sec^2 10° + \cos^2 10°$

答：-1

除了上述三個關係外，我們也發現在直角 ΔABC 中，當 $\angle A$ 與 $\angle B$ 互為餘角，即 $\angle A + \angle B = 90°$，也就是 $\angle B = 90° - \angle A$ 時，$\angle A$ 的對邊 a 恰為 $\angle B$ 的鄰邊，如圖 5 所示。因此，由定義得

$$\sin A = \frac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c} = \frac{\angle B\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \cos B = \cos(90° - A)$$

同理可得

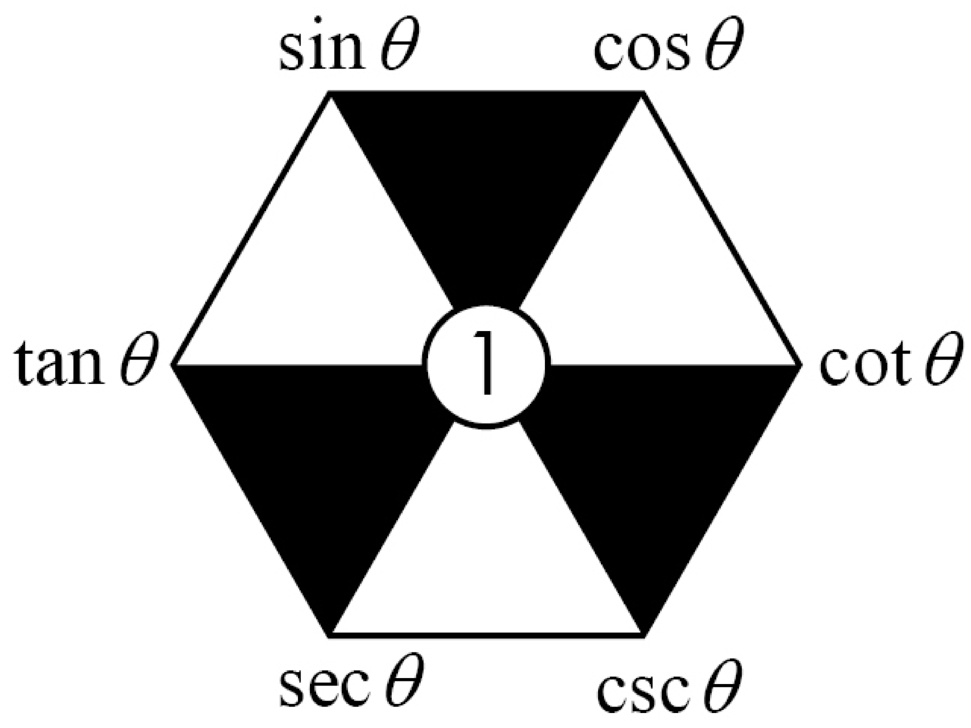
$$\cos A = \sin B = \sin(90° - A)$$
$$\tan A = \cot B = \cot(90° - A)$$
$$\cot A = \tan B = \tan(90° - A)$$
$$\sec A = \csc B = \csc(90° - A)$$
$$\csc A = \sec B = \sec(90° - A)$$

例如：$\tan 50° = \cot 40°$; $\sec 75° = \csc 15°$。可整理得下列關係。

【餘角關係】

$\sin(90° - A) = \cos A$	$\cos(90° - A) = \sin A$
$\tan(90° - A) = \cot A$	$\cot(90° - A) = \tan A$
$\sec(90° - A) = \csc A$	$\csc(90° - A) = \sec A$

上述三角關係，可以利用圖 6 的正六邊形來幫助記憶。



〈圖 6〉

倒數關係：任一對角線的兩個三角函數之乘積恆為中心值 1。

例如：$\sin\theta\times\csc\theta=1$，$\tan\theta\times\cot\theta=1$，$\sec\theta\times\cos\theta=1$，推得

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\text{ ，}\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}\text{ ，}\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

商數關係：任一頂點的三角函數是相鄰兩個三角函數的乘積。

例如：$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cos\theta=\sin\theta\times\cot\theta\Rightarrow\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

平方關係：每一個倒立的三角形 (黑色部分)，上方兩個頂點的平方和等於下方一個頂點的平方。例如：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

餘角關係：每一水平線之兩個三角函數互為餘角關係。

例如：$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$，$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$

$\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta$，$\csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$

綜合上述四種基本關係，我們可作些三角函數求值或化簡的問題。

例題 6

求下列各式的值：

① $\csc^2 23^\circ-\tan^2 67^\circ$　　② $\dfrac{1}{\cot^2 35^\circ}-\dfrac{1}{\sin^2 55^\circ}$

解：

① 由餘角關係知 $\tan 67^\circ=\tan(90^\circ-23^\circ)=\cot 23^\circ$

故 $\csc^2 23^\circ-\tan^2 67^\circ=\csc^2 23^\circ-\cot^2 23^\circ=1$

② 因為 $\dfrac{1}{\cot 35^\circ}=\dfrac{1}{\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 35^\circ}}=\dfrac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}$ ，且 $\sin 55^\circ=\cos 35^\circ$

所以 $\dfrac{1}{\cot^2 35^\circ}-\dfrac{1}{\sin^2 55^\circ}=\dfrac{\sin^2 35^\circ}{\cos^2 35^\circ}-\dfrac{1}{\cos^2 35^\circ}=\dfrac{\sin^2 35^\circ-1}{\cos^2 35^\circ}=\dfrac{-\cos^2 35^\circ}{\cos^2 35^\circ}=-1$

隨堂練習 6

求下列各式的值：

① $\cot^2 57^\circ-\sec^2 33^\circ$　　② $\dfrac{1}{\cos^2 25^\circ}-\dfrac{1}{\tan^2 65^\circ}$

答：①-1　②$1$

例題 7

已知 θ 為銳角，試化簡 $(\cot\theta-\dfrac{1}{\cot\theta})^2-(\sec\theta-\dfrac{1}{\sec\theta})^2-(\csc\theta-\dfrac{1}{\csc\theta})^2$

解：

利用平方關係與倒數關係

$(\cot\theta-\dfrac{1}{\cot\theta})^2-(\sec\theta-\dfrac{1}{\sec\theta})^2-(\csc\theta-\dfrac{1}{\csc\theta})^2$

$=(\cot^2\theta-2+\dfrac{1}{\cot^2\theta})-(\sec^2\theta-2+\dfrac{1}{\sec^2\theta})-(\csc^2\theta-2+\dfrac{1}{\csc^2\theta})$

$=(\cot^2\theta-2+\tan^2\theta)-(\sec^2\theta-2+\cos^2\theta)-(\csc^2\theta-2+\sin^2\theta)$

$=(\cot^2\theta-\csc^2\theta)+(\tan^2\theta-\sec^2\theta)-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2$

$=-1-1-1+2$

$=-1$

隨堂練習 7

已知 θ 為銳角，試化簡 $(1-\cot^4\theta)\times\sin^2\theta+\cot^2\theta$

答：1

1-2 銳角的三角函數習題

1. 若 θ 為銳角，且 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，試求 ① $\sin\theta$，$\tan\theta$，$\csc\theta$之值 ② 比較 θ 與60°之大小

2. 試求下列各式的值

① $\sec^2 12^\circ+\csc^2 25^\circ-\cot^2 78^\circ-\tan^2 65^\circ$

② $\sec^2 10^\circ+\sec^2 20^\circ+\sec^2 30^\circ+\sec^2 40^\circ-\cot^2 50^\circ-\cot^2 60^\circ-\cot^2 70^\circ-\cot^2 80^\circ$

③ $2\tan^4 59^\circ+4\csc^2 31^\circ-2\csc^4 31^\circ$

3. 試化簡 $\frac{1}{1+\cos^2 5^\circ}+\frac{1}{1+\tan^2 5^\circ}+\frac{1}{1+\cot^2 5^\circ}+\frac{1}{1+\sec^2 5^\circ}$

4. 已知 θ 為銳角，且 $\frac{3\sin\theta+5\cos\theta}{2\cos\theta+6\sin\theta}=\frac{4}{3}$，試求$\tan\theta$之值

5. 設 θ 為銳角，且$3\sin^2\theta-\cos^2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，試求$\cot\theta$之值

6. 設 θ 為銳角，且$2+\sqrt{3}$為$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$的一根，則$\tan\theta+\cot\theta$之值為何？

簡答

1. ① $\sin\theta=\frac{2}{3}$，$\tan\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\csc\theta=\frac{3}{2}$ ② $\theta<60^\circ$

2. ① 2 ② 4 ③ 2

3. 2

4. $\frac{7}{15}$

5. 1

6. 4

1-3 廣義角的三角函數

在前面我們所討論的三角函數均將角度θ限制於銳角。但在日常生活中，我們會遇到角度超過$180°$的情況，例如物理學上常使用的齒輪。齒輪的轉動不只角度可能超過$180°$，旋轉時更可以是順時鐘或是逆時鐘方向旋轉。因此，我們需要將角度作推廣。

1-3.1 廣義角三角函數的定義

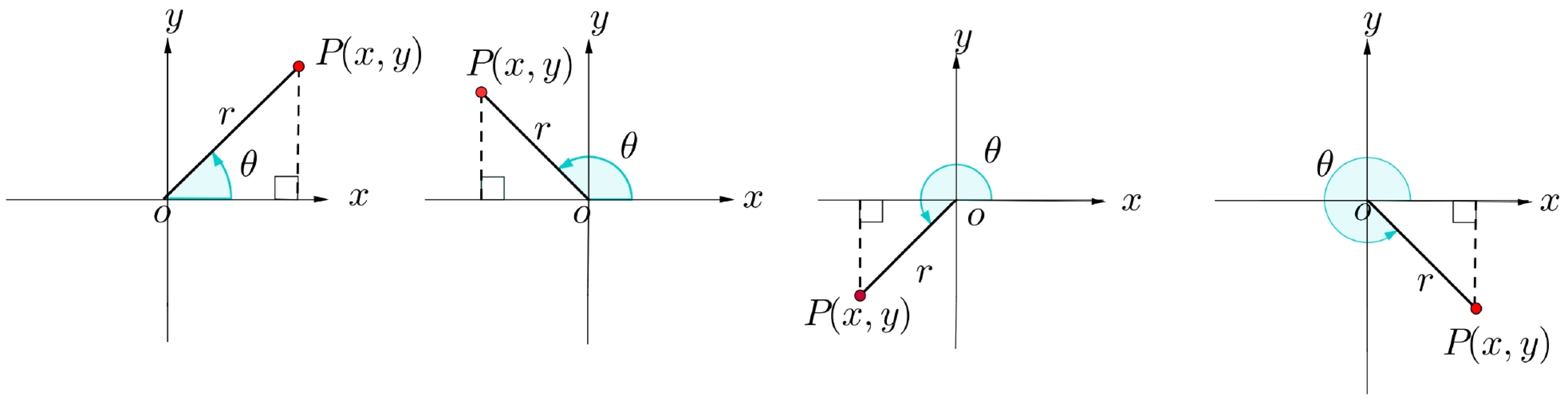
我們曾經學過，具有旋轉方向的角度稱為有向角，並且規定逆時鐘方向旋轉的有向角為正角，順時鐘方向旋轉的有向角為負角。具有正負之分且不限於$0°$到$180°$的角稱為廣義角，而一個廣義角的大小取決於它的旋轉角度。若將廣義角θ的頂點置於坐標平面上的原點，且始邊在x軸的正向上，則角θ稱為標準位置角。

現在，假設角θ是一個標準位置角，在角θ的終邊上任取異於原點之一點$P(x,y)$，令$r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，則$r$值恆正。我們定義

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\text{，}(x\neq 0) \qquad \cot\theta=\frac{x}{y}\text{，}(y\neq 0)$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x}\text{，}(x\neq 0) \qquad \csc\theta=\frac{r}{y}\text{，}(y\neq 0)$$



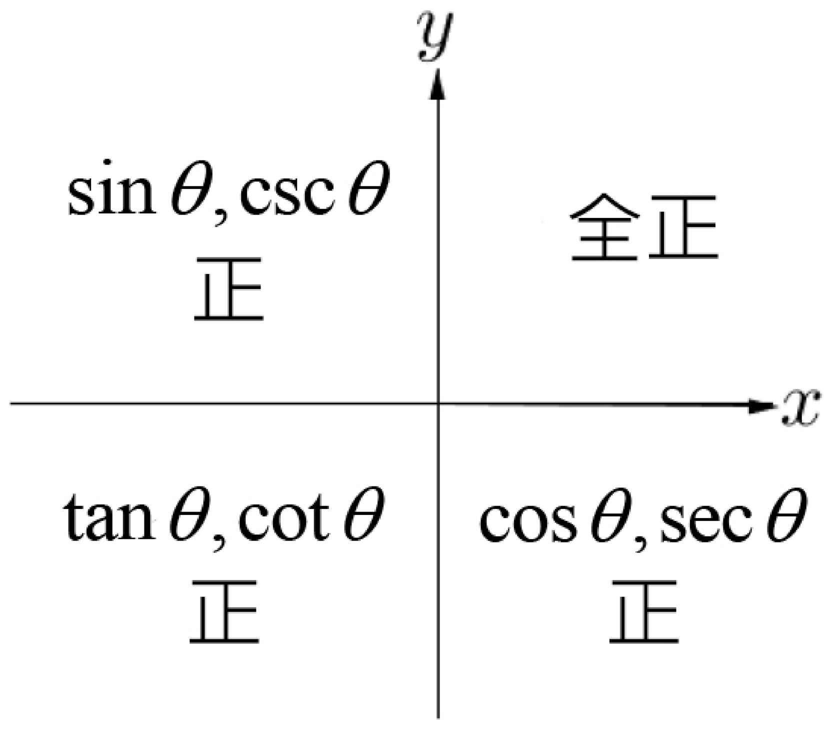
〈圖 7〉

◎說明

由以上之定義知，當標準位置角θ的終邊落在y軸上時，其終邊上任一點x坐標皆為 0。此時，分母為 0 的比值是無意義的，故$\tan\theta$與$\sec\theta$是無意義的。而當標準位置角θ的終邊落在x軸上時，終邊上任一點y坐標皆為 0，此時$\cot\theta$與$\csc\theta$是無意義。

【廣義角三角函數值之正負】

函數＼象限	一	二	三	四
$\sin\theta, \csc\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta, \sec\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta, \cot\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$



例題 1

若 $\sin\theta > 0$ ， $\cot\theta < 0$ ，則角 θ 落在第幾象限？點 $P(\csc\theta, \tan\theta)$ 為第幾象限之點？
解：

若 $\sin\theta > 0$，則角 θ 落在第一或第二象限。

若 $\cot\theta < 0$，則角 θ 落在第二或第四象限。

因此，滿足 $\sin\theta > 0$ ， $\cot\theta < 0$ 時，角 θ 在第二象限

此時， $\csc\theta > 0$ ， $\tan\theta < 0$

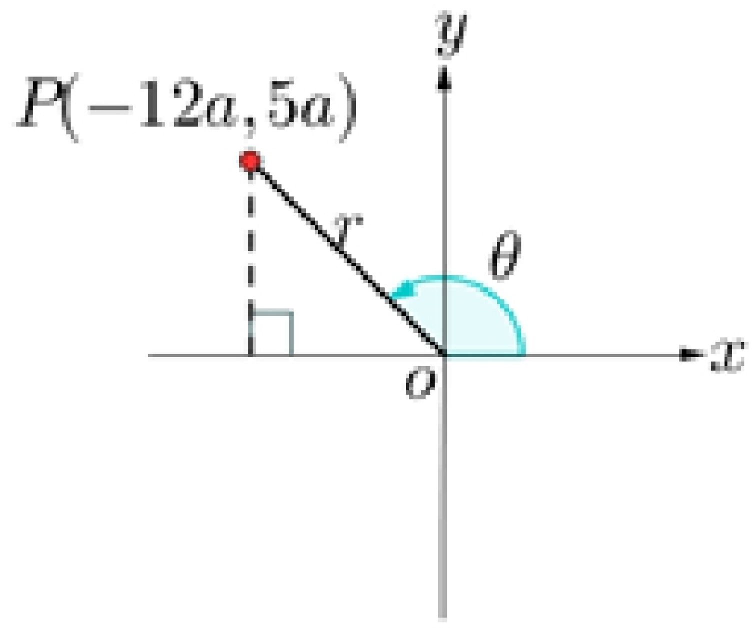
而 $P(\csc\theta, \tan\theta)$ 為 $(+,-)$ 故 P 點為第四象限之點

隨堂練習 1

若點 $P(\sin\theta\cos\theta, \tan\theta\sec\theta)$ 在第三象限，則角 θ 落在第幾象限？
答：第四象限

例題 2

如右圖所示，若 $P(-12a,5a)$ 為標準位置角 θ 終邊上一點，$a>0$，試求 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$，$\cot\theta$，$\sec\theta$，$\csc\theta$ 之值。



解：

已知 $P(-12a,5a)$，即 $x=-12a$，$y=5a$，$r=\sqrt{(-12a)^2+(5a)^2}=13a$

所以根據定義得

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{5a}{13a}=\dfrac{5}{13}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-12a}{13a}=-\dfrac{12}{13}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{5a}{-12a}=-\dfrac{5}{12}$，$\cot\theta=\dfrac{x}{y}=\dfrac{-12a}{5a}=-\dfrac{12}{5}$

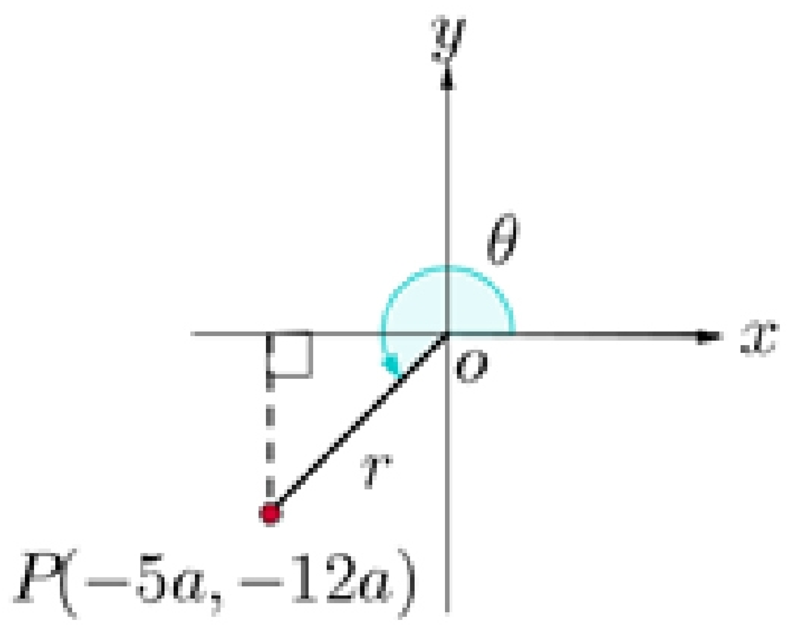
$\sec\theta=\dfrac{r}{x}=\dfrac{13a}{-12a}=-\dfrac{13}{12}$，$\csc\theta=\dfrac{r}{y}=\dfrac{13a}{5a}=\dfrac{13}{5}$

隨堂練習 2

如右圖所示，若 $P(-5a,-12a)$ 為標準位置角 θ 終邊上一點，$a>0$，試求 $\sin\theta$，$\tan\theta$，$\sec\theta$ 之值。

答：

$\sin\theta=-\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta=\dfrac{12}{5}$，$\sec\theta=-\dfrac{13}{5}$



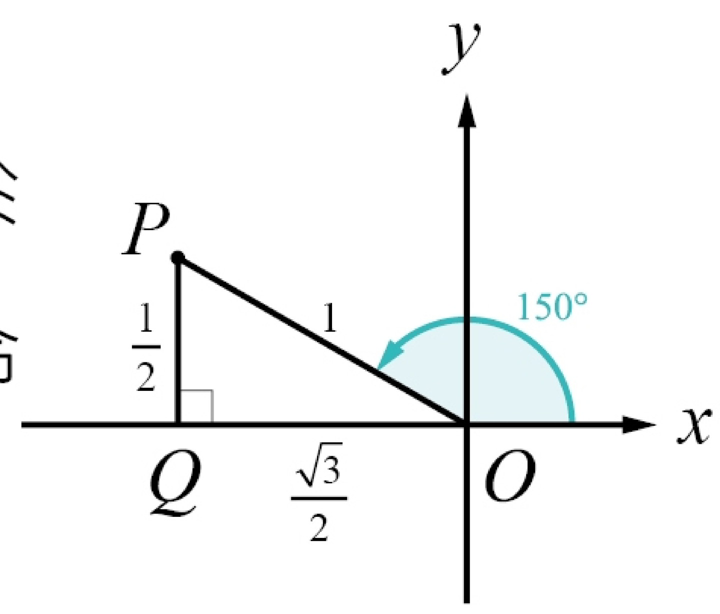
因為正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割的值均是坐標值與終邊長度之比值。我們可以終邊長為單位來表示這六個三角函數值。為方便求值，在標準位置角 θ 終邊上取一點 P，使得 $\overline{OP}$ 長度等於 1 。另外，因同界角有相同的終邊，故同界角的六個三角函數值也相同。

例題 3

試求 $\sin 150^\circ$，$\tan 150^\circ$，$\sec 150^\circ$，$\cot 150^\circ$ 之值。

解：

如右圖，150° 的標準位置角，其終邊落於第二象限，在終邊上取異於原點之一點 P，並向 x 軸做垂線，令垂足為 Q，則 $\angle POQ=30^\circ$，令 $\overline{OP}=r=1$，則 $\overline{OQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}$



故 P 點的座標為 $P(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，可得 $\sin 150° = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$，

$\tan 150° = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sec 150° = \frac{r}{x} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot 150° = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

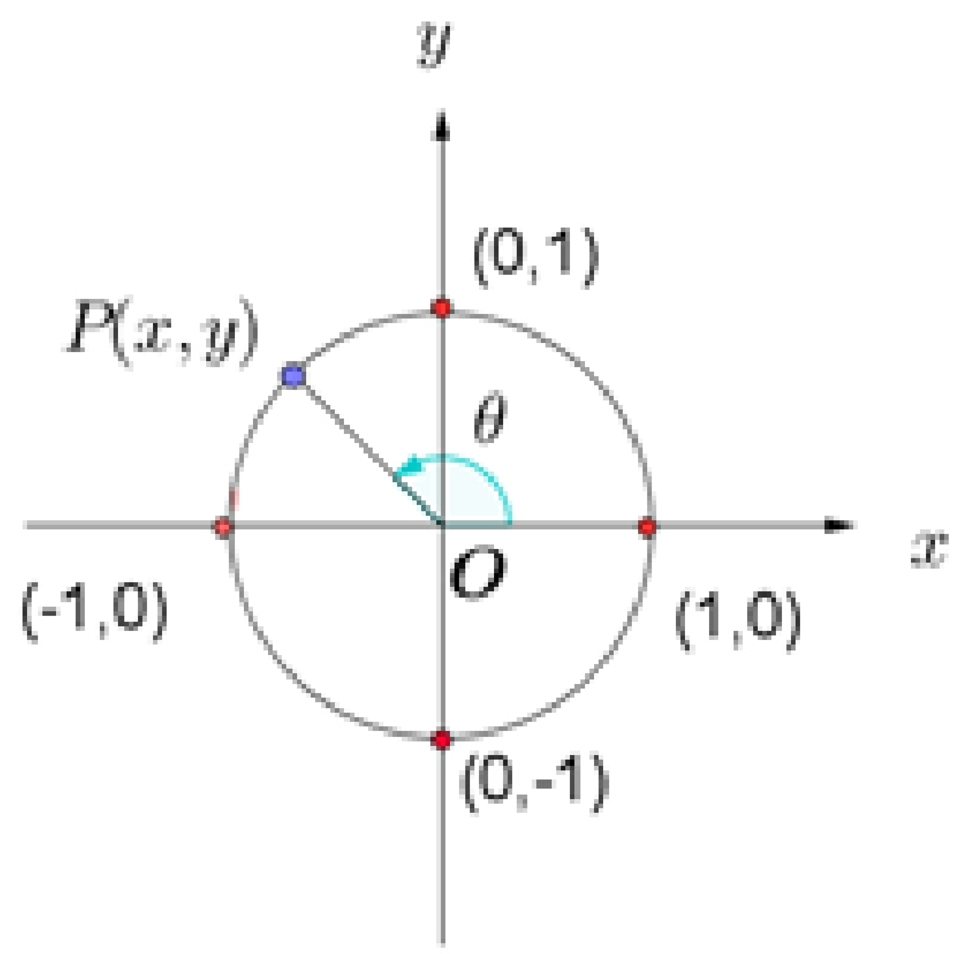
例題 4

試求 $\sin 0°$，$\cos 0°$，$\tan 0°$，$\cot 0°$，$\sec 0°$，$\csc 0°$

$\sin 90°$，$\cos 90°$，$\tan 90°$，$\cot 90°$，$\sec 90°$，$\csc 90°$ 之值。

解:

如右圖，在坐標平面上，以原點 O 為圓心，取一單位圓 (半徑為 1)，設標準位置角 θ 的終邊與單位圓交於一點 $P(x,y)$，則根據廣義角的定義得



$\cos\theta = \frac{x}{1}$，$\sin\theta = \frac{y}{1}$，故交點 P 的座標為 $(\cos\theta,\sin\theta)$

故 $\sin 0° = 0$，$\cos 0° = 1$，$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0$

$\cot 0° = \frac{\cos 0°}{\sin 0°}$ 無意義，$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = \frac{1}{1} = 1$，$\csc 0° = \frac{1}{\sin 0°}$ 無意義

$\sin 90° = 1$，$\cos 90° = 0$，$\tan 90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°}$ 無意義

$\cot 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = \frac{0}{1} = 0$，$\sec 90° = \frac{1}{\cos 90°}$ 無意義，$\csc 90° = \frac{1}{\sin 90°} = \frac{1}{1} = 1$

隨堂練習 3

試求 $\sin 90° + \sin 60° + \cos 180° + \sec 0° + \sin 270°$ 之值。

答：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

1-3.2 廣義角三角函數的基本關係

我們在 1-2.2 中討論到銳角三角函數的倒數關係、商數關係和平方關係 (請參照 p.14)，透過廣義角三角函數的定義，我們仍可看出只要函數值存在，這些基本關係對廣義角而言仍是成立的。接下來我們要利用這些關係，練習廣義角的三角函數求值或證明。

例題 5

已知 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ ，求下列各式的值：

① $\sin\theta\cos\theta$ ② $\tan\theta+\cot\theta$ ③ $\sec\theta-\csc\theta$

解：

① 將 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ 兩邊平方，得

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$$
$$1-2\sin\theta\cos\theta=2$$
$$-2\sin\theta\cos\theta=1$$
$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

② 利用商數關係，得 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

③ 利用倒數關係，得 $\sec\theta-\csc\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$

隨堂練習 4

已知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求下列各式的值：

① $\sin\theta\cos\theta$ ② $\tan\theta+\cot\theta$ ③ $\sec\theta+\csc\theta$

答：

① $-\dfrac{3}{8}$ ② $-\dfrac{8}{3}$ ③ $-\dfrac{4}{3}$

例題 6

已知 $\cot\theta=2$ 試求 $\dfrac{2\sin\theta+3\cos\theta}{4\cos\theta-7\sin\theta}$ 的值。

解：

由商數關係知 $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$，因此，將原式的分子、分母同除以 $\sin\theta$

得 $\dfrac{2\sin\theta+3\cos\theta}{4\cos\theta-7\sin\theta}=\dfrac{2\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}+3\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}{4\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-7\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}}=\dfrac{2+3\cot\theta}{4\cot\theta-7}=\dfrac{2+3\times2}{4\times2-7}=8$

隨堂練習 5

已知 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$，試求 $\dfrac{2\sin\theta-5\cos\theta}{3\cos\theta+4\sin\theta}$ 之值。

答：-1

接下來，我們應用倒數、商數與平方關係來證明恆等式。

例題 7

試證恆等式 $(\sec\theta-\tan\theta)^2=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$，$(\sin\theta\neq-1)$。

證：

利用倒數關係與商數關係

$$
\begin{aligned}
(\sec\theta-\tan\theta)^2&=\sec^2\theta-2\sec\theta\tan\theta+\tan^2\theta\\
&=\frac{1}{\cos^2\theta}-2\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}\\
&=\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\
&=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\quad\text{得證}
\end{aligned}
$$

隨堂練習 6

試證恆等式 $\dfrac{\sec\theta+\csc\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=\sin\theta+\cos\theta$。

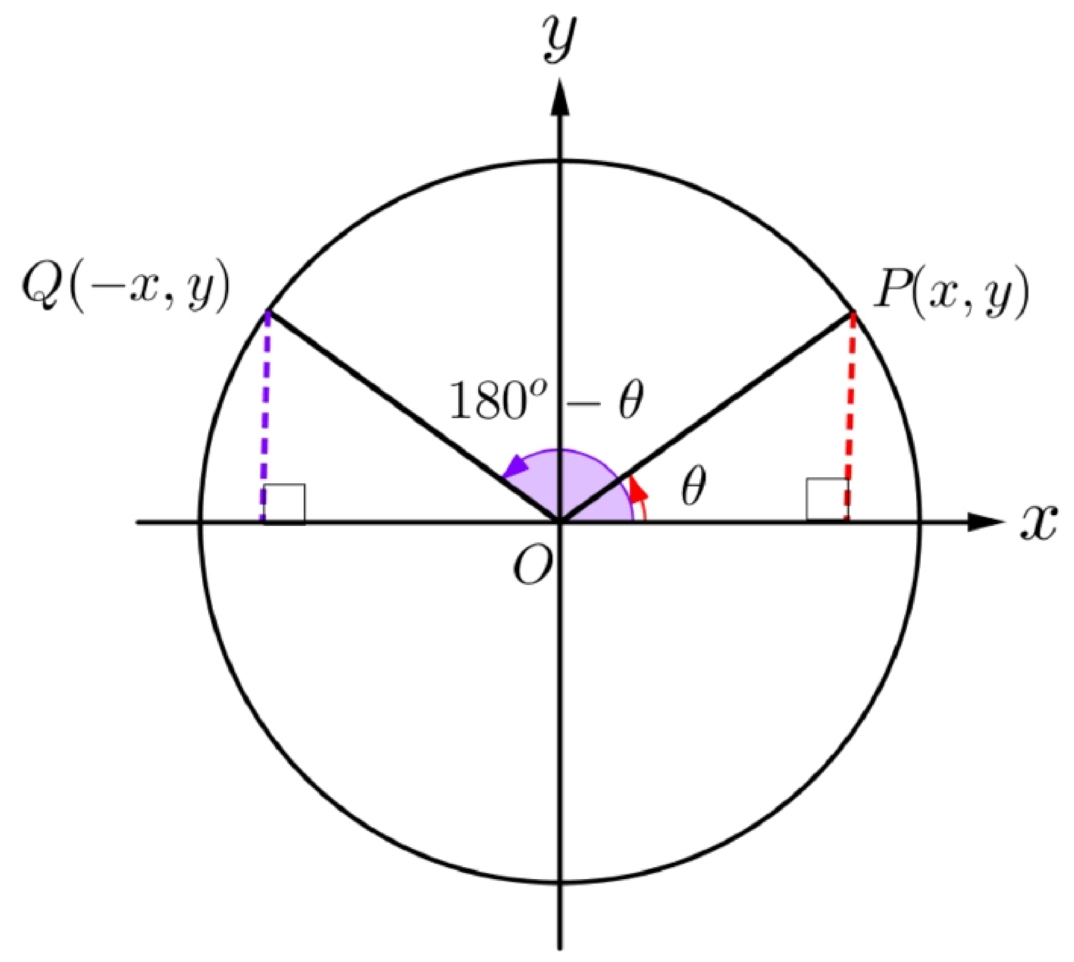
答：略

1-3.3 廣義角的三角函數值與銳角三角函數值之關係

於高一時已學過如何將 $\sin\theta$ 、$\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 的廣義角三角函數值化成銳角三角函數值，那麼對於其他三個三角函數 $\cot\theta$ 、$\sec\theta$ 及 $\csc\theta$ 的廣義角函數值要如何化成銳角函數值呢？下面我們一一討論之。

〈一〉 $(180°-\theta)$ 與 θ 的關係

以原點為圓心，半徑為 1 的單位圓中。設 θ 與 $(180°-\theta)$ 的終邊與單位圓分別交於 P 和 Q 兩點，如圖 8 所示，點 P 和 Q 對稱於 y 軸，若 P 點的坐標為 (x,y)，則 Q 點的坐標為 $(-x,y)$ 。



〈圖 8〉

此時，由廣義角三角函數定義與 Q 點的坐標，得

$$\sin(180°-\theta)=y=\sin\theta$$

$$\cos(180°-\theta)=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180°-\theta)=\frac{y}{-x}=-\tan\theta，(x\neq 0)$$

$$\cot(180°-\theta)=\frac{1}{\tan(180°-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta$$

$$\sec(180°-\theta)=\frac{1}{\cos(180°-\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

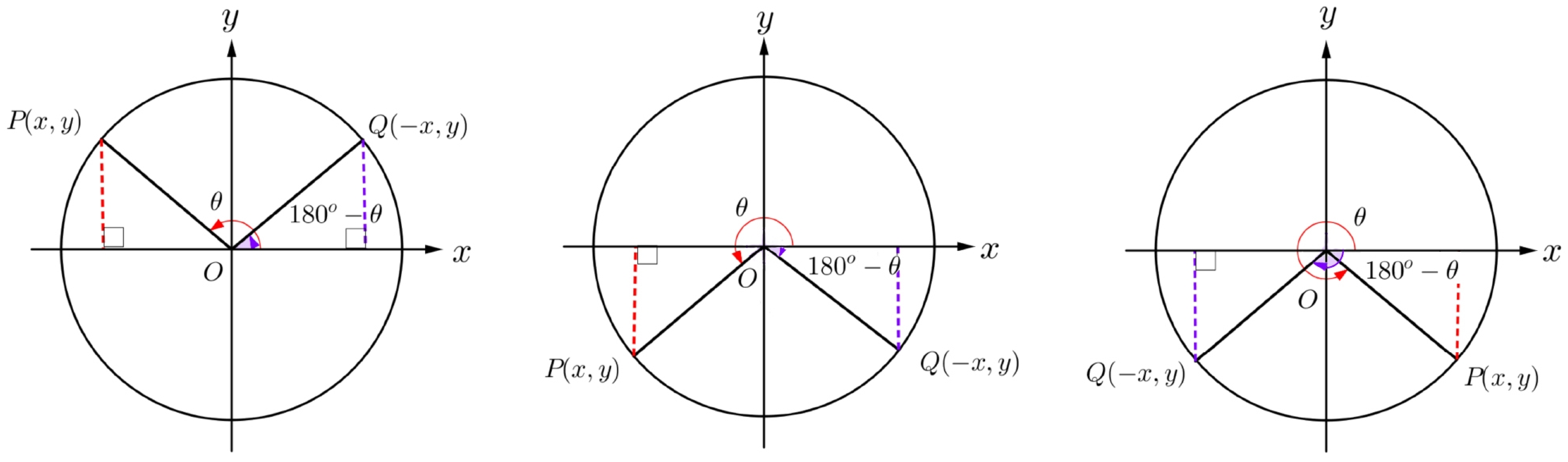
$$\csc(180°-\theta)=\frac{1}{\sin(180°-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

因此，得到 $(180°-\theta)$ 與 θ 的關係如下。

【 $(180°-\theta)$ 與 θ 的關係】

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$	$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$
$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$	$\cot(180°-\theta)=-\cot\theta$
$\sec(180°-\theta)=-\sec\theta$	$\csc(180°-\theta)=\csc\theta$

在圖 8 我們只畫出角 θ 為銳角的情形，事實上，當角 θ 為任意角時，P 和 Q 兩點仍然對稱於 y 軸，如圖 9 所示，因此上述關係式對廣義角 θ 都成立。



θ 為第二象限角　　θ 為第三象限角　　θ 為第四象限角

〈圖 9〉

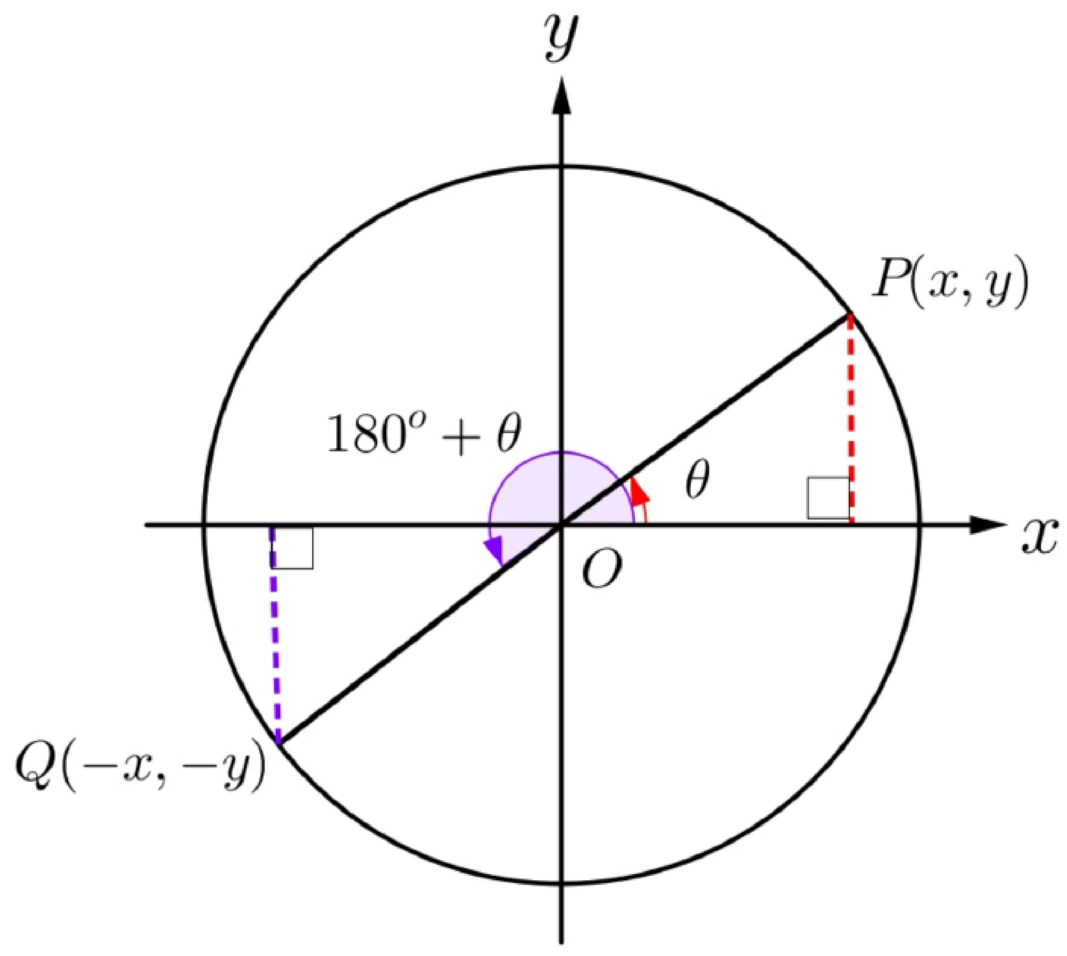
有了換算公式後，我們可將介於 $90° \sim 180°$ 之間的鈍角化成銳角。

例如：

$$\cot 150° = \cot(180° - 30°) = -\cot 30°$$
$$\sec 120° = \sec(180° - 60°) = -\sec 60°$$

〈二〉$(180^\circ+\theta)$ 與 的關係

設 θ 與 $(180^\circ+\theta)$ 的終邊與單位圓分別交於 P 和 Q 兩點，以下僅以 θ 為第一象限角作圖，如圖 10 所示，點 P 和 Q 對稱於原點，若 P 點的坐標為 (x,y)，則 Q 點的坐標為 $(-x,-y)$。



$(180^\circ+\theta)$ 角與 θ 角之相對位置

〈圖 10〉

由廣義角三角函數定義與 Q 點的坐標，得

$$\sin(180^\circ+\theta)=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{-y}{-x}=\tan\theta\ ，(x\neq 0)$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\tan(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

整理如下。

【$(180^\circ+\theta)$ 與 θ 的關係】

$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta$	$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$
$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$	$\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta$
$\sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta$	$\csc(180^\circ+\theta)=-\csc\theta$

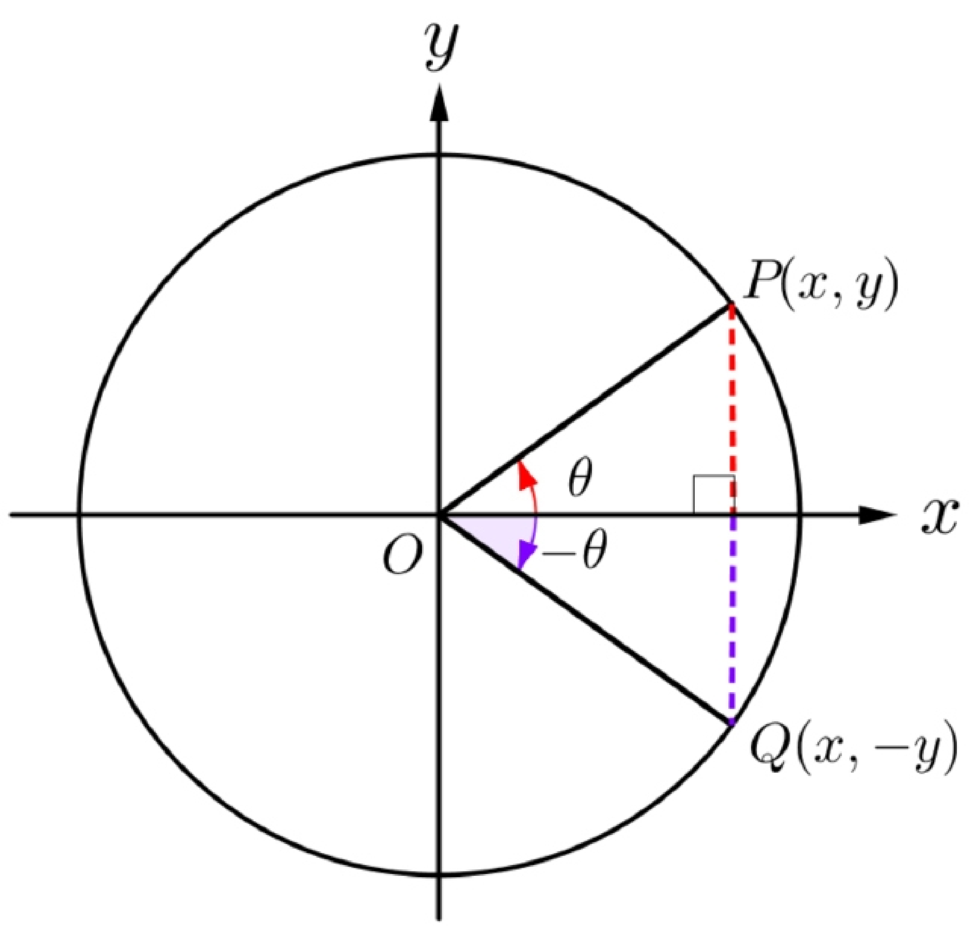
例如：

$$\cot 210^\circ=\cot(180^\circ+30^\circ)=\cot 30^\circ$$

$$\sec 240^\circ=\sec(180^\circ+60^\circ)=-\sec 60^\circ$$

〈三〉$(-\theta)$ 與 θ 的關係

設 θ 與 $(-\theta)$ 的終邊與單位圓分別交於 P 和 Q 兩點，如圖 11 所示，點 P 和 Q 對稱於 x 軸，若 P 點的坐標為 (x,y)，則 Q 點的坐標為 $(x,-y)$。



$(-\theta)$ 角與 θ 角之相對位置

〈圖 11〉

根據廣義角三角函數定義與 Q 點的坐標，得

$$\sin(-\theta) = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\tan\theta ，(x \neq 0)$$

$$\cot(-\theta) = \frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\csc(-\theta) = \frac{1}{\sin(-\theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -\csc\theta$$

故有 $(-\theta)$ 與 θ 的關係如下。

【$(-\theta)$ 與 θ 的關係】

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

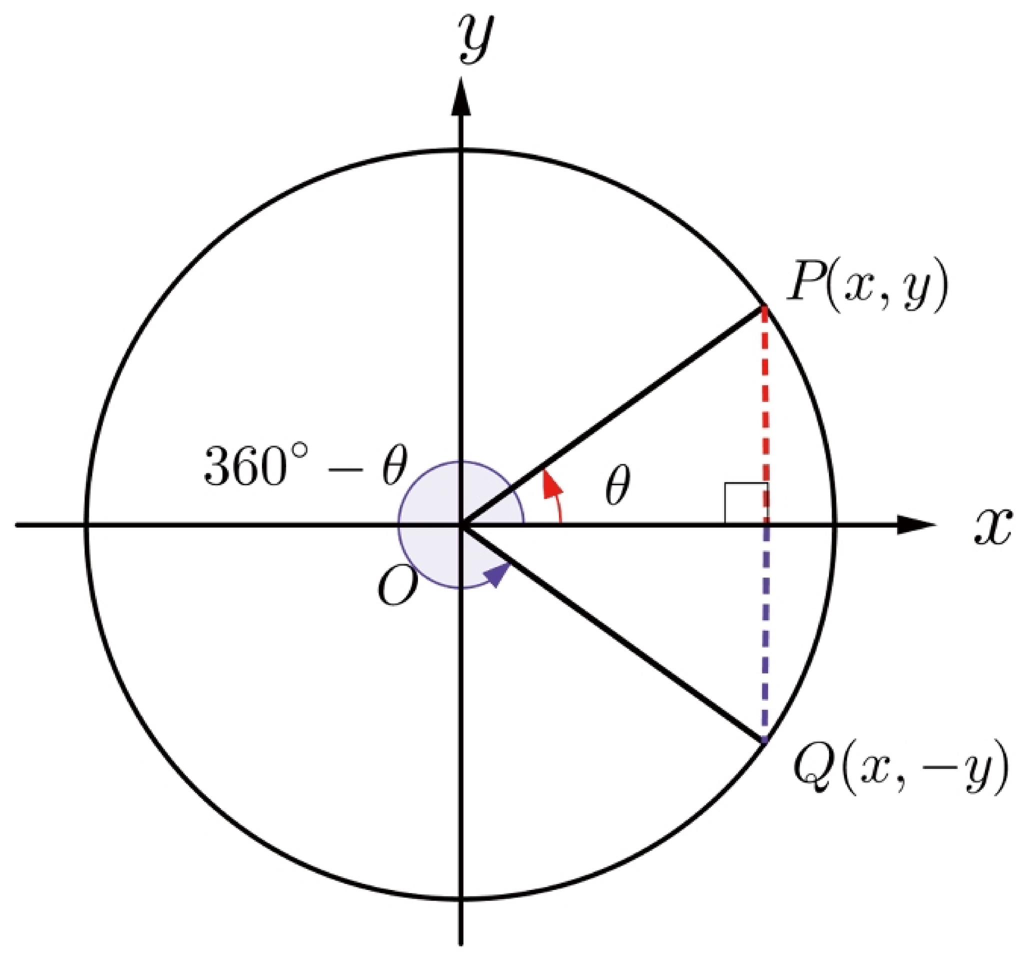
例如：

$$\cot(-60^\circ) = -\cot 60^\circ$$

$$\sec(-240^\circ) = \sec 240^\circ$$

〈四〉$(360°-\theta)$與θ的關係

我們利用$(360°-\theta)$與$(-\theta)$為同界角的關係，並比較圖 11 與圖 12，可推得其具有相同的三角函數值。



$(360°-\theta)$角與θ角之相對位置

〈圖 12〉

故知$(360°-\theta)$與θ的關係如下。

【$(360°-\theta)$與θ的關係】

$\sin(360°-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(360°-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(360°-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$　　$\cot(360°-\theta)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$

$\sec(360°-\theta)=\sec(-\theta)=\sec\theta$　　$\csc(360°-\theta)=\csc(-\theta)=-\csc\theta$

同樣地，因為$(360°+\theta)$與θ為同界角，因此可由θ角的三角函數值推出$(360°+\theta)$的三角函數值。

例題 8

求下列各三角函數值：

①$\cot 240°$　②$\sec\frac{3\pi}{4}$　③$\csc(-150°)$

解：

① $\cot 240° = \cot(180° + 60°) = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

② $\sec\frac{3\pi}{4} = \sec(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sec\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

③ $\csc(-150°) = -\csc 150° = -\csc(180° - 30°) = -\csc 30° = -2$

隨堂練習 7

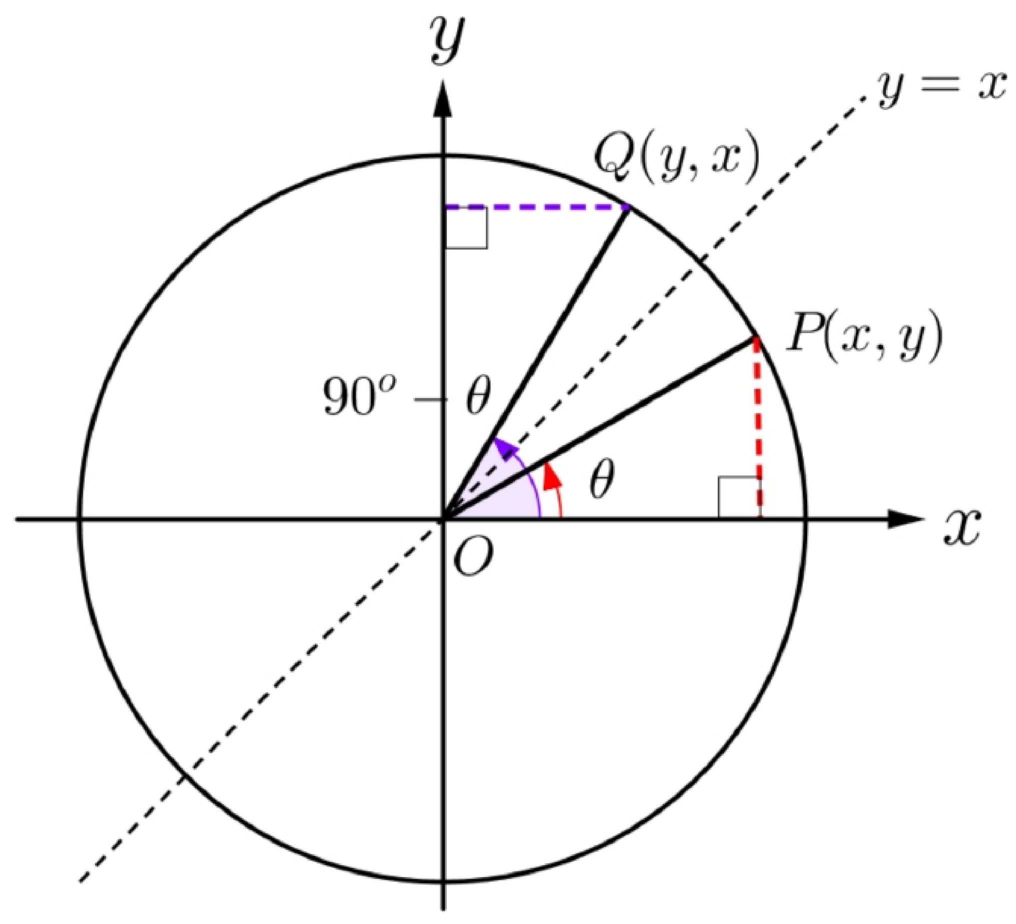
求下列各三角函數值：

①$\cot 135°$　②$\sec(-300°)$　③$\csc\frac{7\pi}{6}$

答：①-1　②$2$　③-2

〈五〉$(90°-\theta)$ 與 θ 的關係

在前面提到商數關係、倒數關係與平方關係對廣義角都成立，那麼餘角關係仍然成立嗎？ 設 θ 與 $(90°-\theta)$ 的終邊與單位圓分別交於 P 和 Q 兩點，因為 $\dfrac{\theta+(90°-\theta)}{2}=45°$，所以點 P 和 Q 對稱於直線 $y=x$ ，如圖 13 所示，若 P 點的坐標為 (x,y)，則 Q 點的坐標為 (y,x)。



$(90°-\theta)$ 角與 θ 角之相對位置

〈圖 13〉

由廣義角三角函數定義與 Q 點的坐標，得

$$\sin(90°-\theta)=x=\cos\theta$$
$$\cos(90°-\theta)=y=\sin\theta$$
$$\tan(90°-\theta)=\frac{x}{y}=\cot\theta，(y\neq 0)$$
$$\cot(90°-\theta)=\frac{y}{x}=\tan\theta，(x\neq 0)$$
$$\sec(90°-\theta)=\frac{1}{y}=\csc\theta，(y\neq 0)$$
$$\csc(90°-\theta)=\frac{1}{x}=\sec\theta，(x\neq 0)$$

整理得 $(90°-\theta)$ 與 θ 的關係如下。

【$(90°-\theta)$ 與 θ 的關係】

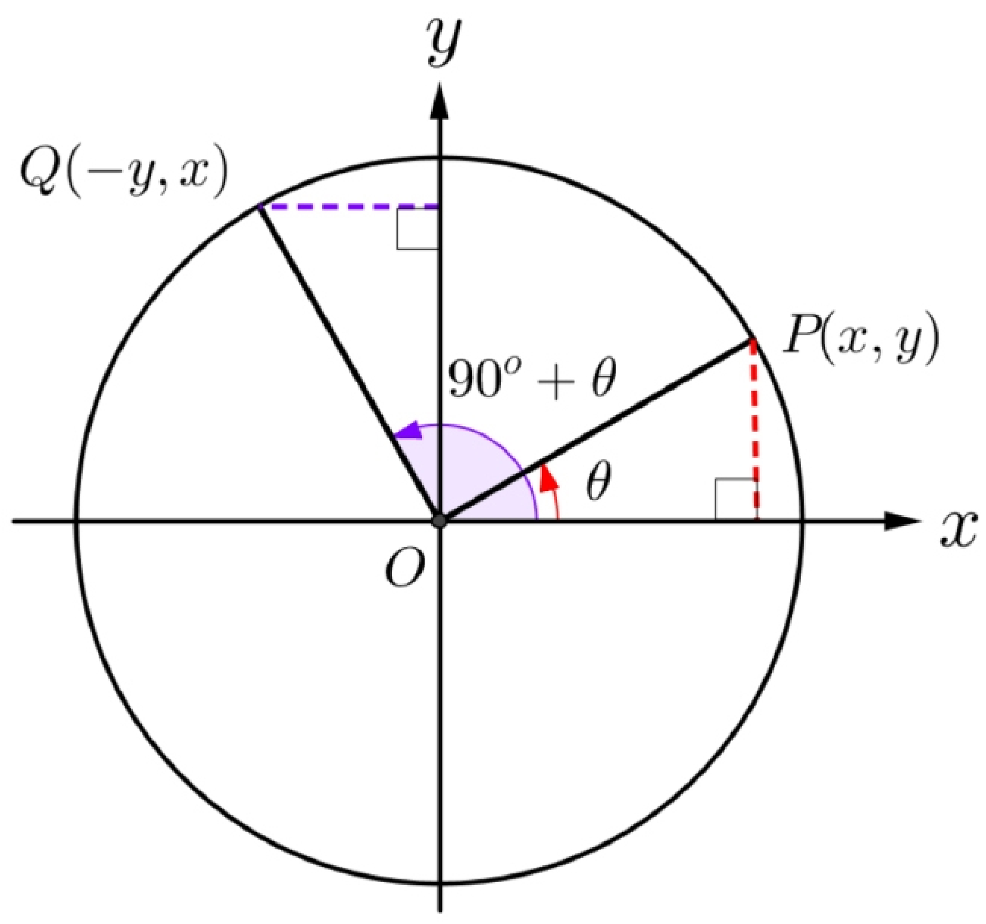
$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$	$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$
$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$	$\cot(90°-\theta)=\tan\theta$
$\sec(90°-\theta)=\csc\theta$	$\csc(90°-\theta)=\sec\theta$

〈六〉$(90°+\theta)$ 與 θ 的關係

我們可利用 $(180°-\theta)$ 和 $(90°-\theta)$ 的三角函數值換算公式，推得 $(90°+\theta)$ 的三角函數值變換。例如：

$$\tan(90°+\theta)=\tan(180°-(90°-\theta))=-\tan(90°-\theta)=-\cot\theta$$

除了仿照上述方法，證得 $(90°+\theta)$ 關係式，亦可根據廣義角三角函數定義與圖 14 中 Q 點坐標推得 $(90°+\theta)$ 與 θ 的關係。



$(90°+\theta)$ 角與 θ 角之相對位置

〈圖 14〉

故得 $(90°+\theta)$ 與 θ 的關係如下。

【$(90°+\theta)$ 與 θ 的關係】

$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

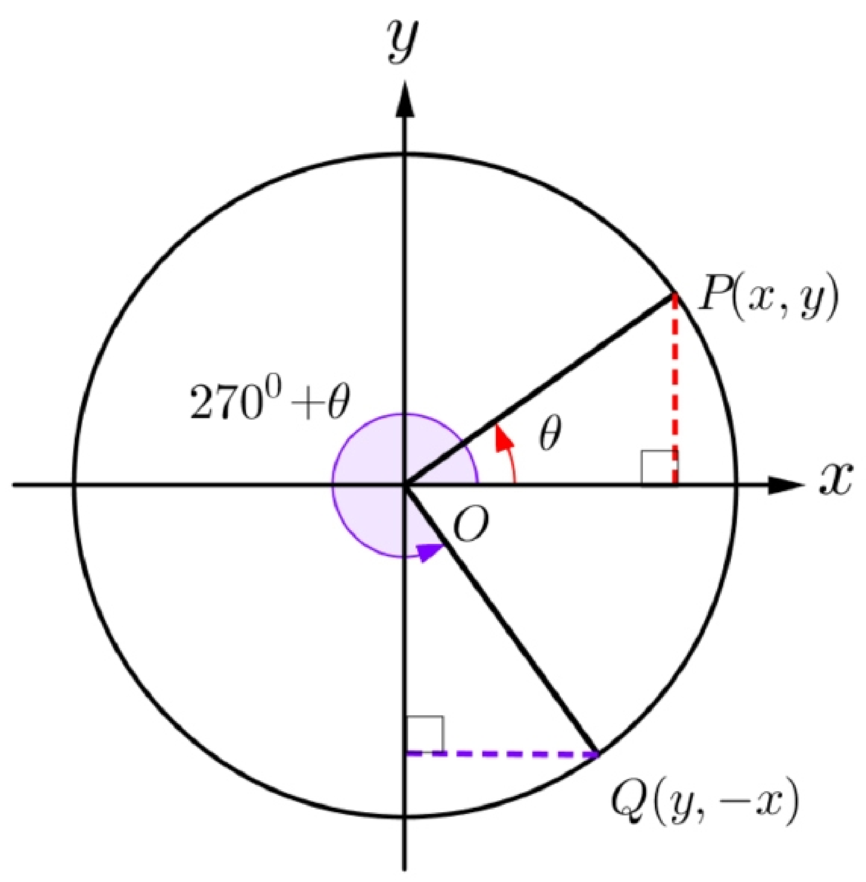
$\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$　　$\cot(90°+\theta)=-\tan\theta$

$\sec(90°+\theta)=-\csc\theta$　　$\csc(90°+\theta)=\sec\theta$

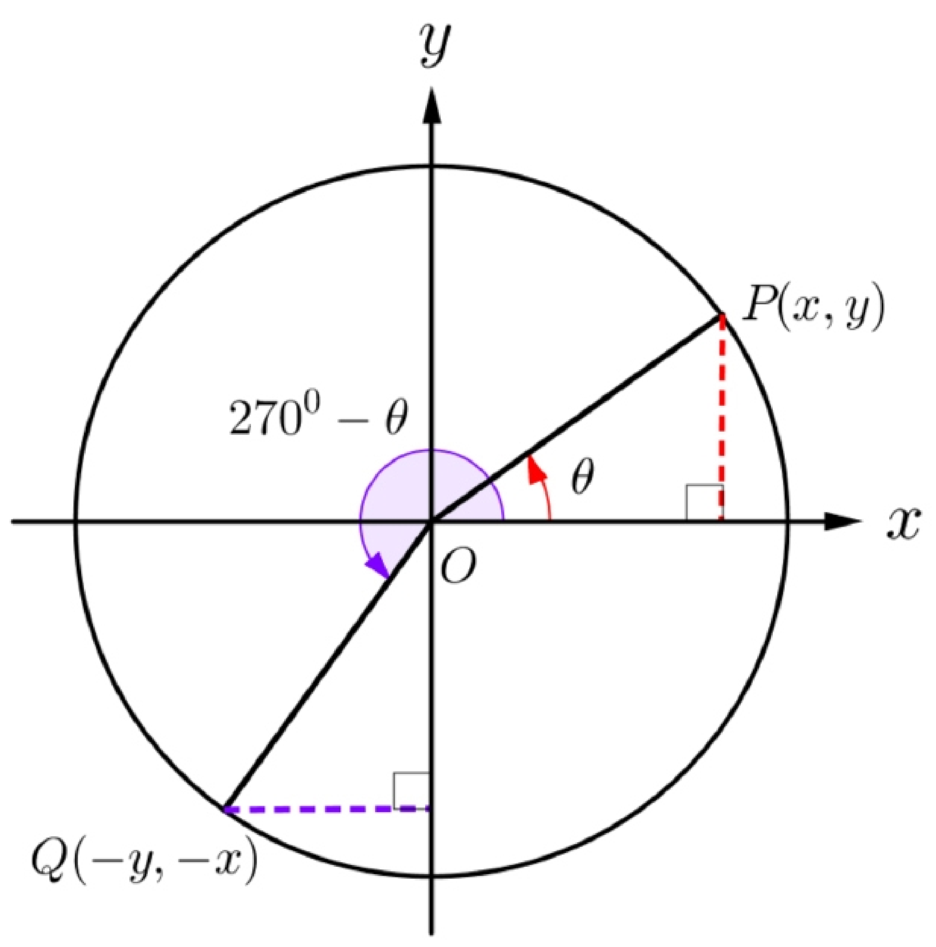
同樣地，$(270°\pm\theta)$ 角的三角函數值，亦可利用前面的結果推得，例如：

$$\tan(270°-\theta)=\tan(180°+(90°-\theta))=\tan(90°-\theta)=\cot\theta$$
$$\tan(270°+\theta)=\tan(180°+(90°+\theta))=\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$$

除了上述方法外，也可根據廣義角的三角函數定義，以及圖 15 中兩個單位圓的 Q 點坐標，分別推得 $270°+\theta$ 與 $270°-\theta$ 的三角函數值變換。



$(270°+\theta)$ 角與 θ 角之相對位置



$(270°-\theta)$ 角與 θ 角之相對位置

〈圖 15〉

故得下列之關係。

【$(270°\pm\theta)$ 與 θ 的關係】

$\sin(270°-\theta)=-\cos\theta$　　$\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(270°-\theta)=\cot\theta$　　$\cot(270°-\theta)=\tan\theta$

$\sec(270°-\theta)=-\csc\theta$　　$\csc(270°-\theta)=-\sec\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$　　$\cos(270°+\theta)=\sin\theta$

$\tan(270°+\theta)=-\cot\theta$　　$\cot(270°+\theta)=-\tan\theta$

$\sec(270°+\theta)=\csc\theta$　　$\csc(270°+\theta)=-\sec\theta$

例題 9

試化簡 $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(-\theta)}+\dfrac{\cot(\frac{3\pi}{2}+\theta)}{\tan(\pi+\theta)}-\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin(2\pi-\theta)}$。

解：

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(-\theta)}+\frac{\cot(\frac{3\pi}{2}+\theta)}{\tan(\pi+\theta)}-\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin(2\pi-\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{-\tan\theta}{\tan\theta}-\frac{\sin\theta}{-\sin\theta}$$

$$=1-1+1$$

$$=1$$

隨堂練習 8

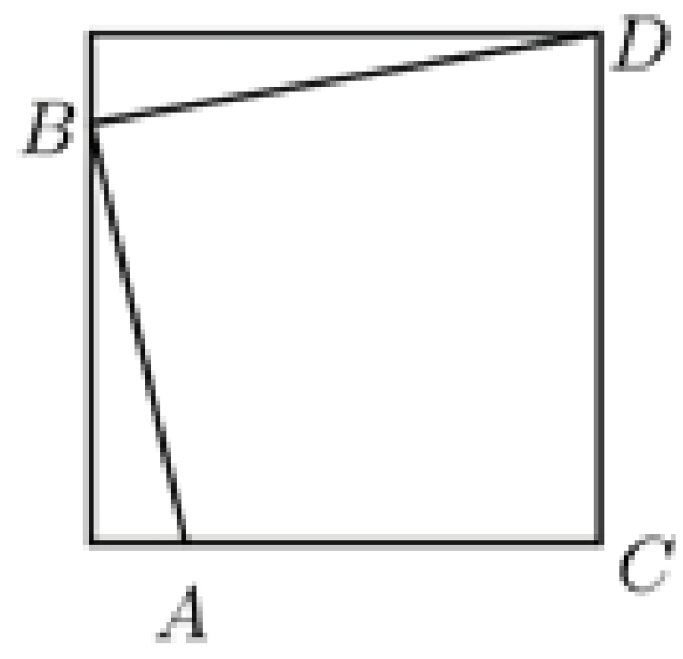
試化簡 $\sin(270°-\theta)\times\cot(90°+\theta)\times\csc(-\theta)$。

答：-1

1-3 廣義角的三角函數習題

1. 若角θ落在第二象限，則 $\dfrac{\theta}{2}$ 可能落在第幾象限？

2. 如右圖，C、D 為正方形的兩個頂點，若 $\angle BAC=\theta$，$\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$，$\overline{AB}=a$，$\overline{BD}=b$。試以 a，b，θ表示 $\overline{CD}$。



3. 試求下列各三角函數值

① $\cot(-840^\circ)$　　② $\sec\dfrac{16}{3}\pi$　　③ $\csc 2025^\circ$

4. 試求 $\dfrac{\sin\dfrac{11\pi}{6}+\tan(-\dfrac{3\pi}{4})}{\sin\dfrac{5\pi}{6}+\tan\dfrac{3\pi}{4}}$ 之值。

5. 試化簡下列各式：

① $\tan(-396^\circ)+\cot(774^\circ)+\sec(492^\circ)+\csc(-318^\circ)$

② $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ-\theta)}+\dfrac{\csc(180^\circ+\theta)}{\sec(90^\circ-\theta)}-\dfrac{\tan(540^\circ-\theta)}{\cot(270^\circ+\theta)}$

6. 若 $\tan 20^\circ=k$，試將 $\sec 250^\circ$ 以 k 表示。

7. 試求 $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}+\dfrac{1}{2+\tan^2\theta}+\dfrac{1}{2+\cot^2\theta}$ 之值。

8. 若 $\tan\theta,\cot\theta$ 為 $3x^2-6x+k=0$ 之兩根，求$\sin\theta\cos\theta$及 k 之值。

簡答

1. 第一象限或第三象限

2. $a\sin\theta-b\cos\theta$

3. ① $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　② -2　　③ $-\sqrt{2}$

4. -1

5. ① 0　　② -3

6. $-\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

7. 2

8. $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$k=3$

1-4 三角函數的圖形

在日常生活中，我們可以透過圖形，直觀的了解到很多事物的變化。三角函數是一種週期函數，而自然界的某些現象是可以三角函數的圖形來描述的，例如湖面漣漪的波動。另一方面，我們常常需要做預測，如果我們將事物的起伏變化繪製成圖形，便可以當成是預測的根據。

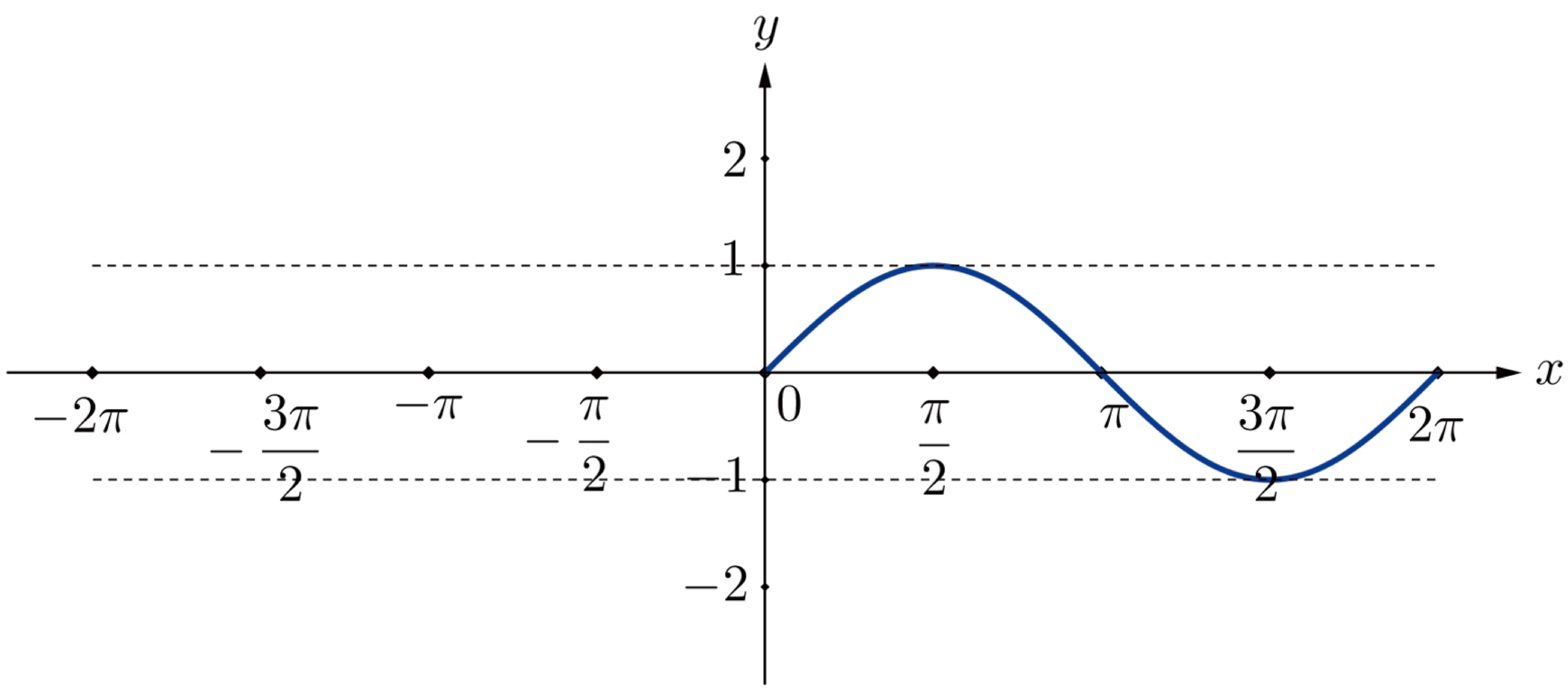
我們在前面介紹了角的另一個度量單位「弧度」，也定義了六個三角函數，並討論他們的性質。接下來，我們將逐一探討這六個三角函數的圖形與其相關性質。由廣義角三角函數的定義，我們知道三角函數是一個將廣義角 對應到三角函數值的函數。又對於任意實數必有一個弧度的廣義角與之對應。因此，我們可以說三角函數是一個實數對應到實數的函數，亦即 $\sin x$ ， $\cos x$ ， $\tan x$ ， $\cot x$ ， $\sec x$ ， $\csc x$ 可視為 x 之函數。

描繪三角函數最直接的方法就是描點法，首先將某些特殊的 值所對應的函數值列表，再於坐標系中標示出相對應的點，然後以平滑曲線連接起來即可。以 $y=f(x)=\sin x$ 為例，我們可以利用直角坐標系上的點 $(x,\sin x)$ 來繪製 $y=\sin x$ 的圖形。而習慣上，在討論三角函數的圖形時，我們會用弧度來表示，當角度為弧度時，可以將單位省略不寫。若能輔以電腦軟體 (例如，*Geogebra*、*Mathematica* 等) 或繪圖機來協助繪圖並驗證描點法的結果，將可以更快速而正確的看出函數的性質與曲線的變化。

1-4.1 正弦函數 $y=\sin x$

以下，我們先繪製 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍的圖形。因為對於任意實數 x，$\sin(x+2\pi)=\sin x$ 恆成立。首先，將某些介於 $0\le x\le 2\pi$ 的特別角及其函數值列出，並將其點標示出來，最後再以平滑曲線連接即可，如圖 16。

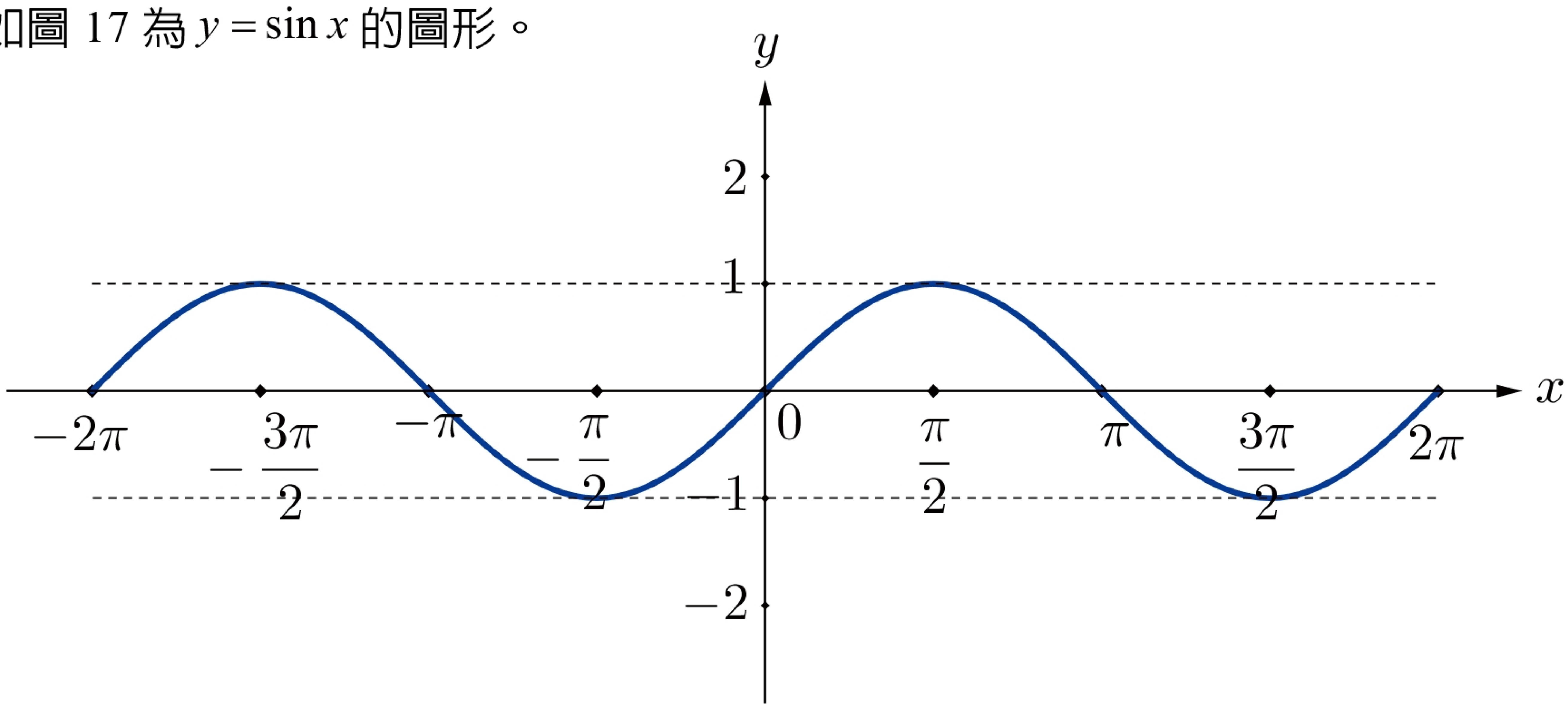
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



〈圖 16〉正弦函數 $y=\sin x$ 的部分圖形

〈一〉 $y=\sin x$ 圖形

由廣義角三角函數的定義，我們知道對於任意實數 x，$\sin(2\pi+x)=\sin x$，亦即 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 的圖形和 $y=\sin x$ 在 $2\pi\le x\le 4\pi$ 的圖形是一樣的。因此，我們只要將 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形向右平移 2π 單位，就可以得到 $2\pi\le x\le 4\pi$ 上的圖形。然後將 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形逐次向右或向左平移 2π 單位，就可以得到 $y=\sin x$ 的圖形，如圖 17 為 $y=\sin x$ 的圖形。



〈圖 17〉正弦函數 $y=\sin x$ 圖形

【定義】

週期：若函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+p)=f(x)$，$p>0$，則稱 $f(x)$ 為週期函數。

滿足 $f(x+p)=f(x)$ 的最小正數 p，稱為 $f(x)$ 的週期。

〈二〉週期：2π

從圖形我們可以看出，每隔 2π 單位圖形會重複出現，所以週期為 2π。

〈三〉x 的範圍：x 為實數

y 的範圍：$\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

從正弦函數的圖形，我們可以知道，每個實數 x 都有其相對應的 $\sin x$ 值，而且滿足 $-1\le \sin x\le 1$，因此 x 的範圍為實數，y 的範圍是 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$。

〈四〉增減性：由 $y=\sin x$ 的圖形，如圖 17，我們可以看出

當 x 從 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，$y=\sin x$ 函數值由 0 逐漸增加到 1

當 x 從 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，$y=\sin x$ 函數值由 1 逐漸減少到 0

當 x 從 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，$y=\sin x$ 函數值由 0 逐漸減少到 -1

當 x 從 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時，$y=\sin x$ 函數值由 -1 逐漸增加到 0

因此，我們可以知道，$y=\sin x$ 在第一象限、第四象限為遞增函數，而在第二象限、第三象限為遞減函數。

〈五〉對稱性：

① 線對稱：對稱軸為通過圖形最高點與最低點的鉛直線

（例如 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$ 等）

② 點對稱：對稱中心為圖形與 x 軸的交點 $(n\pi,0)$，n 為整數。

〈六〉奇偶性：$y=f(x)=\sin x$ 為奇函數

因為對於任意實數 x，$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$，所以 $f(x)=\sin x$ 為奇函數。

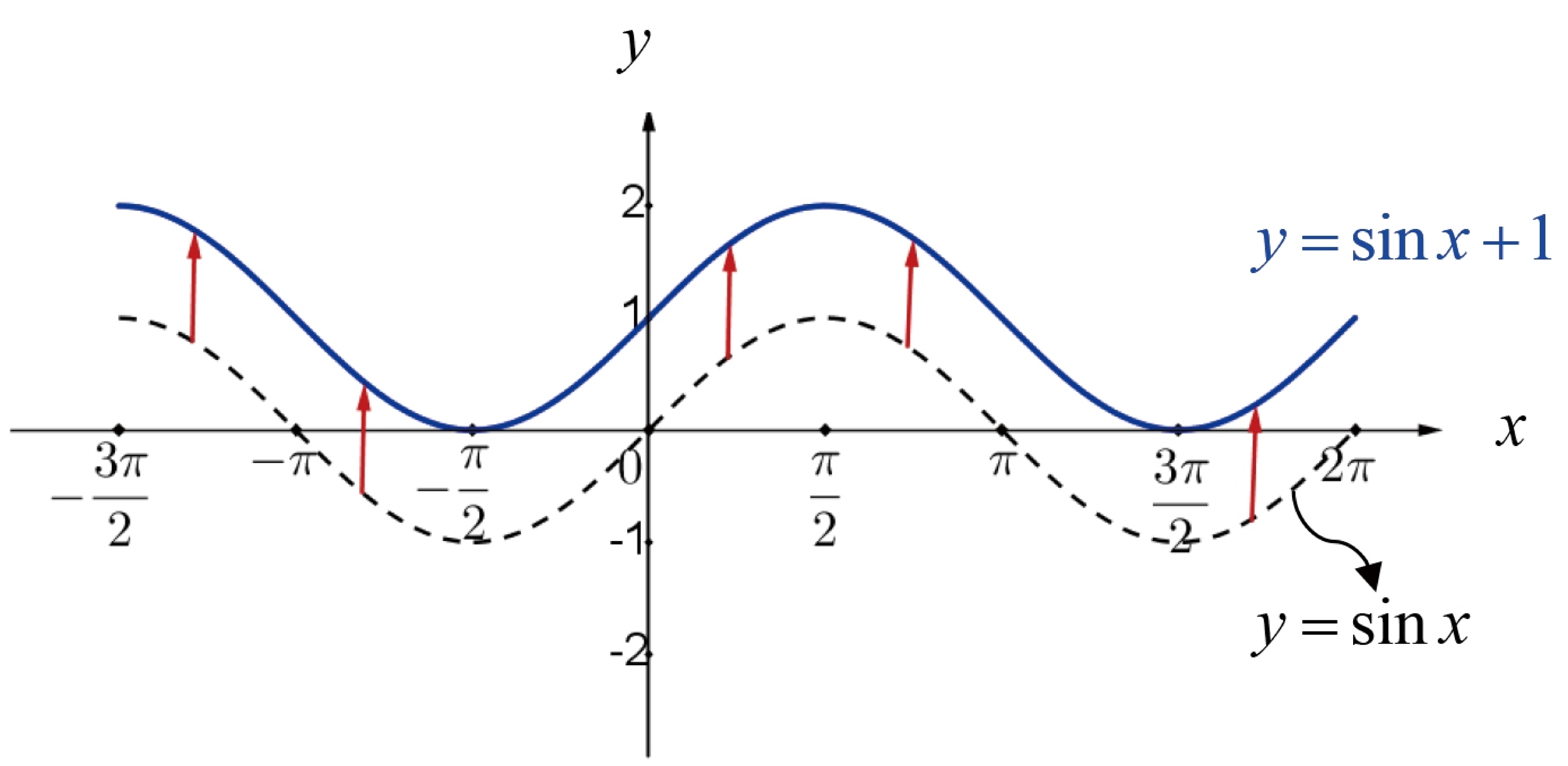
例題 1

試利用 $y=\sin x$ 描繪 $y=\sin x+1$ 的圖形。

解：

$y=\sin x$	$(-\frac{\pi}{2},-1)$	$(0,0)$	$(\frac{\pi}{2},1)$	$(\pi,0)$	$(\frac{3\pi}{2},-1)$
$y=\sin x+1$	$(-\frac{\pi}{2},0)$	$(0,1)$	$(\frac{\pi}{2},2)$	$(\pi,1)$	$(\frac{3\pi}{2},0)$

觀察上表得知，$y=\sin x+1$ 的函數值比 $y=\sin x$ 之值多 1，因此，只要將 $y=\sin x$ 的圖形往上平移一個單位即可得到函數 $y=\sin x+1$ 的圖形。



隨堂練習 1

試利用 $y=\sin x$ 描繪 $y=\sin x-2$ 之圖形。

答： 略

例題 2

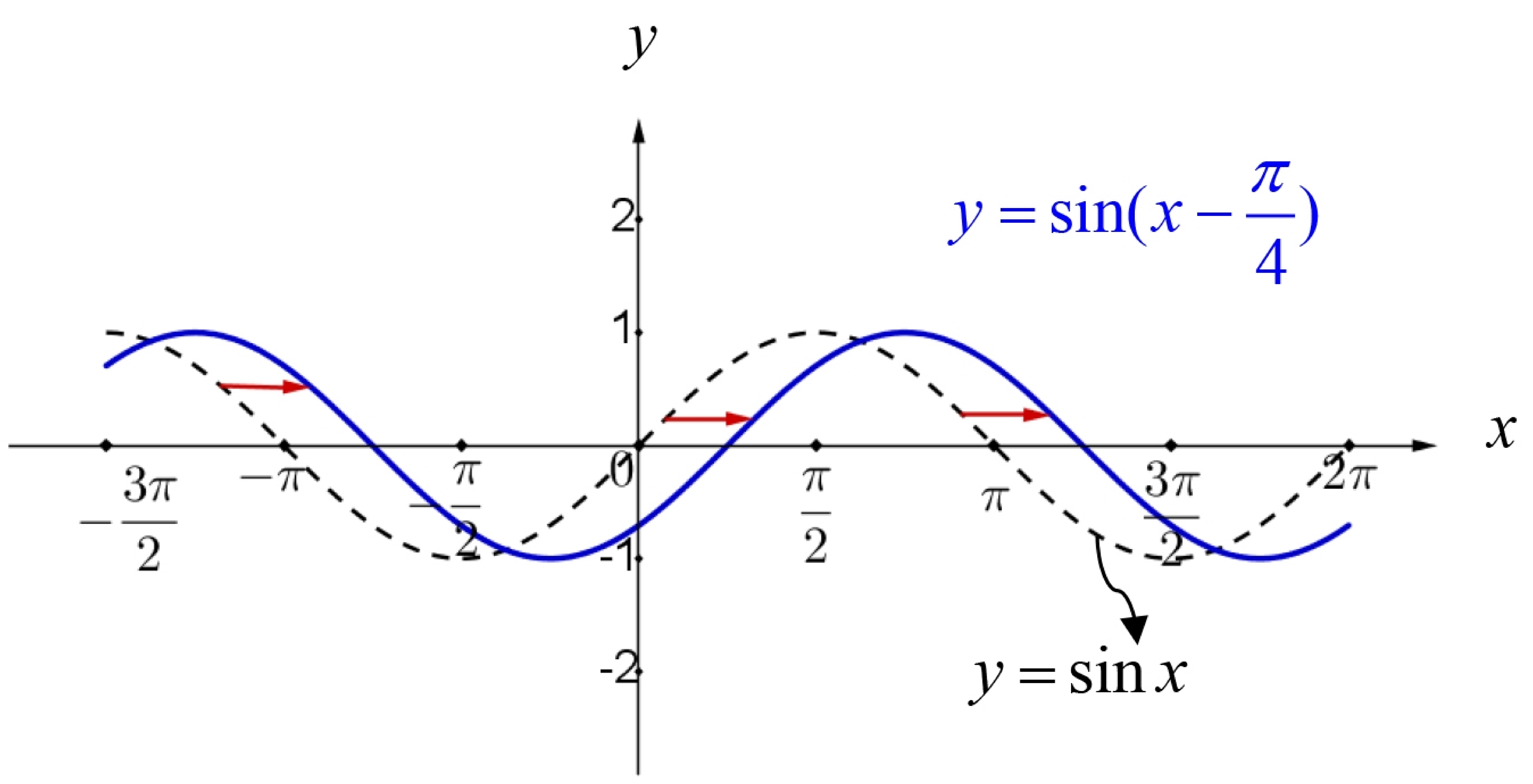
試利用 $y=\sin x$ 的圖形，描繪 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的圖形，並討論其週期、最大值與最小值。

解：

取某些特別角，列表如下

$y=\sin x$	$(0,0)$	$(\frac{\pi}{2},1)$	$(\pi,0)$	$(\frac{3\pi}{2},-1)$	$(2\pi,0)$
$y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4},0)$	$(\frac{3\pi}{4},1)$	$(\frac{5\pi}{4},0)$	$(\frac{7\pi}{4},-1)$	$(\frac{9\pi}{4},0)$

觀察上列表格，我們可以發現將 $y=\sin x$ 的 x 坐標增加 $\frac{\pi}{4}$，則 $y=\sin x$ 與 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的 y 值一樣。因此，將 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位，即可得到 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 之圖形，如下圖。而由圖形我們可得 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的週期為 2π，最大值 1，最小值 -1。



隨堂練習 2

試利用 $y=\sin x$ 的圖形，描繪出 $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ 的圖形，並討論其週期、最大值與最小值。

答： $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ 的週期為 2π，最大值 1，最小值 -1

【三角函數圖形之平移】

設 $h,k>0$

① $y=f(x)+k$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向上平移 k 單位而得

② $y=f(x)-k$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向下平移 k 單位而得

③ $y=f(x+h)$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向左平移 h 單位而得

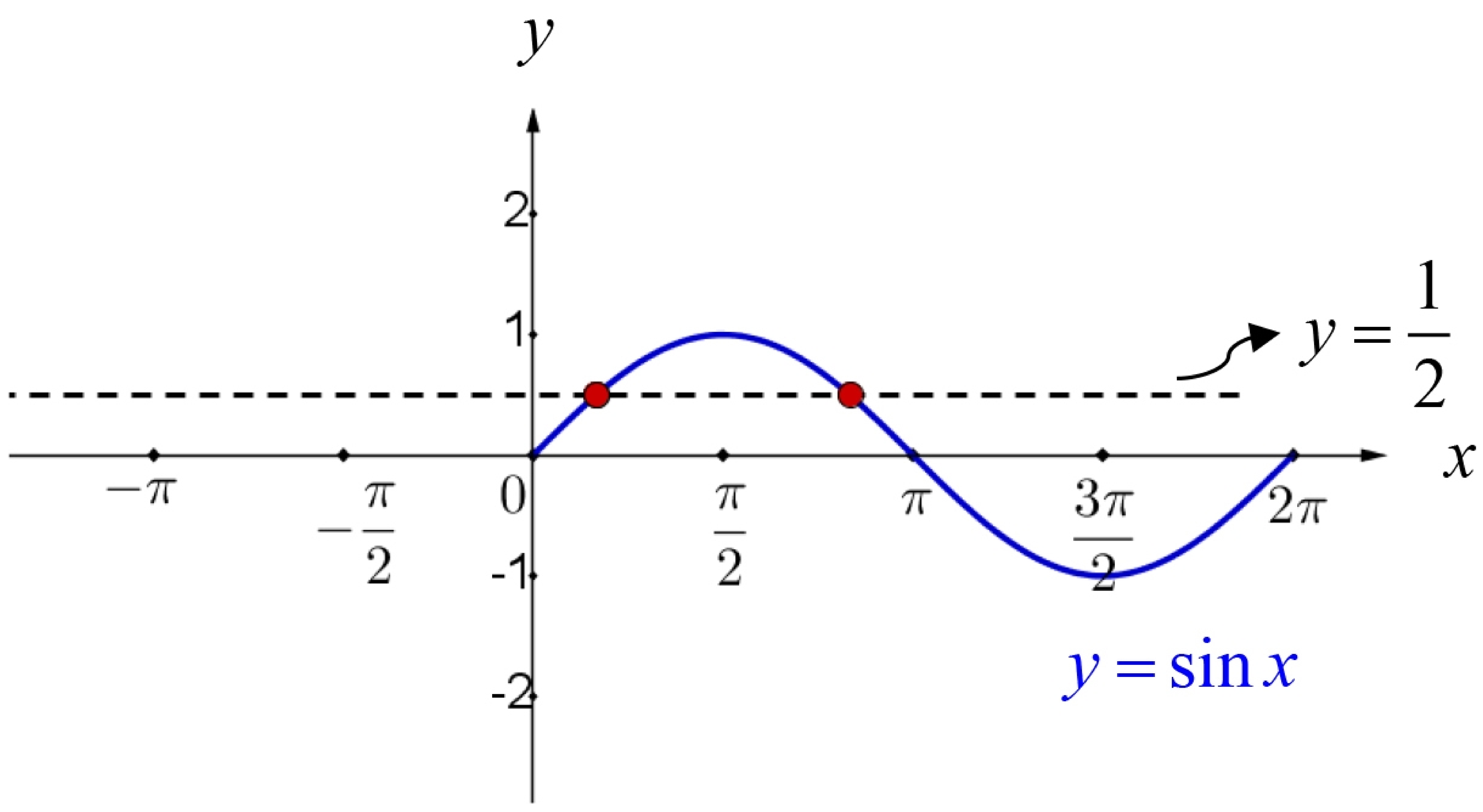
④ $y=f(x-h)$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向右平移 h 單位而得

例題 3

若 $0\le x\le 2\pi$，試求 $\sin x=\frac{1}{2}$ 解的個數。

解：

因為「方程式 $\sin x=\frac{1}{2}$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內解的個數」，即為「 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍的圖形與直線 $y=\frac{1}{2}$ 的交點個數」，因此，先畫出 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 區間的圖形，接著畫出 $y=\frac{1}{2}$ 的直線，而兩個圖形有兩個交點，如下圖，故 $\sin x=\frac{1}{2}$ 有兩個解。



隨堂練習 3

若 $-2\pi\le x\le 2\pi$，試求 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 解的個數。

答：4 個

例題 4

若 $3\sin^2 x+13\sin x-10=0$，試求 $\sin x$ 之值。
解：
首先將 $3\sin^2 x+13\sin x-10=0$ 做因式分解

可分解為 $(3\sin x-2)(\sin x+5)=0$

所以 $\sin x=\dfrac{2}{3}$ 或 $\sin x=-5$（不合，因為 $-1\le\sin x\le 1$）

隨堂練習 4

若 $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$，試求 $\sin x$ 之值。

答：$\sin x=-\dfrac{1}{2}$

例題 5

設 $0\le x<2\pi$，試求函數 $y=\cos^2 x+\dfrac{1}{2}\sin x-1$ 的最大值。
解：
因為 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，所以 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$$
\begin{aligned}
\text{因此 } y &= \cos^2 x+\frac{1}{2}\sin x-1 \\
&=(1-\sin^2 x)+\frac{1}{2}\sin x-1 \\
&=-\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin x \quad \text{再將此式配方} \\
&=-(\sin x-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

因為 $-1\le\sin x\le 1$，所以，當 $\sin x=\dfrac{1}{4}$ 時，y 有最大值 $\dfrac{1}{16}$。

隨堂練習 5

若 x 為任意實數，試求函數 $y=\sin^2 x-4\sin x+5$ 的最大值、最小值。
答：最大值 10，最小值 2

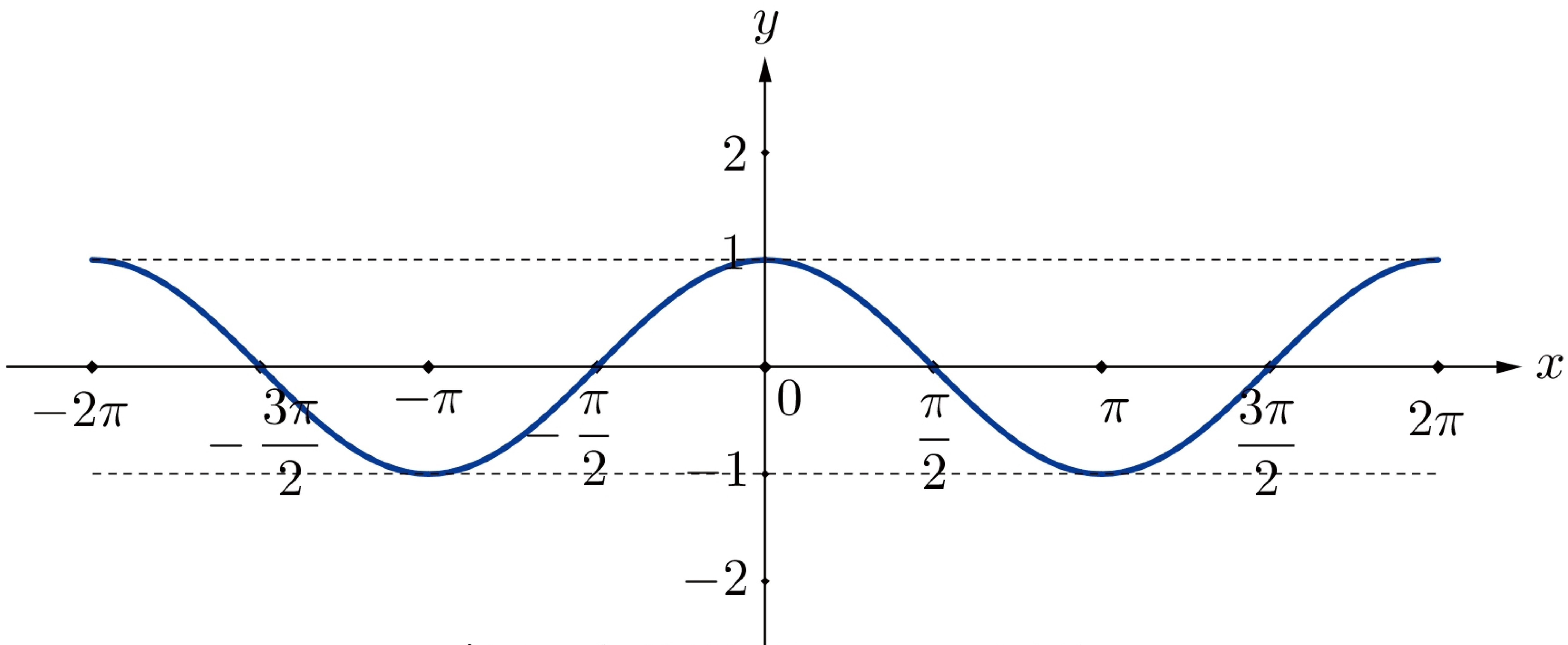
1-4.2 餘弦函數 $y=\cos x$

〈一〉 $y=\cos x$ 圖形

取某些特別角，求出其對應之函數值，列表如下

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0	1

將上表在坐標平面上描繪出來，並以平滑曲線連接，即可得到 $y=\cos x$，$-\frac{\pi}{2}\le x\le 2\pi$ 之圖形。又對於任意實數 x，恆有 $\cos(2\pi+x)=\cos x$。因此，我們只要將 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形向右平移 2π 單位，就可以得到 $2\pi\le x\le 4\pi$ 上的圖形。接著將 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形向右或向左平移 2π 單位，就可以得到 $y=\cos x$ 全部的圖形，如圖 18 為 $y=\cos x$ 的圖形。



〈圖 18〉餘弦函數 $y=\cos x$ 圖形

〈二〉週期：2π

〈三〉x 的範圍：x 為實數

y 的範圍：$\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

〈四〉增減性：由 $y=\cos x$ 圖形可以看出

當 x 從 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，$y=\cos x$ 函數值由 1 逐漸減少到 0

當 x 從 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，$y=\cos x$ 函數值由 0 逐漸減少到 -1

當 x 從 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，$y=\cos x$ 函數值由 -1 逐漸增加到 0

當 x 從 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時，$y=\cos x$ 函數值由 0 逐漸增加到 1

因此，我們可以知道，$y=\cos x$ 在第一象限、第二象限為遞減函數，而在第三象限、第四象限時為遞增函數。

〈五〉對稱性：

① 線對稱：對稱軸為通過圖形最高點與最低點的鉛直線（例如 $x=0, x=2\pi$ ）

② 點對稱：對稱中心為圖形與 x 軸的交點 $(\frac{\pi}{2}+n\pi, 0)$，n 為整數。

〈六〉奇偶性：$y=f(x)=\cos x$ 為偶函數

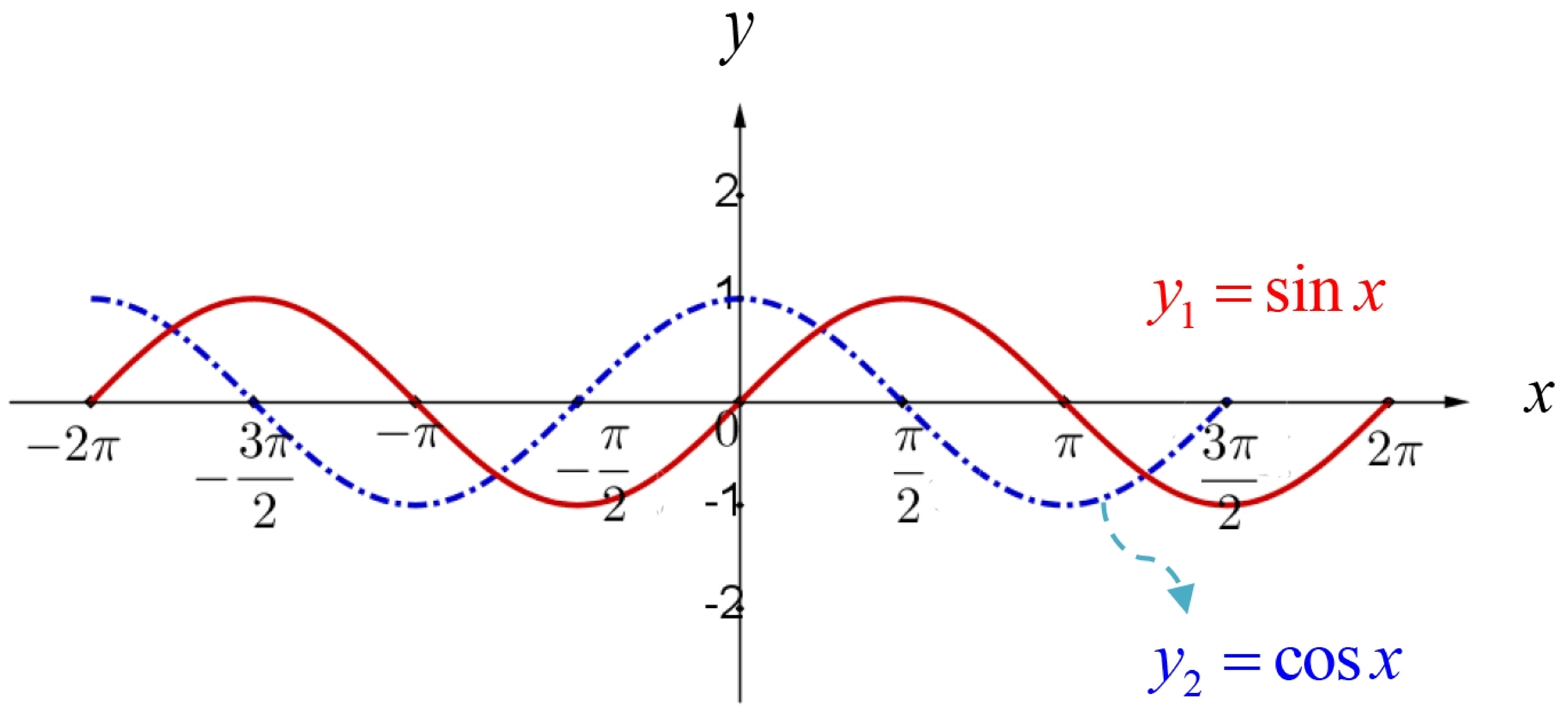
因為對於任意實數 x，$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$ 所以$\cos x$為偶函數。

例題 6

比較 $y_1=\sin x$ 與 $y_2=\cos x$ 圖形之關係。

解：

觀察下圖



且因為 $\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$，所以 $y_1=\sin x$ 是 $y_2=\cos x$ 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位。

又 $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$，所以 $y_2=\cos x$ 是 $y_1=\sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位。

隨堂練習 6

試由 $y_1=\sin x$ 與 $y_2=\cos x$ 之圖形比較大小：

① 當 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ 時，$\sin x$ 之值 ___ (大於、等於、小於) $\cos x$ 之值

② 當 $-\frac{3\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ 時，$\sin x$ 之值 ___ (大於、等於、小於) $\cos x$ 之值

答：① 大於 ② 小於

例題 7

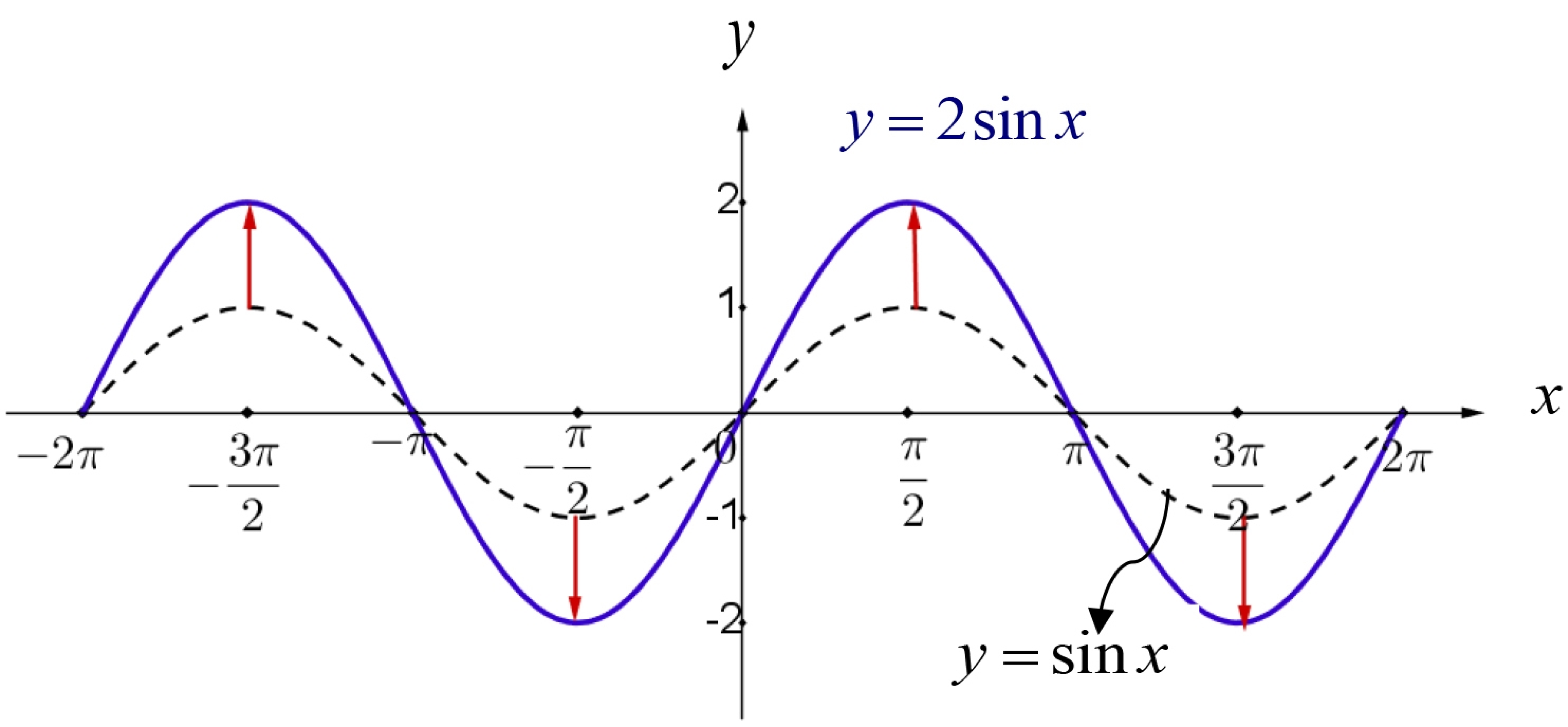
試利用 $y=\sin x$ 的圖形，描繪出 $y=2\sin x$ 的函數圖形，並討論週期與最大值、最小值。

解：

取一些特殊角的函數值列表如下。

$y=\sin x$	$(0,0)$	$(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$
$y=2\sin x$	$(0,0)$	$(\frac{\pi}{6},1)$	$(\frac{\pi}{3},\sqrt{3})$	$(\frac{2\pi}{3},\sqrt{3})$	$(\frac{4\pi}{3},-\sqrt{3})$

觀察上表，可以發現 $y=2\sin x$ 的 x 坐標和 $y=\sin x$ 的 x 坐標一樣時， $y=2\sin x$ 的 y 值為 $y=\sin x$ 的 y 值的兩倍。因此，將 $y=\sin x$ 的圖形的每一點 y 坐標乘以兩倍，即可得 $y=2\sin x$ 之圖形。而從圖形可以得到其週期為 2π ，最大值 2、最小值 -2。



隨堂練習 7

試利用 $y=\cos x$ 的圖形，畫出 $y=-2\cos x$ 的函數圖形，並討論週期與最大值、最小值。

答：略

例題 8

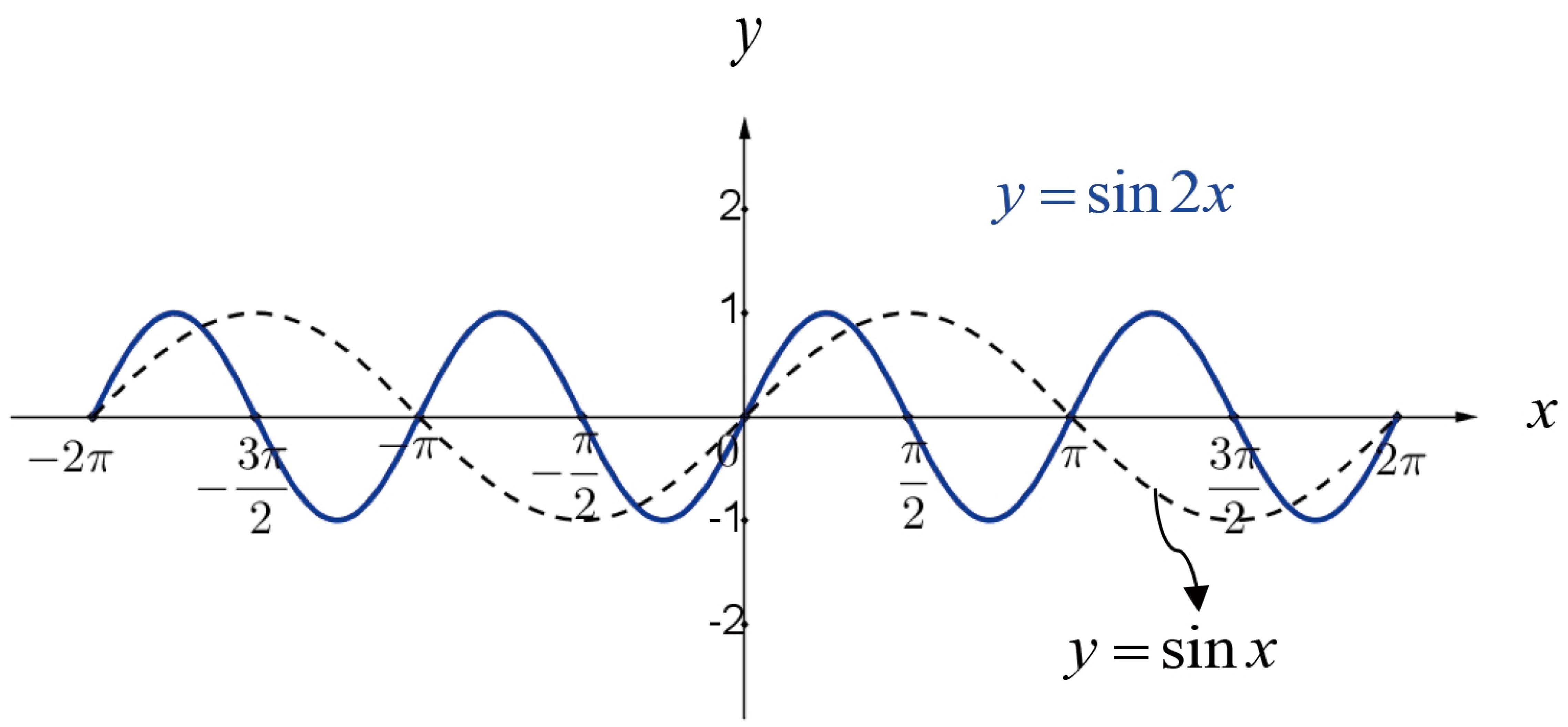
試利用 $y=\sin x$ 的圖形，畫出 $y=\sin 2x$ 的函數圖形，並討論週期與最大值、最小值。

解：

取一些特殊角的函數值列表如下。

$y=\sin x$	$(0,0)$	$(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\pi,0)$
$y=\sin 2x$	$(0,0)$	$(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{\pi}{8},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{2\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{\pi}{2},0)$

觀察上表，可以發現 $y=\sin 2x$ 的 x 坐標為 $y=\sin x$ 的 x 坐標一半時，其 y 值一樣。因此，將 $y=\sin x$ 的圖形水平壓縮 $\frac{1}{2}$ 單位，即可得 $y=\sin 2x$ 之圖形，如下圖，而觀察圖形可以得到其週期為 π，最大值 1、最小值 -1。



隨堂練習 8

試利用 $y=\cos x$ 的圖形，描繪出 $y=\cos 3x$ 之圖形，並討論週期與最大值、最小值。

答：略，週期為 $\frac{2\pi}{3}$，最大值 1，最小值 -1

【三角函數圖形之伸縮】

設 $a>0$

① $y=af(x)$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形上每一點的 y 坐標乘以 a 倍而得

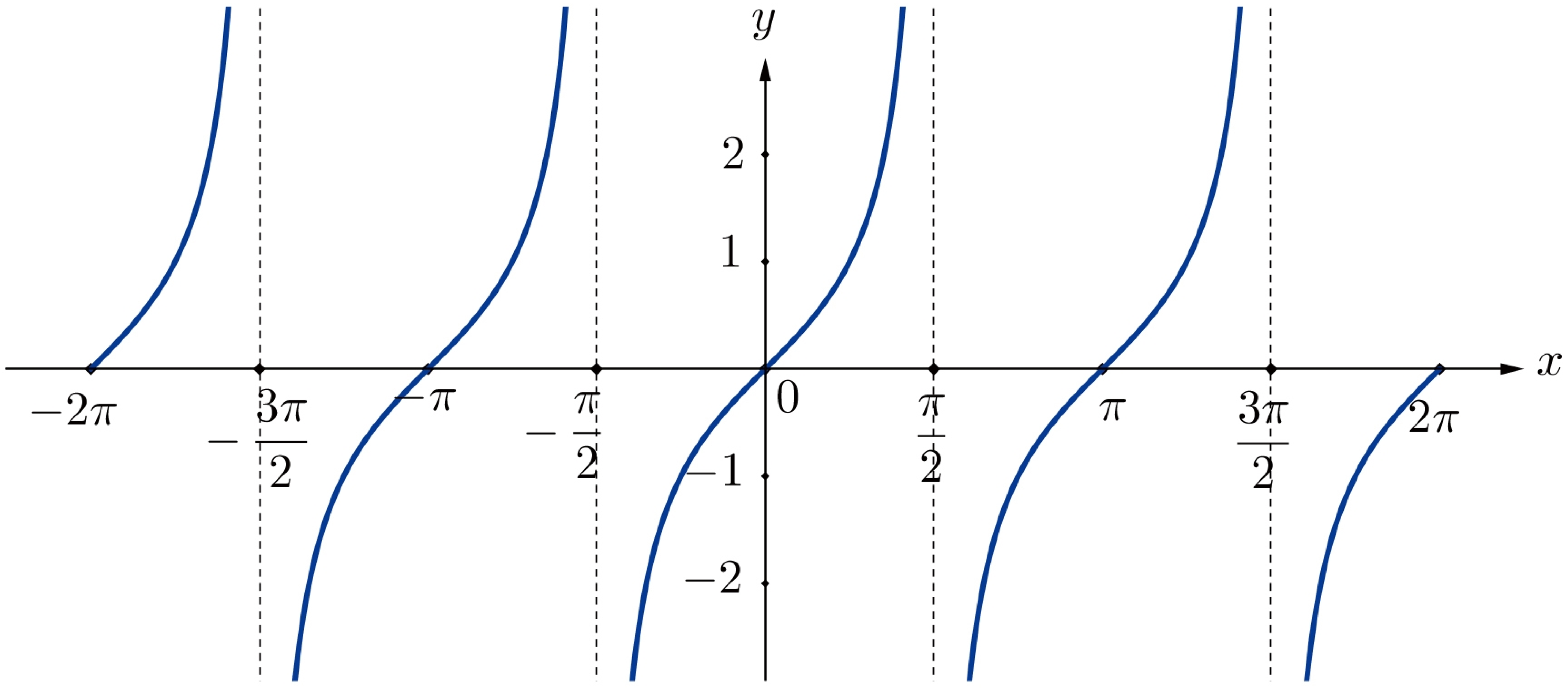
② $y=f(ax)$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形上每一點的 x 坐標乘以 $\frac{1}{a}$ 倍而得

1-4.3 正切函數 $y=\tan x$

〈一〉 $y=\tan x$ 圖形

對於任意實數 x， $\tan(x+\pi)=\tan x$ ，且 $y=\tan x$ 在 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 與 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 時沒有定義。因此，我們先找出介於 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 範圍内，某些特殊的 x 值所對應的值列表，再將對應的點以平滑曲線連接，並將 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 之圖形，依次向右向左移 π 單位，即得出 $y=\tan x$ 的圖形，如圖 19。

x	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$



〈圖 19〉正切函數 $y=\tan x$ 圖形

〈二〉週期： π ；因為 $\tan(x+\pi)=\tan x$

〈三〉 x 的範圍： $\left\{x \middle| x\neq\dfrac{\pi}{2}+n\pi, n\text{為整數}\right\}$

y 的範圍： y 為實數

〈四〉增減性：由 $y=\tan x$ 的圖形可以看出

當 x 從 0 增加到 $\dfrac{\pi}{2}$ 時， $y=\tan x$ 函數值由 0 逐漸增加到 ∞

當 x 從 $\dfrac{\pi}{2}$ 增加到 π 時， $y=\tan x$ 函數值由 $-\infty$ 逐漸增加到 0

我們由圖形可以看出， $y=\tan x$ 在每一象限均為遞增函數

〈五〉對稱性：$y=\tan x$ 為奇函數，圖形對稱於原點

對稱中心：若 n 為整數，則型如 $(n\pi\pm\frac{\pi}{2},0)$，$(n\pi,0)$ 的點均是對稱中心

〈六〉漸近線：$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$（n 為整數）

由商數關係 $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ 以及 $y=\tan x$ 的圖形可知，當 x 從 0 逐漸增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，$y=\tan x$ 函數值由 0 逐漸增加到 ∞，圖形會非常接近 $x=\frac{\pi}{2}$ 的直線。而當 x 從 0 遞減到 $-\frac{\pi}{2}$ 時，$y=\tan x$ 函數值由 0 逐漸減少到 $-\infty$，圖形會非常接近 $x=-\frac{\pi}{2}$ 的直線。我們稱 $x=\frac{\pi}{2}$ 與 $x=-\frac{\pi}{2}$ 為 $y=\tan x$ 的二漸近線。我們將 $y=\tan x$ 的漸近線以 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$（n 為整數）之型式來表示。

〈七〉奇偶性：$y=f(x)=\tan x$ 為奇函數

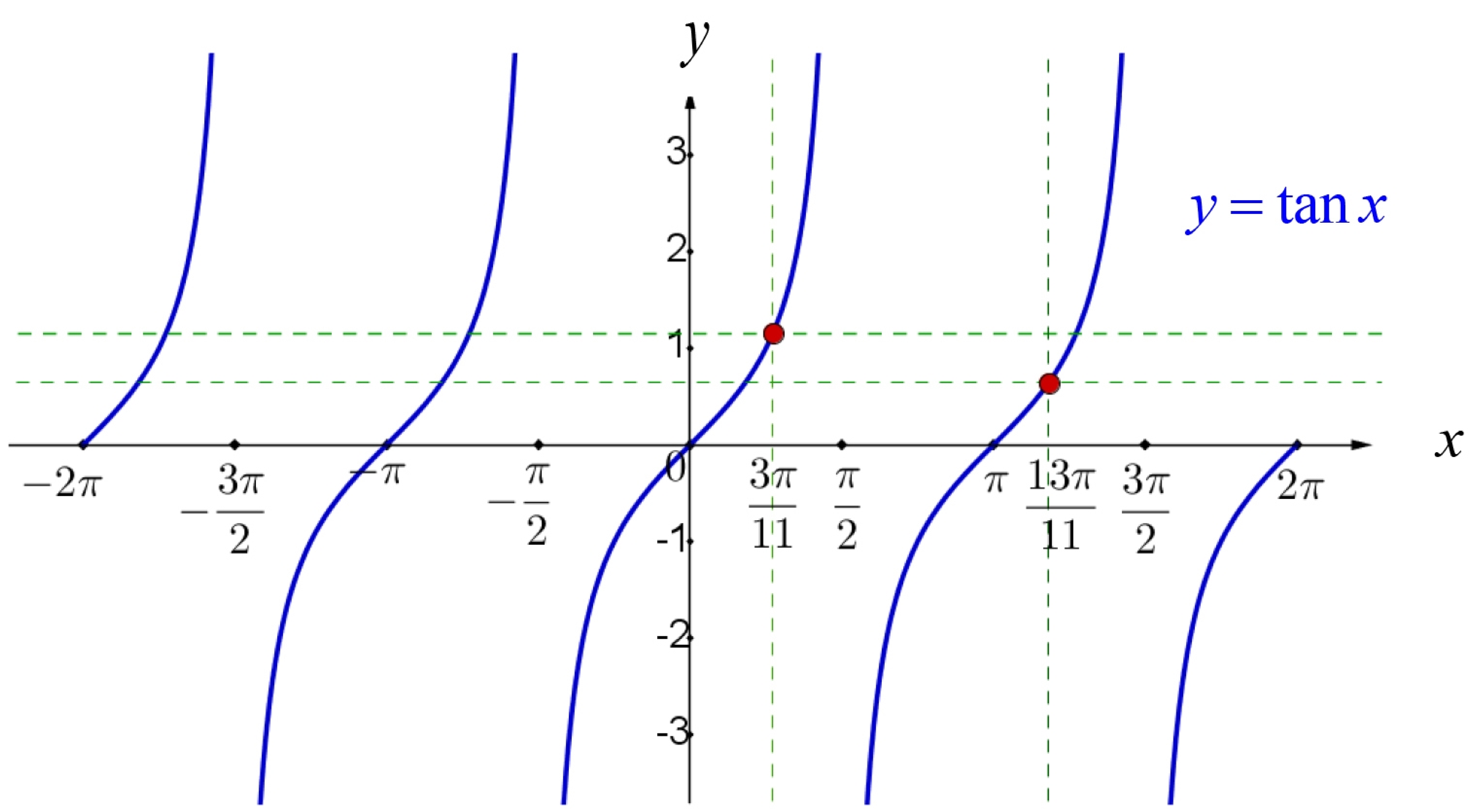
因為對於任意實數 x，$f(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-f(x)$ 所以 $f(x)=\tan x$ 為奇函數。

例題 9

試利用 $y=\tan x$ 之圖形，比較 $\tan\frac{3\pi}{11}$，$\tan\frac{13\pi}{11}$ 函數值之大小。

解：

參照下圖，因為 $\tan\frac{13\pi}{11}=\tan(\pi+\frac{2\pi}{11})=\tan\frac{2\pi}{11}$，由圖形可得 $\tan\frac{3\pi}{11}>\tan\frac{13\pi}{11}$。



隨堂練習 9

試利用 $y=\tan x$ 之圖形，比較 $\tan(\frac{\pi}{6})$ ， $\tan 1$ ， $\tan 2$ 之大小。

答： $\tan 1 > \tan(\frac{\pi}{6}) > \tan 2$

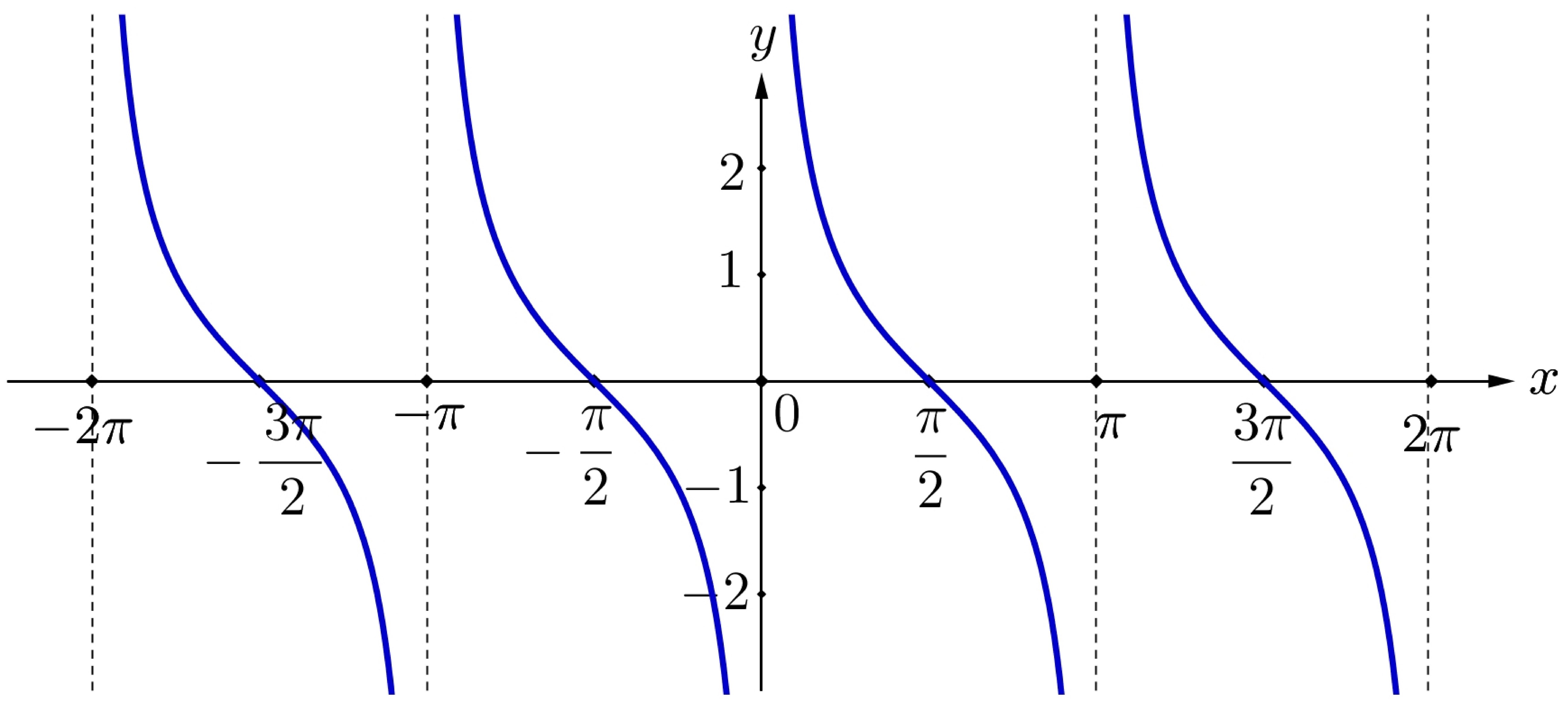
1-4.4 餘切函數 $y=\cot x$

〈一〉 $y=\cot x$ 圖形

我們可以取某些特別角，再利用 $y=\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$ ($\tan x\neq 0$) 的關係，求出 $y=\cot x$ 函數值列表如下

$y=\tan x$	$(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\pi}{4},1)$	$(\frac{\pi}{3},\sqrt{3})$	$(\frac{2\pi}{3},-\sqrt{3})$	$(\frac{3\pi}{4},-1)$
$y=\cot x$	$(\frac{\pi}{6},\sqrt{3})$	$(\frac{\pi}{4},1)$	$(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{2\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{3\pi}{4},-1)$

將上表在坐標平面上描繪出來，並以平滑曲線連接，即可得到 $y=\cot x$ ， $0<x<\pi$ 之圖形。又對於任意實數 x，恆有 $\cot(\pi+x)=\cot x$ 。因此，我們只要將 $0<x<\pi$ 上的圖形向右平移 π 單位，就可以得到 $\pi<x<2\pi$ 上的圖形。再逐次將 $0<x<\pi$ 上的圖形向右或向左平移 π 單位，就可以得到 $y=\cot x$ 全部的圖形，如圖 20 為 $y=\cot x$ 的圖形。



〈圖 20〉餘切函數 $y=\cot x$ 圖形

〈二〉週期：π；因為 $\cot(x+\pi)=\cot x$

〈三〉x 的範圍：$\{x \mid x\neq n\pi, n\text{為整數}\}$
y 的範圍：y 為實數

〈四〉增減性：由 $y=\cot x$ 的圖形可以看出
當 x 從 0 增加到 $\dfrac{\pi}{2}$ 時，$y=\cot x$ 函數值由 ∞ 逐漸遞減到 0
當 x 從 $\dfrac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，$y=\cot x$ 函數值由 0 逐漸遞減到 $-\infty$
我們由圖形可以看出，$y=\cot x$ 在每一象限均為遞減函數

〈五〉對稱性：$f(x)=\cot x$ 為奇函數，圖形對稱於原點
對稱中心：若 n 為整數，則型如 $(n\pi\pm\dfrac{\pi}{2},0)$，$(n\pi,0)$ 的點均是對稱中心

〈六〉漸近線：$x=n\pi$ 直線 (n 為整數)，為 $y=\cot x$ 的漸近線。

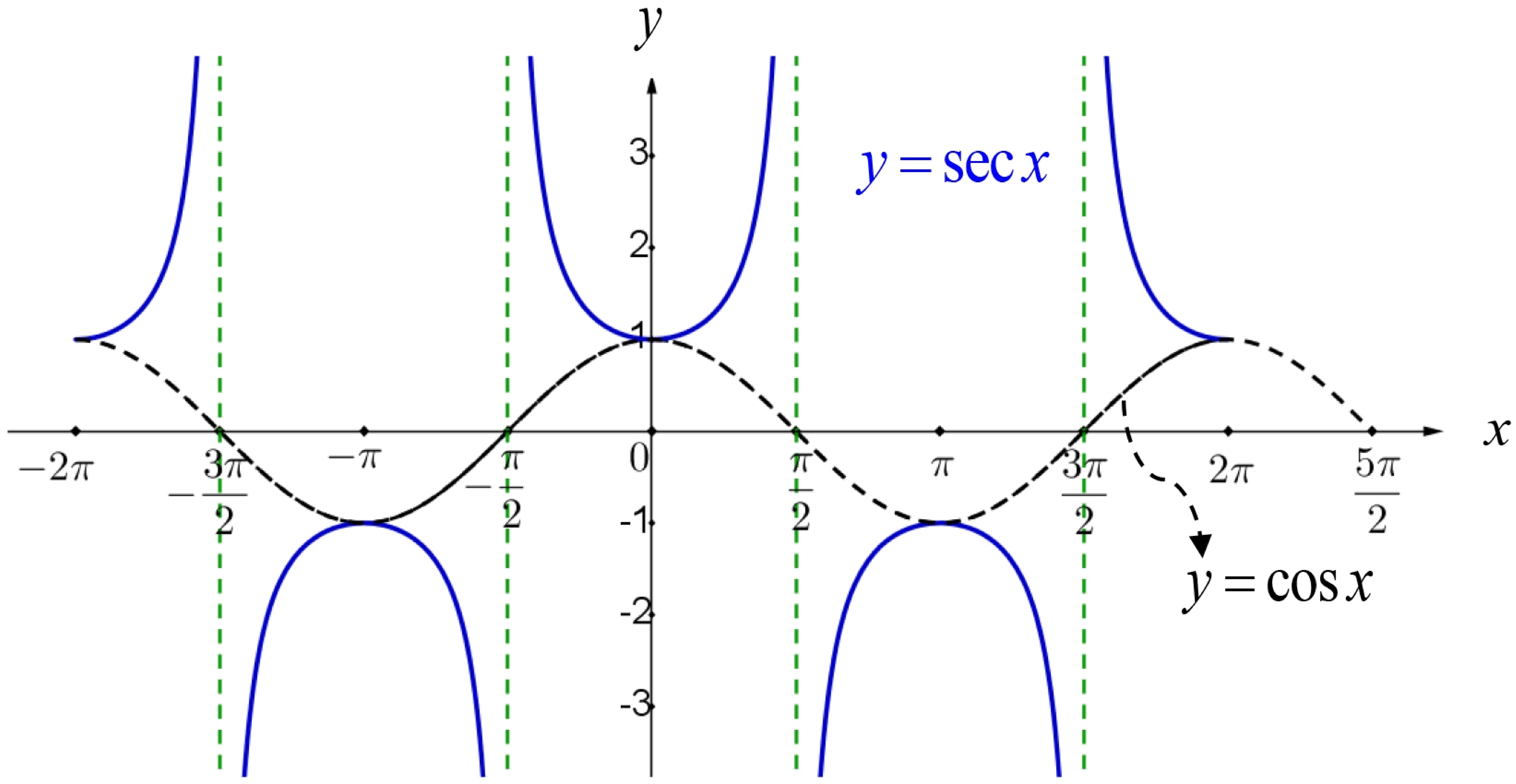
因為由商數關係 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 以及 $f(x)=\cot x$ 的圖形可知，當 x 從 0 逐漸增加到 π 時，$y=\cot x$ 函數值由 ∞ 逐漸遞減到 $-\infty$，圖形會非常接近 $x=\pi$ 的直線。我們稱 $x=\pi$ 為 $y=\cot x$ 的漸近線，並將所有的漸近線以 $x=n\pi$ 直線 (n 為整數) 之型式表示。

〈七〉奇偶性：$y=f(x)=\cot x$ 為奇函數
因為對於任意實數 x，$f(-x)=\cot(-x)=-\cot x=-f(x)$ 所以 $f(x)=\cot x$ 為奇函數。

1-4.5 正割函數 $y=\sec x$

〈一〉 $y=\sec x$ 圖形

我們可以利用 $y=\cos x$ 的圖形，再根據 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ ($\cos x\neq 0$) 的倒數關係，推導出 $y=\sec x$ 的圖形，如圖 21。



〈圖 21〉正割函數 $y=\sec x$ 圖形

〈二〉週期：2π

〈三〉x 的範圍：$\left\{x \middle| x\neq\dfrac{\pi}{2}+n\pi, n\text{為整數}\right\}$

y 的範圍：$\{y|y\geq 1, y\leq -1\}$

〈四〉增減性：由 $y=\sec x$ 的圖形可以看出

當 x 從 0 增加到 $\dfrac{\pi}{2}$ 時， $y=\sec x$ 函數值由 1 逐漸增加到 ∞

當 x 從 $\dfrac{\pi}{2}$ 增加到 π 時， $y=\sec x$ 函數值由 $-\infty$ 逐漸增加到 -1

當 x 從 π 增加到 $\dfrac{3\pi}{2}$ 時， $y=\sec x$ 函數值由 -1 逐漸減少到 $-\infty$

當 x 從 $\dfrac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時， $y=\sec x$ 函數值由 ∞ 逐漸減少到 1

因此，我們可以知道， $y=\sec x$ 在第一象限、第二象限為遞增函數，而 $y=\sec x$ 在第三象限、第四象限為遞減函數。

〈五〉對稱性：由圖形可以知道， $y=\sec x$ 和 $y=\cos x$ 的對稱點、對稱線均相同

① 線對稱：對稱軸為通過 $x=n\pi$ (n 為整數) 鉛直線 (例如 $x=0, x=2\pi$)

② 點對稱：對稱中心為點 $(\dfrac{\pi}{2}+n\pi, 0)$ ，n 為整數

〈六〉漸近線：直線 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$（n 為整數）為 $y=\sec x$ 的漸近線

由倒數關係 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 以及 $y=\sec x$ 的圖形可知，當 x 從 $-\dfrac{\pi}{2}$ 增加到 0 時，$y=\sec x$ 函數值由∞逐漸減少到 1，當 x 越接近 $-\dfrac{\pi}{2}$ 圖形會非常接近直線 $x=-\dfrac{\pi}{2}$。當 x 從 0 逐漸增加到 $\dfrac{\pi}{2}$ 時，$y=\sec x$ 函數值由 1 逐漸增加到∞，圖形會非常接近直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$。我們稱 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 與 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 為 $y=\sec x$ 的二漸近線。我們將 $y=\sec x$ 的漸近線以 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$（n 為整數）之型式來表示。

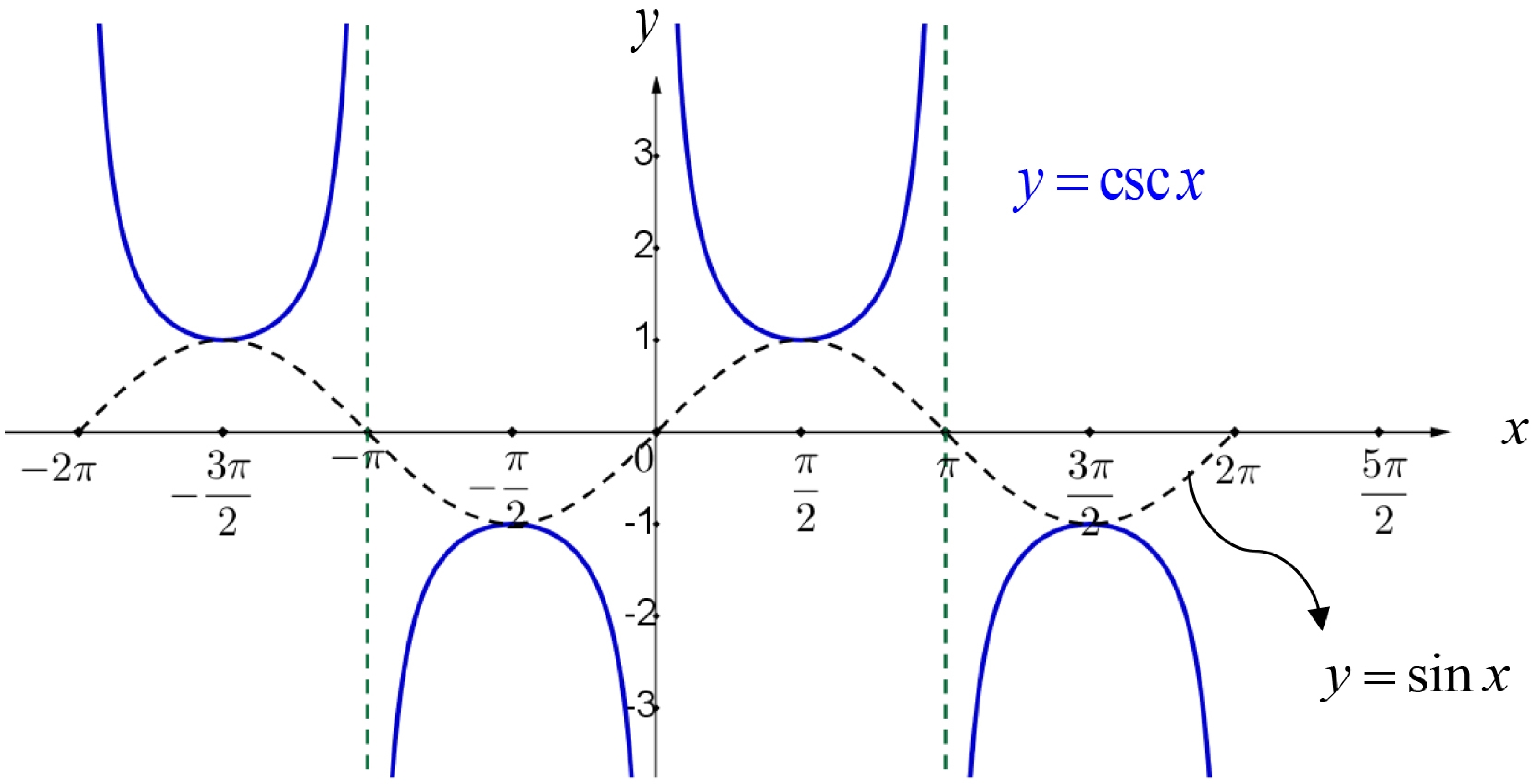
〈七〉奇偶性：$y=f(x)=\sec x$ 為偶函數

因為對於任意實數，$f(-x)=\sec(-x)=\sec x=f(x)$ 所以 $f(x)=\sec x$ 為偶函數。

1-4.6 餘割函數 $y=\csc x$

〈一〉$y=\csc x$ 圖形

我們可以利用 $y=\sin x$ 的圖形，再根據 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$（$\sin x\neq 0$）的倒數關係，推導出的圖形 $y=\csc x$，如圖 22。



〈圖 22〉餘割函數 $y=\csc x$ 圖形

〈二〉週期：2π

〈三〉x 的範圍：$\{x|x\neq n\pi, n\text{為整數}\}$

y 的範圍：$\{y|y\geq 1, y\leq -1\}$

〈四〉增減性：由 $y=\csc x$ 的圖形可以看出

當 x 從 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，$y=\csc x$ 函數值由 ∞ 逐漸減少到 1

當 x 從 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，$y=\csc x$ 函數值由 1 逐漸增加到 ∞

當 x 從 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，$y=\csc x$ 函數值由 $-\infty$ 逐漸增加到 -1

當 x 從 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時，$y=\csc x$ 函數值由 -1 逐漸減少到 $-\infty$

因此，我們可以知道，$y=\csc x$ 在第一象限、第四象限為遞減函數，而 $y=\csc x$ 在第二象限、第三象限為遞增函數。

〈五〉對稱性：

① 線對稱：對稱軸為通過 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 為整數) 的鉛直線 (例如 $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{5\pi}{2}$)

② 點對稱：對稱中心為點 $(n\pi, 0)$，n 為整數

〈六〉漸近線：直線 $x=n\pi$ (n 為整數) 為 $y=\csc x$ 的漸近線

由倒數關係 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$ 以及 $y=\csc x$ 的圖形可知，當 x 從 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 0 時，$y=\csc x$ 函數值由 -1 逐漸減少到 $-\infty$，圖形會非常接近直線 $x=0$ (y 軸)。當 x 從 $\frac{\pi}{2}$ 逐漸增加到 π 時，$y=\csc x$ 函數值由 1 逐漸增加到 ∞，圖形會非常接近直線 $x=\pi$。我們稱 $x=0$ 與 $x=\pi$ 為 $y=\csc x$ 的二漸近線。我們將 $y=\csc x$ 的漸近線以 $x=n\pi$ (n 為整數) 之型式來表示。

〈七〉奇偶性：$f(x)=\csc x$ 為奇函數

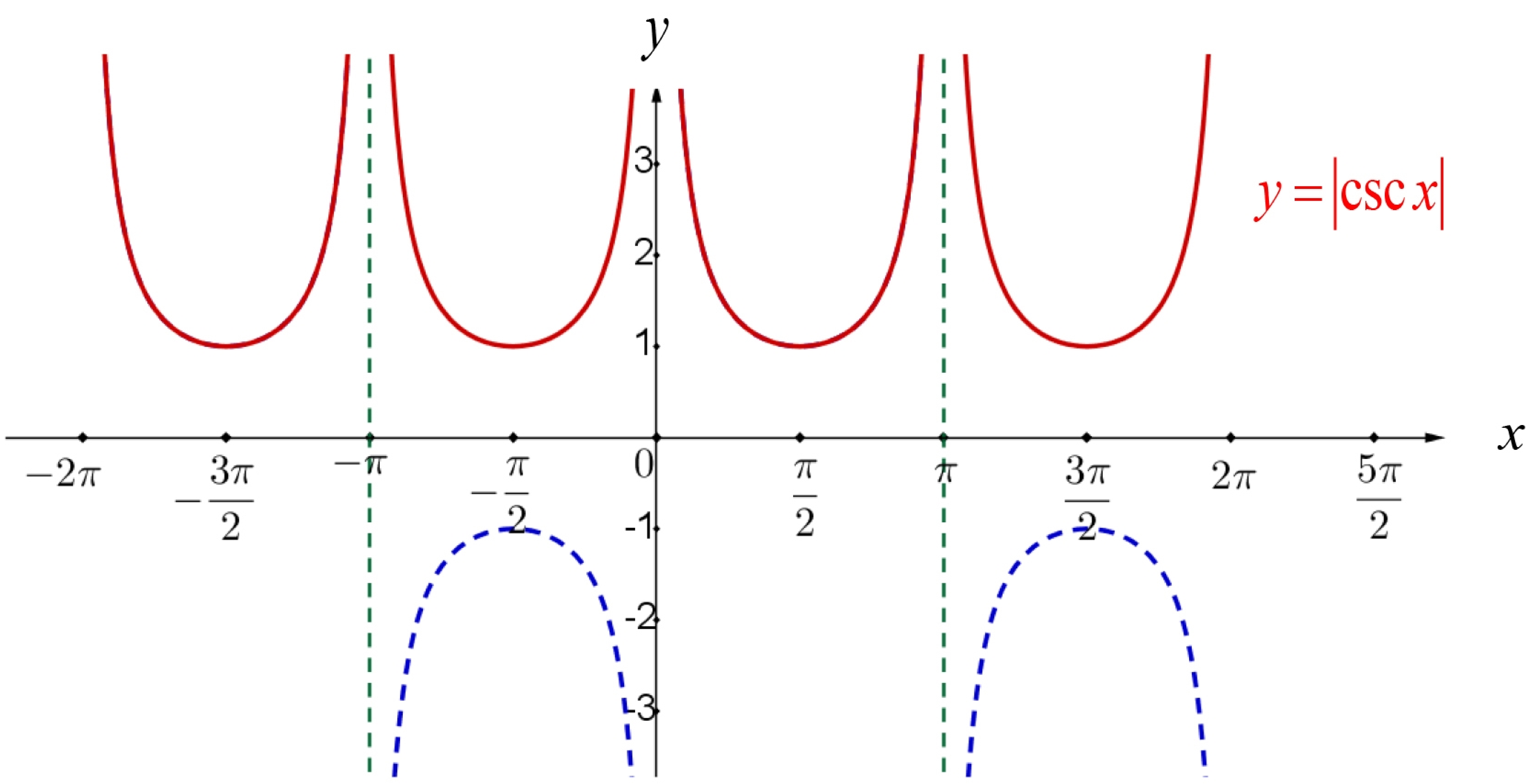
因為對於任意實數，$f(-x)=\csc(-x)=-\csc x=-f(x)$ 所以 $f(x)=\csc x$ 為奇函數。

例題 10

試作函數 $y=|\csc x|$ 的圖形。

解：

若 $\csc x \geq 0$ 則 $y=|\csc x|=\csc x$；若 $\csc x<0$ 則 $y=|\csc x|=-\csc x$ 。亦即，當 $y=\csc x$ 的圖形在 x 軸上方時圖形不變，當 $y=\csc x$ 的圖形在 x 軸下方時，其值加負號，所以只要將位於 x 軸下方之 $y=\csc x$ 圖形，往上翻即可得 $y=|\csc x|$ 的圖形。



隨堂練習 10

試作函數 $y=-\csc x+1$ 的圖形。

答：略

1-4 三角函數的圖形習題

1. 試作下列圖形並求其週期、最大值、最小值：

① $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$　② $y=\cos\frac{x}{2}$　③ $y=2\sin(x+\frac{\pi}{2})+1$

2. 已知 $-\pi\le x\le 3\pi$ 則 $\tan x=-2$ 有多少個實根？

3. 若 $3\cos^2 x+11\cos x-4=0$，試求 $\cos x$ 之值。

4. 已知 $0\le x<2\pi$ ，試求 $y=\cos^2 x-2\sin x+1$ 的最大值與最小值。

5. 試比較 $a=\cos 25°$ ， $b=\sin 25°$ ， $c=\tan(-335°)$ 之大小。

6. 已知 Γ ： $y=\sin x$ ，若將 Γ 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ ，再向上平移 1 單位，可得 $y=\sin(x+a)+b$ 。試求 (a,b) 之值。

簡答

1. ① 週期 2π ，最大值 3，最小值 -1

② 週期 4π ，最大值 1，最小值 -1

③ 週期 2π ，最大值 3，最小值 -1

2.4 個

3. $\frac{1}{3}$

4. 最大值 3，最小值 -1

5. $a>c>b$

6. $(\frac{-\pi}{3},1)$

第二章　等比級數與無窮等比級數

生活上我們常聽到某公司因為新產品的推出或新市場的加入，年營收維持等比級數成長；知識經濟時代，資訊科技的發展使許多知識快速累積、傳播、成長，科技以等比級數速度發展…。由此可知，等比級數已不再是數學上的專有名詞，「等比級數」一辭被廣泛地應用著。

數量問題是數學研究的一個重要主題，本章要帶各位同學認識等比數列與級數，並研究其相關知識。第一節我們討論有限項的等比數列與等比級數，第二節我們討論無窮多項的無窮等比級數。

2–1 等比數列與等比級數

古印度國王與棋士的故事

有一位古印度的棋士，西洋棋下得很好。有一天跟國王下棋，贏了，國王問他要什麼獎賞。他說，國王呀，我不貪心，你只要把這個西洋棋棋盤的第一格放一粒麥子，第二格放兩粒，第三格放四粒，以後依次 2 倍，一直到放滿這個棋盤，我就只要這點麥子就可以了。國王滿口就答應了。這點麥子，哪有什麼問題！

結果呢？這個麥子的數量有多少呢？西洋棋棋盤有 64 格，國王總共要給棋士 $2^{64}-1$ 粒麥子！有人算過，這些麥子重量是 7300 億噸！相當於印度 5000 年的糧食總產量！做一個高 4 米，寬 5 米的倉庫，要裝滿這麼多麥子，這個倉庫的長度足夠繞地球赤道 1000 次！當然，這麼多的麥子，國王肯定是不給也無力給的。

我們在這一節就是要討論，如故事中的麥子數量成倍數成長而形成的數列與級數。

2–1.1 數列與級數的意義

在討論等比數列與級數之前，我們複習一下數列與級數的意義。

第一次期中考班上同學座號 1 號、2 號、3 號同學的數學成績依序為 64、78、90、…。像這樣按某種順序依次排列的一群數字，就是數列。數列中每一個數稱為數列中的一項，第一個數稱為首項，第 n 個數稱為第 n 項，也稱為數列的通項或一般項。當項數有限時稱為有限數列，項數無限時稱為無窮數列；有限數列的最後一項稱為末項。而習慣上，我們以 a_n 來表示數列的第 n 項，而以 $\langle a_n\rangle$ 或 $\{a_n\}$ 來表示項數有 n 項的數列。將數列中各項按照順序以「＋」號連結起來所形成的式子

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

稱為級數。當項數有限時稱為有限級數，項數無限時稱為無窮級數。將數列 $\langle a_n\rangle$ 的各項相

加：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，這個有限級數可以寫為$\sum_{k=1}^{n}a_k$，即

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

其中符號$\sum$為希臘字母，讀作*sigma*，相當於英文字母*S*，表示和(*sum*)的意思。換句話說，$\sum_{k=1}^{n}a_k$就是 $k=1$，2，3，…，n 所對應的各項a_1、a_2、a_3、…、a_n依序相加的意思。例如：

$$\sum_{k=1}^{3}a_k=a_1+a_2+a_3 \ (k \text{ 由 } 1 \text{ 到 } 3 \text{ 之各項相加})$$

$$\sum_{k=3}^{6}b_k=b_3+b_4+b_5+b_6 \ (k \text{ 由 } 3 \text{ 到 } 6 \text{ 之各項相加})$$

例題 1

數列$\left\langle \dfrac{2^n-1}{n} \right\rangle$的前五項為何？

解：

因為$a_n=\dfrac{2^n-1}{n}$，所以分別代入$n=1$、2、3、4、5 得到

$$a_1=\frac{2^1-1}{1}=1，a_2=\frac{2^2-1}{2}=\frac{3}{2}，a_3=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}，a_4=\frac{2^4-1}{4}=\frac{15}{4}，a_5=\frac{2^5-1}{5}=\frac{31}{5}$$

故數列前五項為$1,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{3},\ \dfrac{15}{4},\ \dfrac{31}{5}$。

隨堂練習 1

設數列$\langle a_n\rangle$之一般項為$a_n=3n+2$，試求出前五項。

答：5，8，11，14，17

例題 2

試展開下列級數：① $\sum_{k=1}^{4}(3k+4)$　② $\sum_{k=1}^{8}k^2$

解：

① $\sum_{k=1}^{4}(3k+4)=(3\times1+4)+(3\times2+4)+(3\times3+4)+(3\times4+4)$

② $\sum_{k=1}^{8}k^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2$

隨堂練習 2

試展開級數 $\sum_{k=1}^{5}\frac{k}{k+1}$。

答：$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

2–1.2 有限項的等比數列與等比級數

在第一冊 3-5 節指數與對數的應用，我們學過等比數列及等比級數。當數列

$$\langle a_n\rangle : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$$

中任一後項與前項的比值都等於同一個常數時，如下

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=r \text{（常數 } r\neq 0\text{）}$$

稱此數列為等比數列，其中常數 r 稱為公比 (*ratio*)。首項為 a，公比為 r（$r\neq 0$）的等比數列可以寫成

$$a, ar, ar^2, \cdots ar^{n-1}\text{，其中第 } n \text{ 項 } a_n=a\cdot r^{n-1}\text{。}$$

把等比數列各項依序加起來就是等比級數

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}$$

我們也可以用 $\sum_{k=1}^{n} a\cdot r^{k-1}$ 來表示上述級數。即

$$S=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}$$

例題 3

已知 $\langle a_n\rangle$ 是一個首項 5，公比 2 的等比數列，試求第 5 項。

解：

$a_1=5$ ， $r=2$

則 $a_5=a_1\times r^{5-1}=5\times 2^4=5\times 16=80$

隨堂練習 3

已知 $\langle a_n\rangle$ 是一個首項 256，公比 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，試求第 6 項。

答：8

例題 4

在 256 與 $\frac{1}{16}$ 之間插入五個數，使成等比數列，試求插入的第二個數。

解：

由題意可知，256 與 $\frac{1}{16}$ 及插入的五個數所形成的等比數列

首項 $a_1 = 256$，第七項 $a_7 = \frac{1}{16}$，代入 $a_7 = a_1 \cdot r^6$，

得 $\frac{1}{16} = 256 \cdot r^6 \Rightarrow r^6 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^6 \quad \Rightarrow r = \pm\frac{1}{4}$

而插入的第二個數為第 3 項，即 $a_3 = a_1 \cdot r^2 = 256 \cdot \frac{1}{16} = 16$，所以插入的第三個數為 16。

隨堂練習 4

在 2 與 -486 之間插入四個數，使成等比數列，試求插入的第三個數。

答：-54

例題 5

設 $a < b < c < d$ 四數皆為正數且成等比數列，若 $a - d = -21$，$b - c = -6$，試求公比。

解：

設等比數列的公比為 r，則 b, c, d 可表示成 $b = ar, c = ar^2, d = ar^3$

由題意可得 $\begin{cases} a - ar^3 = -21 \cdots\cdots ① \\ ar - ar^2 = -6 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由 $\frac{①}{②}$ 得 $\frac{a - ar^3}{ar - ar^2} = \frac{a\left(1 - r^3\right)}{ar\left(1 - r\right)} = \frac{\left(1 - r\right)\left(1 + r + r^2\right)}{r\left(1 - r\right)} = \frac{1 + r + r^2}{r} = \frac{-21}{-6}$，得

$$\frac{1 + r + r^2}{r} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2 + 2r + 2r^2 = 7r \quad \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

可分解得 $(r - 2)(2r - 1) = 0 \quad \Rightarrow r = 2$ 或 $r = \frac{1}{2}$。但是 $a < b < c < d$，且四數皆為正數，所以公比 $r = \frac{b}{a} > 1$，故公比 $r = 2$。

隨堂練習 5

設四正數 a,b,c,d 成等比數列，且 $a>b>c>d$，若 $a+b=36$，$c+d=4$，試求公比。

答：$\frac{1}{3}$

等比中項

當 a,b,c 三數成等比數列時，我們稱 b 是 a、c 的等比中項。而因為三數成等比，公比 $r=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$，即 $b^2=ac$，可得 $b=\pm\sqrt{ac}$。

【整理】等比中項公式

a、c 的等比中項為 $\pm\sqrt{ac}$。

a、c 的等比中項為 $\pm\sqrt{ac}$，$\sqrt{ac}$ 也稱為 a、c 兩數的幾何平均數，而 $\frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac}$ $(a,c>0)$ 即為應用極為廣泛的算幾不等式。

例題 6

試求 8 與 4 的等比中項。

解：

8 與 4 的等比中項 $=\pm\sqrt{8\times4}=\pm\sqrt{32}=\pm4\sqrt{2}$。

隨堂練習 6

試求 4 與 9 的等比中項。

答：±6

2-1.3 等比級數和公式

若等比數列的首項為 a，公比為 r，符號 S_n 表前 n 項的和，則 S_n 可寫成

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ (1)

將這個式子兩邊同乘以 r，得

$rS_n = ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$ (2)

$(1)-(2)$ 兩式相減，得

$$\begin{array}{rl} & S_n = a + \cancel{a}r + \cancel{a}r^2 + \cdots + \cancel{a}r^{n-1} \\ -) & rS_n = \cancel{a}r + \cancel{a}r^2 + \cdots + \cancel{a}r^{n-1} + ar^n \\ \hline & S_n - rS_n = a - ar^n = a(1-r^n) \end{array}$$

因此，當 $r \neq 1$ 時，由 $(1-r)S_n = a(1-r^n)$ ，可得 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。
另外，當 $r = 1$ 時， $S_n = a + a + \ldots + a = na$ 。

【整理】等比級數和公式

若等比數列的首項為 a，公比為 r，符號 S_n 表前 n 項的和，則

① 當 $r \neq 1$ 時， $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

② 當 $r = 1$ 時， $S_n = na$

例題 7

試求等比級數 $2 + 6 + \cdots + 486$ 的和。

解：

設此等比級數共有 n 項，而公比 $r = 3$ ，首項 $a = 2$ ，可知第 n 項

$a_n = a \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} = 486$

$\Rightarrow 3^{n-1} = 243 = 3^5$ 得 $n = 6$

故和為 $S_6 = \dfrac{2(1-3^6)}{1-3} = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$ 。

隨堂練習 7

已知 $\langle a_n \rangle$ 是一個首項 15，公比 $\dfrac{1}{2}$ 的等比數列，求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_5$ 的值。

答： $\dfrac{465}{16}$

複利利息公式

我們將錢存在銀行，銀行會依約定的利率付給存款人利息。而複利是與單利相對應的經濟概念。單利的計算不用把利息計入本金；而複利恰恰相反，它的利息要併入本金中重複計息。例如：某銀行公告定存利率是 2%，若我們於年初存入 1 萬元，則年底時，銀行會付給 $10000\times2\%=200$ 元的利息，而複利是將利息列入下一年的本金，繼續計息。因此，第一年年底本利和 10200 即為第二年年初的本金。第二年的利息是第一年本金 $10200\times2\%$，所以第二年的本利和為本金 10200 再加利息 $10200\times2\%$ 等於 $10200(1+2\%)$，依此方式每年計息。以一年為一期，不同期數的本利和列表如下：

本利和	以複利計算
1 年後	$10000(1+2\%)=10200$
2 年後	$[10000(1+2\%)](1+2\%)=10000(1+2\%)^2=10404$
3 年後	$[10000(1+2\%)^2](1+2\%)=10000(1+2\%)^3=10612.08$
⋮	⋮
n 年後	$10000(1+2\%)^n$

依上表，我們可以看出複利本利和的計算公式如下。

【整理】複利的本利和

設本金為 P 元，每期的利率為 $r\%$，則 n 年後的本利和為 $P(1+r\%)^n$

例題 8

照麗參加銀行儲蓄存款，年利率為 2%，每年複利一次，試求：

① 第 1 年年初存入 20000 元，則第 2 年年底可得本利和多少元？

② 若每年年初均存入 20000 元，則第 5 年的年底結算共可得本利和多少元？

（計算至元為止，元以下四捨五入；取 $(1.02)^5=1.104$）

解：

① 第 2 年年底可得本利和 $=20000\times(1+2\%)^2=20000\times1.0404=20808$（元）。

② 第一年初存入的 20000 元，至第 5 年底存滿 5 年，結算時本利和為 $20000(1+2\%)^5$

第二年初存入的 20000 元，至第 5 年底存滿 4 年，結算時本利和為 $20000(1+2\%)^4$

第三年初存入的 20000 元，至第 5 年底存滿 3 年，結算時本利和為 $20000(1+2\%)^3$

第四年初存入的 20000 元，至第 5 年底存滿 2 年，結算時本利和為 $20000(1+2\%)^2$

第五年初存入的 20000 元，至第 5 年底存滿 1 年，結算時本利和為 $20000(1+2\%)^1$

所以全部本利和如下：

$$
\begin{aligned}
&20000(1+2\%)^5+20000(1+2\%)^4+20000(1+2\%)^3+20000(1+2\%)^2+20000(1+2\%)^1\\
&=20000(1.02+1.02^2+1.02^3+1.02^4+1.02^5)\\
&=20000\times\frac{1.02\times(1.02^5-1)}{1.02-1}\\
&=20000\times\frac{1.02\times(1.104-1)}{0.02}\\
&=20000\times\frac{1.02\times0.104}{0.02}\\
&=20000\times5.304\\
&=106080\ (\text{元})
\end{aligned}
$$

隨堂練習 8

某人參加銀行儲蓄存款，年利率 6%，複利計算，若某人每年年初存入銀行 10000 元，則第十年年底結算時，本利和為多少？（取 $(1.06)^{10}=1.7908$）

答：139,708 元

最後，回顧前面的國王與棋士的故事，麥粒的總數為

$$1+2+4+\cdots+2^{63}=1\cdot\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1$$

2–1 等比數列與等比級數習題

1. 一等比數列，第 2 項為 20，第 5 項為 160，則公比為 _____。
2. 試求等比數列 1，$\sqrt{2}$，2 …的第 8 項為 _____。
3. 五個實數 a，b，c，d，e 成等比數列，已知 $a+b=9$，$d+e=72$，則 $c=$_____。
4. 試求等比級數 $4+(-2)+1+(-\frac{1}{2})+\cdots$之前 8 項的和為 _____。
5. 一等比級數的首項為 6，末項為 768，和是 1530，則此等比級數有 _____ 項，公比為 _____。
6. 一等比級數的公比為 -2，前 6 項的和為 -21，試求此等比級數的第 11 項 = _____。
7. 盈盈每年年初在銀行存入 1000 元，年利率 5%，按複利計算，則 10 年期滿可領回本利和 _____ 元。（取$1.05^{10}=1.629$）

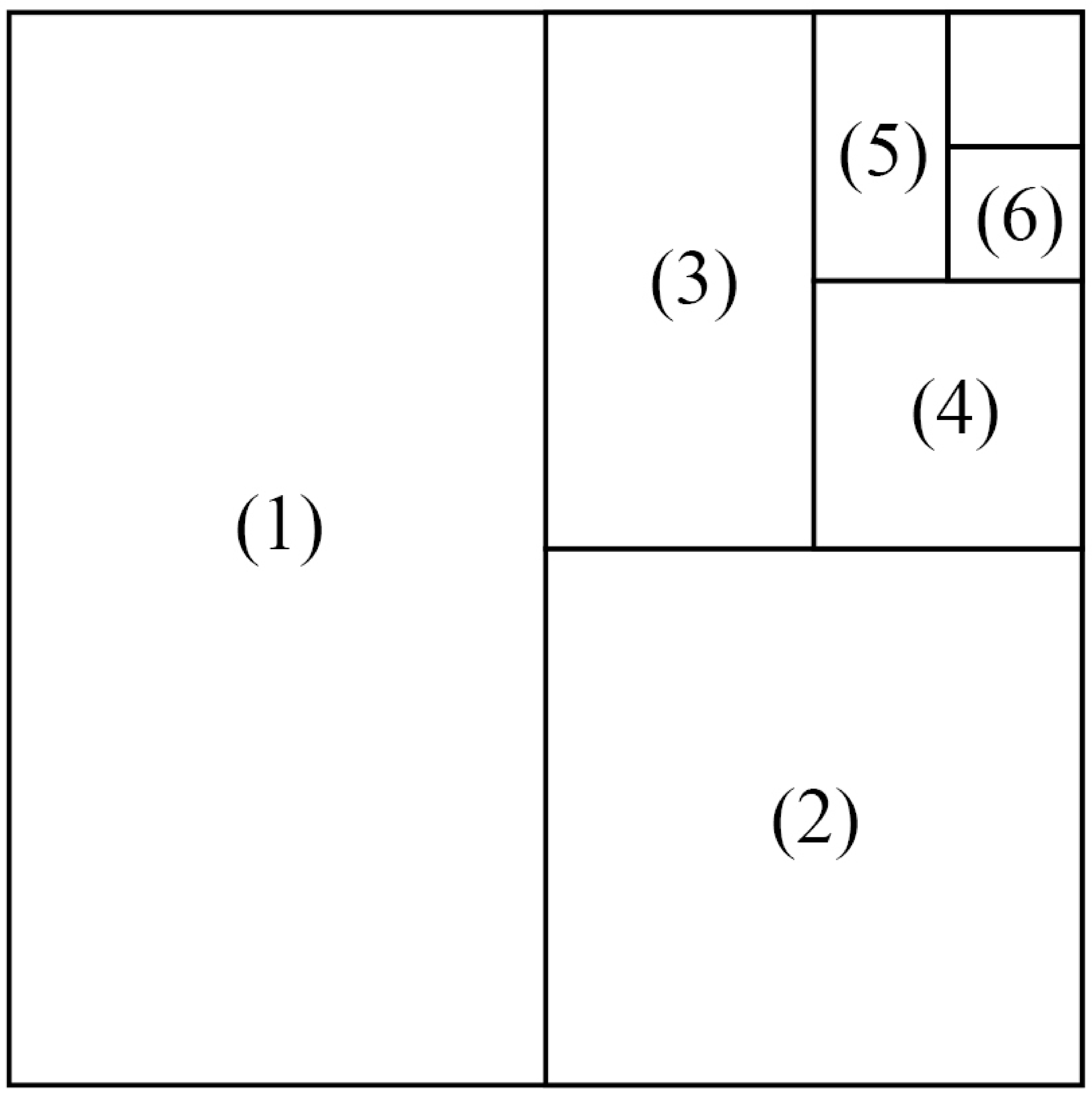
簡答

1. 2
2. $8\sqrt{2}$
3. 12
4. $\frac{85}{32}$
5. 8；2
6. 1024
7. 13209

2-2 無窮等比級數

在還沒有介紹無窮等比級數之前，我們先觀察一個例子 (當然，你能夠動手跟著做更好)。老師手上有一張邊長 10 公分的紙張，每次撕一半給你，留一半下來，再將留下來的撕一半給你，再留一半下來，一直重複著撕一半、留一半的動作，…。如此老師手上的紙愈來愈少，而你手上的紙會愈來愈多，經過長時間的處理後，老師手上幾乎是沒紙了，而一整張的紙撕成許許多多的小紙片都到了你手上。我們將焦點轉到你手上的紙片，第一張紙片是 $\frac{1}{2}$ 張，第二張紙片是 $\frac{1}{4}$ 張，第三張紙片是 $\frac{1}{8}$ 張，所有的紙片和是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 。

雖然你可能還不會算總和是多少，但是你可能隱約知道答案是原先老師手上的 1 張紙。這節就是要介紹這種項數無窮多項的等比級數。



2-2.1 無窮等比級數和

無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ ，一般也表成 $\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot r^{n-1}$ ，其中 ∞ 表示「無限大」，即 $\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot r^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ 。

無窮多項的等比級數如何求和呢？同學心裡一定會想，項數都沒完沒了，怎麼會有一個值會是這個級數的和呢？無窮等比級數求和的概念牽扯到極限、逼近等較複雜的數學概念，我們不打算由極限理論來說明，我們用計算器輔助求值的方法讓各位同學直觀地來了解。

例題 1

試說明無窮等比級數 $2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$ 的和會不會等於一個固定的數？

解：

我們用計算器來輔助求值：

n	1	2	3	$\cdots$	20	$\cdots$	30	$\cdots$
$2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$	2	6	14	$\cdots$	2097150	$\cdots$	1073741822	$\cdots$

由上表可看出，n 愈來愈大時，等比級數 $2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$ 的值也會愈來愈大，不會等於任何一個固定的數。

當無窮等比級數的和不可能等於任何一個固定的數，我們說它的和「不存在」。我們也說這樣的無窮等比級數為發散。

隨堂練習 1

試說明無窮等比級數 $-2+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^n+\cdots$ 發散。

答：略

例題 2

試求無窮等比級數 $-1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n+\cdots$ 和為何？

解：

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
$-1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n+\cdots$	-1	0	-1	0	-1	$\cdots$

由上表可看出，級數的和在 -1 與 0 之間跳躍，不會等於任何一值。因此，其和不存在！它也是一個發散的級數。

隨堂練習 2

試說明無窮等比級數 $2+2+2+\cdots+2+\cdots$ 和存不存在？是發散的級數嗎？

答：不存在；發散。

如果無窮等比級數的和有越來越靠近某個固定的數的趨勢，則稱那個固定的數為該無窮等比級數的「和」。有「和」的無窮等比級數，稱為收斂的級數。請看以下範例。

例題 3

試求無窮等比級數 $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$ 的和為何？

解：

n	1	2	3	$\cdots$	10	20	30	$\cdots$
$\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\cdots$	0.99023	0.99999905	0.999999999	$\cdots$

由上表我們可以觀察到，n 愈來愈大時，級數和會非常接近 1。所以我們說

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots=1$$

也就是說 $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$ 收斂，其和為 1。

隨堂練習 3

請模仿例題 3 作法，試求無窮等比級數 $\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\cdots$ 的和。

答：3

【定義】**無窮級數和的斂散性**

當一個無窮級數的和會非常非常靠近一個實數 L 時，我們就說這個無窮級數的和是存在的，而且 L 是這個無窮級數的和。此時，稱此無窮級數為收斂級數 (*convergent series*)，或說這個無窮級數是收斂的 (*convergent*)。反之，若無窮級數的和不會靠近任何一個實數時，我們就說這個無窮級數的和不存在，稱之為發散級數 (*divergent series*)，或說這個無窮級數是發散的 (*divergent*)。

由以上的定義可以知道，任何一個無窮級數（包含無窮等比級數）的和是不是存在，是看它會不會非常靠近一個值。因此，無窮級數是可以有和的，只要它滿足定義的要求。

2-2.2 由 r^n 變化情形探討無窮等比級數的和

同學在做完隨堂練習 3 後，應該會覺得還要藉助計算機才能求出答案，頗為不便！因此，此節我們要從 r^n 變化情形探討無窮等比級數和。

我們其實是可以由有限項的等比級數和公式 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $(r\neq 1)$ 做一點修正，就可以變成是無窮等比級數和公式。怎麼說呢？試想，上式中的 n 趨向於無窮大 (∞) 時，也就是說項數是無窮多項時，這不就是無窮等比級數嗎？

$$S_n=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}(1-r^n)$$

在上式中，當項數 n 由 1、2、3、…一直增加至無窮大時，$\dfrac{a}{1-r}$ 之值會保持為一個定值，其中 r^n 值的變化會決定級數和的值為何。而當 $|r|<1$，且 n 由 1、2、3、…一直增加至無窮大時，r^n 會非常靠近 0 ！

下面例子是以 $r=\dfrac{1}{2}$ 為例：

n	1	2	3	4	…	10	20	…	∞
$(\frac{1}{2})^n$	0.5	0.25	0.125	0.0625	…	0.00097656	0.0000009	…	0

因此，我們可以導出

$$S=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\approx\frac{a(1-0)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

（上式中的 n 趨向於 ∞，而且 $|r|<1$）

若 $|r|$ 不小於 1 呢？無窮等比級數和又會是什麼情形？我們討論如下：

① $|r|>1$時，r^n 會是一個無窮大或是負無窮大的數，和也因此是一個無窮大或是負無窮大的數，因此和不存在。例如例題 1、隨堂練習 1 就是這種 $|r|>1$ 的級數

$2+4+8+\ldots+2^n+\ldots$ 的和不存在，發散至無窮大

$-2+(-2)^2+(-2)^3+\ldots(-2)^n+\ldots$ 的和不存在。

② $r=1$時，例如：$1+1+\cdots+1+\cdots$的和不斷變大，和不存在，發散至無窮大

③ $r=-1$時，如例題 2 所示：$-1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots(-1)^n+\cdots$的和不存在

【整理】等比級數和公式

若無窮等比級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$ 的首項為 $a\left(a \neq 0\right)$，公比為 r，則

① 當 $|r|<1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$，為收斂級數。

② 當 $|r|\geq 1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$ 和不存在，為發散級數。

例題 4

試求無窮等比級數 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$ 的和。

解：

此級數首項 $a=1$，$r=-\dfrac{1}{2}$

因為 $\left|r\right|<1$，所以 $S=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

隨堂練習 4

試求無窮級數 $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{27}+\dfrac{16}{81}+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}+\cdots$ 的和。

答：2

例題 5

試求無窮等比級數 $1-2+4-8+16+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots$ 的和。

解：

此級數首項 $a=1$，$r=-2$

因為 $\left|r\right|>1$，所以此無窮等比級數是個發散級數，和不存在。

隨堂練習 5

試求無窮等比級數 $1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{4}-\dfrac{27}{8}+\dfrac{81}{16}-\cdots+\left(\dfrac{-3}{2}\right)^{n-1}+\cdots$ 的和。

答：和不存在

例題 6

設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 為一無窮數列，若 $a_n=\dfrac{2^n+(-1)^n}{5^n}$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 之值為何？

解：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$=\left(\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots\right)+\left(\frac{-1}{5}+\left(\frac{-1}{5}\right)^2+\left(\frac{-1}{5}\right)^3+\ldots\right)$$

（括弧內分別是首項 $\frac{2}{5}$ 及 $\frac{-1}{5}$，公比 $\frac{2}{5}$ 及 $\frac{-1}{5}$ 的無窮等比級數）

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{-1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}+\frac{\frac{-1}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}$$

隨堂練習 6

試求無窮級數 $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\cdots+\frac{2^n-1}{3^n}+\cdots$ 的和。

答：$\frac{3}{2}$

例題 7

試求無窮級數 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\cdots+(\frac{1}{2^{3n-3}}-\frac{1}{2^{3n-2}})+\cdots$ 的和。

解：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\cdots+(\frac{1}{2^{3n-3}}-\frac{1}{2^{3n-2}})+\cdots$$

$$=(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\cdots)-(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\cdots)$$

（括弧內分別是首項 1、$\frac{1}{2}$，而公比皆為 $\frac{1}{8}$ 的無窮等比級數）

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{8}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}-\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$$

隨堂練習 7

試求無窮級數 $\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{27}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$ 的和。

答：$\frac{3}{2}$

例題 8

設無窮等比級數 $1+(1-2x)+(1-2x)^2+\cdots$ 收斂

① 求 x 的範圍？ ② 若級數和為 $\frac{4-2x}{3}$，則 x 的值為何？

解：

① 此級數首項 $a=1$，$r=1-2x$。

因為無窮等比級數若收斂，其公比 $|r|<1$，即 $|1-2x|<1$

去絕對值得 $-1<1-2x<1 \Rightarrow -2<-2x<0$

同除以 (-2) 可得 $0<x<1$

② 其和為 $S=\frac{1}{1-(1-2x)}=\frac{4-2x}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2x}=\frac{4-2x}{3} \quad \Rightarrow 3=8x-4x^2$

$\Rightarrow 4x^2-8x+3=0$ 因式分解得 $(2x-1)(2x-3)=0$

可解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$，但是 x 的範圍為 $0<x<1$，因此 $x=\frac{3}{2}$ 不合！所以 $x=\frac{1}{2}$。

隨堂練習 8

設無窮等比級數 $1+(3+2x)+(3+2x)^2+\cdots$ 收斂

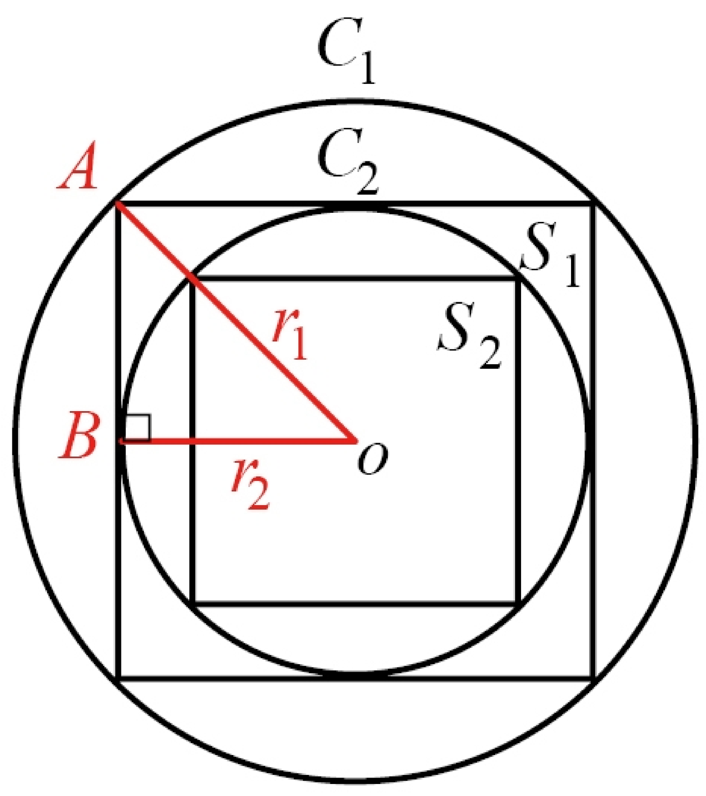
① 求 x 的範圍？ ② 若級數和為 3，則 x 的值為何？

答：① $-2<x<-1$；② $x=-\frac{7}{6}$

例題 9

已知一圓 C_1 的半徑為 6，作圓內接正方形 S_1，再作一圓 C_2 內切於此正方形，再作正方形 S_2 內接於圓 C_2，如此繼續下去作無限多次時，求圓 C_1，C_2，C_3 $\cdots$ 的面積總和為何？

解：



如右圖所示，可看出 ΔOAB 是一個等腰直角三角形，

因此，直角三角形股 r_2 與斜邊 r_1 的比值 $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

可得圓 C_1，C_2，面積比等於半徑平方比 $=\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

而圓 C_1 面積 $=\pi r_1^2=\pi\cdot 6^2=36\pi$

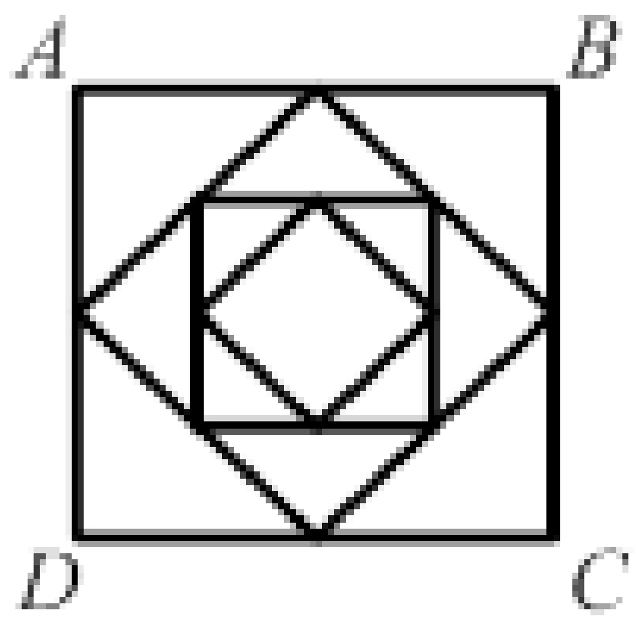
所以，圓 C_1，C_2，C_3 $\cdots$ 的面積和是一個首項 36π，公比為 $\dfrac{1}{2}$ 的無窮等比級數

於是，我們可得面積和 $C_1+C_2+C_3+\cdots=\dfrac{36\pi}{1-\dfrac{1}{2}}=72\pi$。

隨堂練習 9

如圖，一正方形 $ABCD$ 邊長為 4，將四邊中點相連，得第二個正方形，再將第二個正方形四邊中點相連，得第三個正方形。重複這些步驟，求所有正方形的面積和為何？

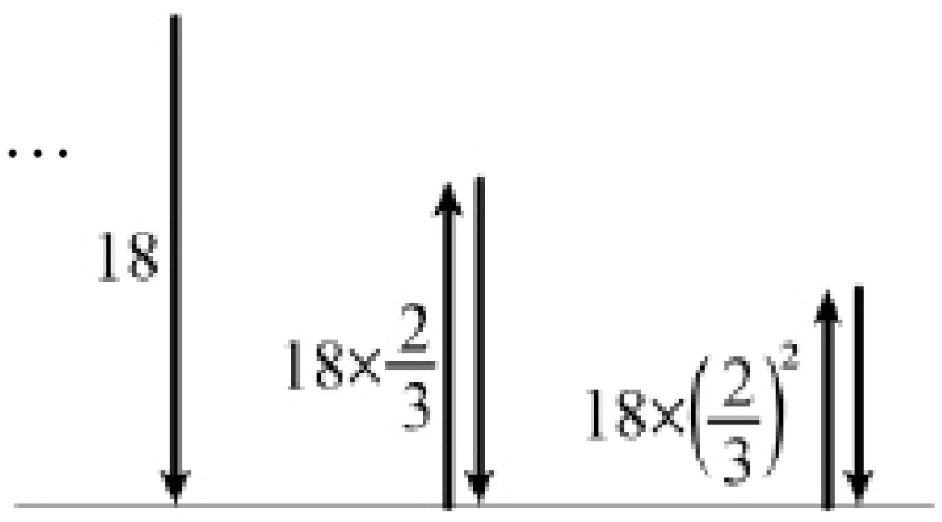
答： 32



例題 10

有一個皮球從 18 公尺的高處落下，每次反跳 $\dfrac{2}{3}$ 的高度，試問此皮球至停止時所經過的路徑總長為何？

解：



如右圖所示，所求 $=18+2\times18\times\dfrac{2}{3}+2\times18\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+2\times18\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\cdots$

$=18+2\times18\times\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\ldots\right)$

$=18+24\times\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=18+24\times3=18+72$

$=90$（公尺）。

隨堂練習 10

一皮球自離地面 10 公尺高處落下。首次反彈高度為 $\frac{10}{3}$ 公尺，此後每次反彈高度為其前次反彈高度的 $\frac{1}{3}$，則此球到完全靜止前，求所經過路徑的總長度是幾公尺？

答： 20

2-2.3 循環小數

第一冊中曾介紹有理數必可化成有限小數（除得盡）或循環小數（除不盡），而循環小數也可以化成分數。我們透過無窮等比級數的觀念，再次討論這個問題！

例題 11

請利用無窮等比級數的觀念，將 $4.2\overline{71}$ 化成最簡分數。

解：

$4.2\overline{71}=4.2+(0.071+0.00071+0.0000071+\quad)$

（括弧內是一個首項 0.071，公比 0.01 的無窮等比級數）

$$=4.2+\frac{0.071}{1-0.01}=4.2+\frac{0.071}{0.99}=4.2+\frac{71}{990}$$

$$=\frac{4.2\times990+71}{990}=\frac{4158+71}{990}$$

$$=\frac{4229}{990}$$

隨堂練習 11

請利用無窮等比級數的觀念，將 $1.2\overline{3}$ 化成最簡分數。

答：$\frac{37}{30}$

循環小數化為分數的技巧

由以上說明，我們可以知道，循環小數一定可以化成分數。但是，每次都要化成無窮等比級數再來求值，稍嫌麻煩些。事實上，循環小數化成分數是有技巧的，同學可自行驗證，並多加練習。

【整理】循環小數化分數的技巧

$\begin{cases} \text{分母部分：小數點後循環節數字補 9，非循環節數字補 0(由後往前數)} \\ \text{分子部分：全部數字}-\text{非循環節數字} \end{cases}$

即 $0.\overline{a}=\dfrac{a}{9}$，$0.a\overline{b}=\dfrac{ab-a}{90}$，$0.a\overline{bc}=\dfrac{abc-a}{990}$ $\cdots$ (abc 是阿拉伯數字)

例題 12

請將 ① $0.\overline{5}$　② $0.2\overline{3}$　③ $1.2\overline{34}$ 化成最簡分數。

解：

①《方法一》

$$\begin{aligned} 0.\overline{5} &= 0.5555\ldots \\ &= 0.5+0.05+0.005+0.0005+\cdots \text{ (首項 } a=0.5 \text{ ，公比 } r=0.1 \text{)} \\ &= \frac{0.5}{1-0.1}=\frac{0.5}{0.9}=\frac{5}{9} \end{aligned}$$

《方法二》

因為小數點後只有一個數字 5，且為循環節數字，所以分母我們放 9

又全部數字是 5，沒有非循環節數字，所以分子是 5

所以 $0.\overline{5}=\dfrac{5}{9}$

②《方法一》

$$\begin{aligned} 0.2\overline{3} &= 0.23333333\ldots \\ &= 0.2+0.03+0.003+0.0003+\cdots \text{ (首項 } a=0.03 \text{ ，公比 } r=0.1 \text{)} \\ &= 0.2+\frac{0.03}{1-0.1}=0.2+\frac{0.03}{0.9}=0.2+\frac{1}{30} \\ &= \frac{2}{10}+\frac{1}{30}=\frac{7}{30} \end{aligned}$$

《方法二》

因為小數點後數字由後往前數先是 3(循環節數字，補 9)，再是 2(非循環節數字，補 0)，所以分母我們放 90

又全部數字是 23，扣掉非循環節數字 2，所以分子是 23−2

所以$0.2\overline{3}=\dfrac{23-2}{90}=\dfrac{21}{90}=\dfrac{7}{30}$

③《方法一》

$$\begin{aligned}1.2\overline{34}&=1.23434343434\ldots\\&=1.2+0.034+0.00034+0.0000034+\cdots\text{（首項 }a=0.034\text{，公比 }r=0.01\text{）}\\&=1.2+\frac{0.034}{1-0.01}=1.2+\frac{0.034}{0.99}=1.2+\frac{34}{990}\\&=\frac{1188}{990}+\frac{34}{990}=\frac{1222}{990}\\&=\frac{611}{495}\end{aligned}$$

《方法二》

因為小數點後數字由後往前數先是 4(循環節數字，補 9)，再是 3(循環節數字，補 9)，再是 2(非循環節數字，補 0)，所以分母我們放 990，

又全部數字是 234(個位數 1 單獨處理)，扣掉非循環節數字 2，所以分子是 234−2

所以$1.2\overline{34}=1+\dfrac{234-2}{990}=\dfrac{1222}{990}=\dfrac{611}{495}$

隨堂練習 12

將下列循環小數化為最簡分數：① $0.\overline{56}$ ② $2.3\overline{45}$

答：① $\dfrac{56}{99}$ ② $\dfrac{129}{55}$

例題 13

設有一無窮等比級數的首項為 $0.\overline{2}$，第二項為 $0.1\overline{6}$，求此無窮等比級數的和。

解：

此無窮等比級數的首項 $a_1 = 0.\overline{2} = \dfrac{2}{9}$ ，$a_2 = \dfrac{16-1}{90} = \dfrac{15}{90} = \dfrac{1}{6}$

所以 $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow S = \dfrac{\frac{2}{9}}{1-\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{8}{9}$

隨堂練習 13

一無窮等比級數的首項 $a_1 = 0.\overline{8}$，第二項 $a_2 = 0.0\overline{8}$，則此級數的和為何？

答：$\dfrac{80}{81}$

2-2 無窮等比級數習題

填充題

1. 無窮等比級數的和 $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\cdots+(-1)^{n-1}\times(\frac{2}{3})^{n}+\cdots=$______。

2. x 為實數，若級數 $1+(3-2x)+(3-2x)^{2}+\cdots$ 為收斂，則 x 之範圍為 ______。

3. 級數 $\sum_{n=1}^{\infty}4(-\frac{1}{3})^{n-1}$ 之和為 ______。

4. 若無窮等比級數 $x+2x^{2}+4x^{3}+8x^{4}+\cdots=\frac{2}{3}$，則 $x=$______。

5. 試求無窮級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}+5}{3^{n}}=$______。

6. 設一無窮等比級數的和為 4，第二項為 -3，則 ① 首項為 ______，② 公比為 ______。

7. 若首項為 a，公比為 0.01 的無窮等比級數和等於循環小數 $1.\overline{2}$，則 $a=$______。

8. 設無窮等比級數 $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^{2}}+\cdots+\frac{1}{5^{n-1}}+\cdots$ 的和為 S，前 n 項部分的和為 S_n，若 $|S-S_n|\le\frac{1}{100}$，則最小正整數 $n=$______。

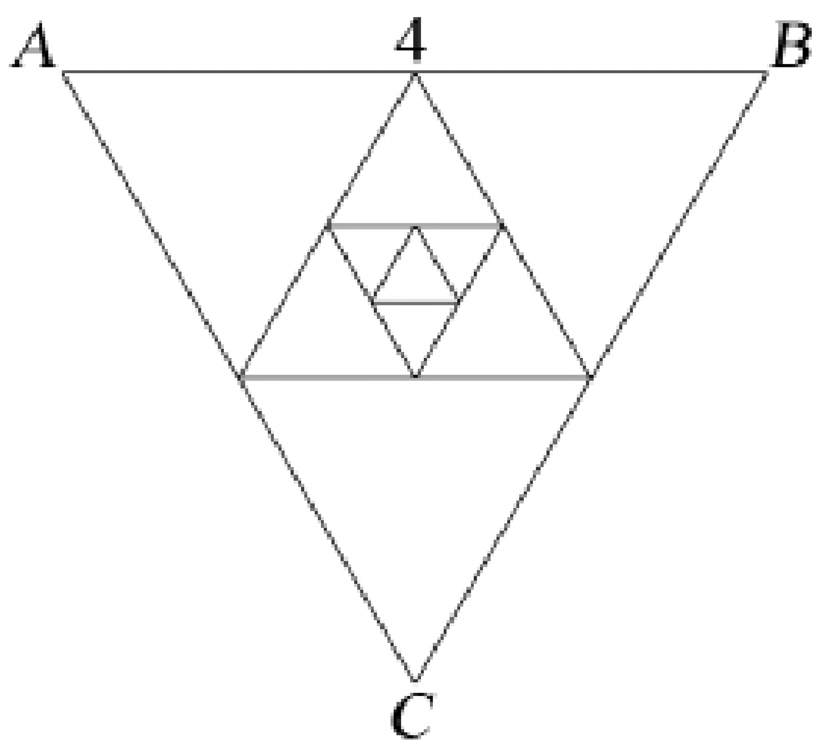
9. 已知首項為 a、公比為 r 的無窮等比級數和等於 5；首項為 a，公比為 $3r$ 的無窮等比級數和等於 7，則首項為 a，公比為 $2r$ 的無窮等比級數和等於 ______。

10. 求無窮級數 $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{2^{n}}\right)+\cdots$ 之和$=$______。

11. 將循環小數 $0.12\overline{6}$ 化為最簡分數$=$______。

12. 求無窮級數 $0.33+0.0303+0.003003+0.00030003+\cdots$ 之和$=$______。

13. 如下圖，正三角形 ABC 邊長為 4，將三邊中點相連，得第二個正三角形，再將第二個正三角形三邊中點相連，得第三個正三角形，重複這些步驟，求所有正三角形的面積總和為 ______。



問答題

14. 烏龜與兔子約好一起參加全長 42.195 公里的森林盃馬拉松比賽。兔子心想，烏龜爬那麼慢，我只要一開始全力衝刺，而且中途不睡覺，剩下的路程再慢慢跑，烏龜還是追不上我的。

若兔子一開始以時速 14 公里的速度，然後保留體力每小時速度減為原來的 $\frac{2}{3}$；而烏龜則永遠以每小時爬 100 公尺的速度爬行。若不計比賽時間，請問是烏龜或是兔子贏得比賽？為什麼？

簡答

1. $\frac{2}{5}$	2. $1<x<2$	3. 3	4. $\frac{2}{7}$
5. $\frac{21}{2}$	6. ①6　② $-\frac{1}{2}$	7. 1.21	8. 3
9. $\frac{35}{6}$	10. $\frac{1}{2}$	11. $\frac{19}{150}$	12. $\frac{4}{11}$
13. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$	14. 烏龜，因為兔子永遠跑不到終點。		

編著群
國立溪湖高級中學 李惠雯 老師
國立溪湖高級中學 黃淑娟 老師
國立溪湖高級中學 蔡淇茂 老師