# 綜合高級中學
# 數學科銜接教材
# A

國家教育研究院
蕭文婷　編　著

# 前言

綜合高中是我國後期中等教育的一種學制，其課程之規劃，在一年級採用普通高中課程，二年級以後，則按學生對於專門學程的選擇而依循高職或高中的課程。然而，高中與高職的數學課程綱要由兩組專家學者分別制訂，各自適應該學制的學習需求，導致部分綜合高中學生，從一年級轉銜二年級時，缺乏適當的市售數學教科書，而教師必須經常性地負起自編教材的責任。

針對上述現象，教育部於民國 102 年 9 月發佈綜合高中課綱微調的命令，自 103 學年起逐年實施。對於微調之後，仍在二年級職業專門學程的數學課程中存在的少數重複或需補強內容，則由國家教育研究院以「綜合高級中學數學科銜接教材」專案計畫，委託具數學教育專業與實務教學經驗的教師與學者，為二年級分流後銜接高職 $A$ 版、$B$ 版、或 $C$ 版數學課程的綜高師生，分別編撰一份可開放下載列印的銜接教材，搭配職業學校之第三冊或第四冊數學教科書使用。現在這份銜接教材，就是該計畫的產出。

此「銜接教材」根據上述「微調」後的綜合高中數學課程編制，由鄭英豪教授整理出重複的課題與需補強的內容，經蕭建華老師和曾政清老師推薦資深數學教師李惠雯、馬雅筠、黃淑娟、黃敏哲、黃嘉男、陳吳煜、蔡淇茂、與蕭文婷，依照現行各版本之教學習慣編撰而成。然後由鄭章華博士、單維彰、與前述所有同仁共同審閱校定。本銜接教材之經費與行政資源，皆由國家教育研究院支持，謹此一併致謝。

計畫主持人 單維彰

誌於中壢中央大學

民國 103 年 4 月 17 日

## 主編

單維彰／國立中央大學

## 編著者

蕭文婷／國立嘉義高級家事職業學校

## 審閱委員

曾政清／台北市立建國高級中學

蕭建華／國立溪湖高級中學

鄭英豪／臺北市立大學

鄭章華／國家教育研究院

## 編輯

郭潔如／國立中央大學

莊珺涵／國立中央大學

# 目錄

## 第一章 三角函數

# 使用須知

本銜接教材依據教育部於民國 102 年 9 月 17 日發佈之臺教技 ( 一 ) 字第 1020131965$A$ 號令「微調」之後的綜合高級中學數學課程綱要而作，自 103 學年度起，於綜合高級中學逐年實施，至十二年國教的新課綱實施止。

這份銜接教材應搭配經審訂之高職數學 $A$ 版第三冊教科書使用。假設學生在一年級時，按照綜高數學課程綱要，學習了普通高中《數學Ⅰ》和《數學Ⅲ》的內容，則以下課題可以從高職數學教科書中省略或擇要複習：

- 一元二次不等式、二元一次不等式的圖形、線性規劃
- 圓方程式、圓與直線的關係
- 等比數列與等比級數

由上述課題的節略，教師約有 18－24 節課可用以實施本銜接教材，並不須要額外加課。

本教材之版權屬國家教育研究院，開放給全國各界自由使用，包括下載列印或複印，但印刷與傳播之費用不屬於本教材支援之範圍。雖然這本教材有部分的彩色頁面，但都經過實驗，確保改以黑白（灰階）列印時，不至於影響閱讀。所以，此教材可以用彩色或者黑白列印。

這本書從封面到封底，已經安插適當的空白頁，讓讀者可以採用「雙面輸出」的方式列印。原稿的空白頁，就造成雙面輸出時的單面頁。

# 第一章　三角函數

三角學在某種意義下，就像是望遠鏡的前身，它把遠在天邊的東西，拉近到可以測量的範圍。

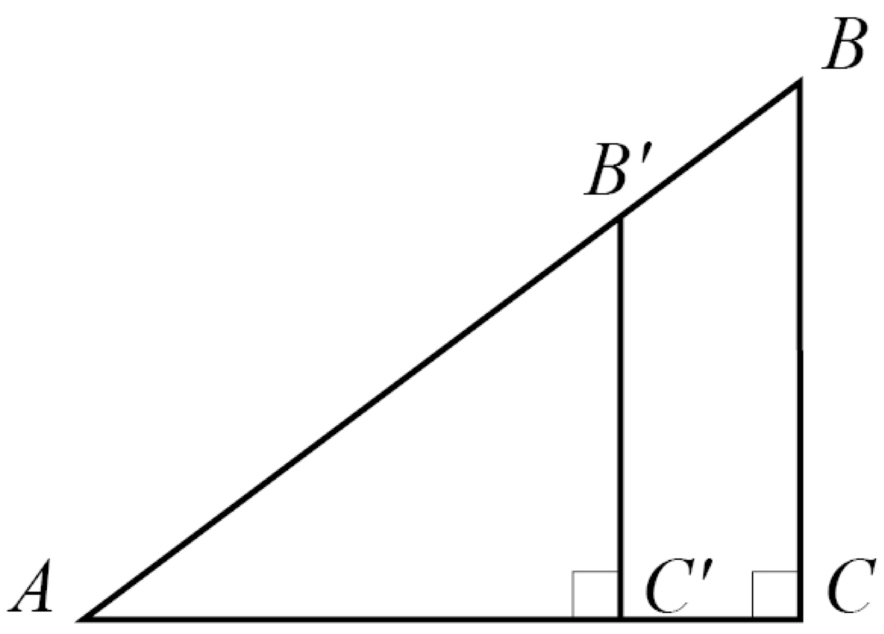
— Stanley L. Jaki《物理學的相關性》

## 1-1 三角函數的定義

三角函數討論直角三角形中銳角與三邊長的關係。利用國中學過的相似三角形的性質，由任兩邊的比值，在直角三角形中定義出六個銳角的三角函數。

### 📖1-1.1 銳角三角函數的定義

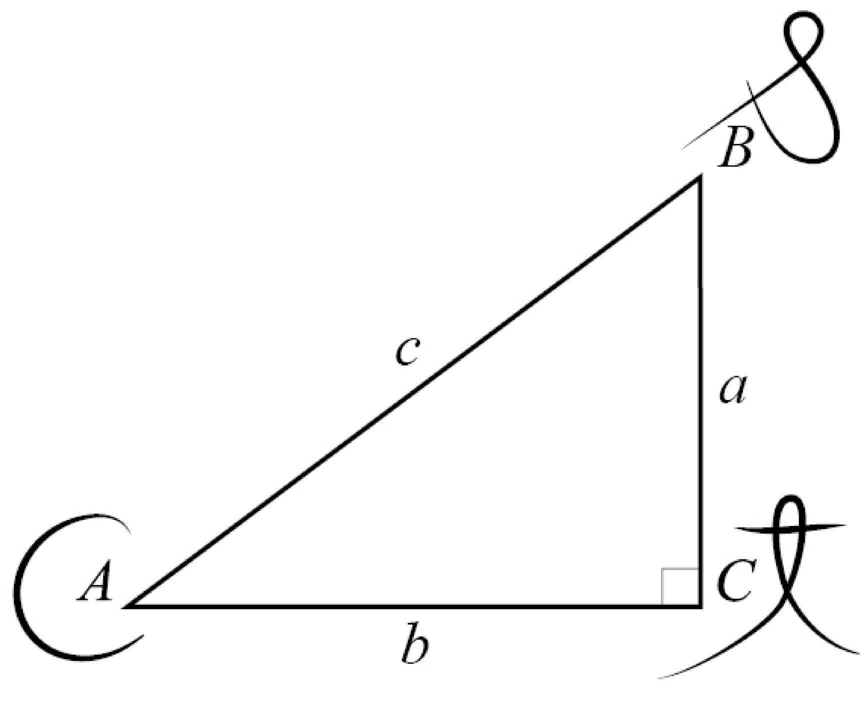
在國中時期學過，兩個相似三角形，其對應邊成比例。若兩三角形為直角三角形，只要其中一個銳角相等，兩直角三角形必相似。如圖 1 所示，直角 $\Delta ABC$ 與直角 $\Delta AB'C'$ 為相似三角形，即 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$ ，$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$ ，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$




〈圖 1〉

由此可知，在直角三角形中，若銳角 $\angle A$ 大小不變，無論三角形的邊長如何改變，其任兩邊邊長比值不變。因此我們定義銳角 $\angle A$ 的六個三角函數。

在直角 $\Delta ABC$ 中，$\angle C$ 為直角，$\overline{AB}$ 為斜邊，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 分別稱為 $\angle A$ 的鄰邊及對邊，如圖 2 所示。設 $\overline{BC}=a$ ，$\overline{AC}=b$ ，$\overline{AB}=c$ ，則定義 $\angle A$ 的六個三角函數如下：




速記法:

：從 $c$ 到 $b$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$

：從 $c$ 到 $a$，$\sin A=\dfrac{a}{c}$

：從 $b$ 到 $a$，$\tan A=\dfrac{a}{b}$

〈圖 2〉

$\angle A$ 的正弦函數：$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$ (sine)

$\angle A$ 的餘弦函數：$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$ (cosine)

$\angle A$ 的正切函數：$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$ (tangent)

$\angle A$ 的餘切函數：$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{b}{a}$ (cotangent)

$\angle A$ 的正割函數：$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$ (secant)

$\angle A$ 的餘割函數：$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{c}{a}$ (cosecant)

## 例題 1

直角$\triangle ABC$ 中，若$\angle C$ 為直角，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=3$，求$\angle A$ 的六個三角函數值。

解：

已知 $\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=3$

利用商高定理：求出$\overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$，$\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{4}{5}$

$\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{4}$，$\cot A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{4}{3}$

$\sec A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{4}$，$\csc A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{5}{3}$

隨堂練習 1

直角$\triangle ABC$ 中，若$\angle C$ 為直角，$\overline{AC}=12$，$\tan B=\dfrac{12}{5}$，求 $\angle B$ 其餘的三角函數值。

答：$\sin B=\dfrac{12}{13}$，其餘略

## 📖1-1.2 三角恆等式

〈一〉倒數關係式

由定義可得知 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 分別與 $\csc A$ 、 $\sec A$ 、 $\cot A$ 互為倒數。

$\sin A\times\csc A=1$，即 $\csc A=\dfrac{1}{\sin A}$

$\cos A\times\sec A=1$，即 $\sec A=\dfrac{1}{\cos A}$

$\tan A\times\cot A=1$，即 $\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$

〈二〉商數關係式

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\sin A}{\cos A}\ ,\quad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\cos A}{\sin A}$$

從倒數關係式及商數關係式可以看出，只要利用正弦函數與餘弦函數，就可以表示出其他三角函數。

〈三〉餘角關係式

在直角 $\Delta ABC$ 中，$\angle C$ 為直角，且三角形內角和為 $180^\circ$

所以 $\angle A+\angle B=90^\circ$ ( $\angle A$ 、 $\angle B$ 互為餘角 )

且 $\angle A$ 的對邊 $=a=$ $\angle B$ 的鄰邊

因此：$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\angle B\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\cos B=\cos(90^\circ-A)$

同理可得

$\cos A=\sin B=\sin(90^\circ-A)$ ， $\tan A=\cot B=\cot(90^\circ-A)$

$\cot A=\tan B=\tan(90^\circ-A)$ ， $\sec A=\csc B=\csc(90^\circ-A)$

$\csc A=\sec B=\sec(90^\circ-A)$

〈四〉平方關係式

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$$

將 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 兩邊同除以 $\cos^2 A$，可得 $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A}=\dfrac{1}{\cos^2 A}$

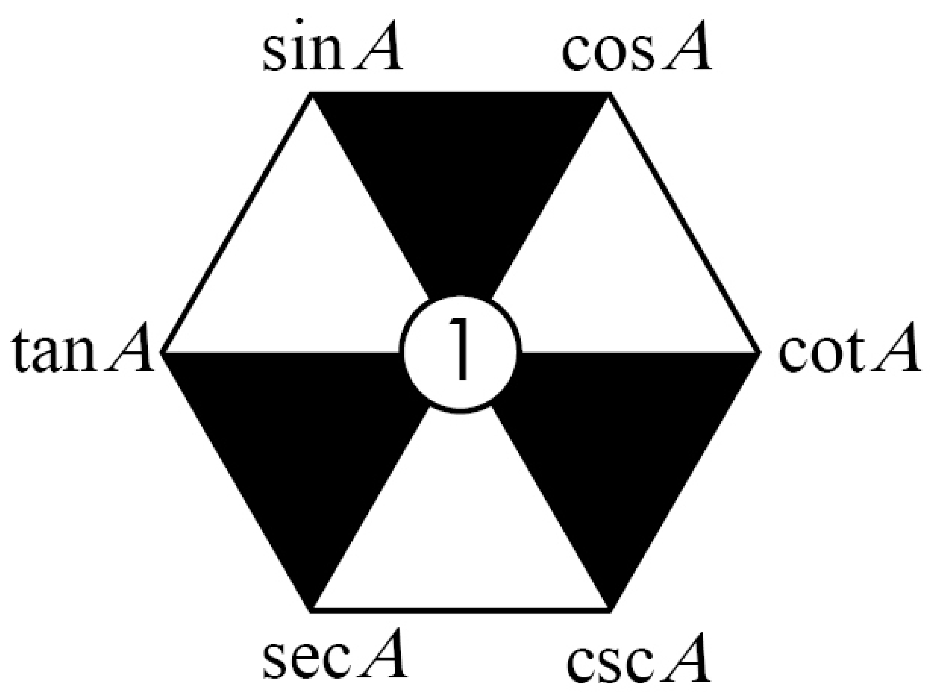
即：$\tan^2 A+1=\sec^2 A$

將 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 兩邊同除以 $\sin^2 A$ ，可得 $\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 A}+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\dfrac{1}{\sin^2 A}$

即：$1+\cot^2 A=\csc^2 A$

習慣上，我們把 $(\sin A)^n$ 記為 $\sin^n A$（其中 $n$ 為正整數），讀作 $\sin A$ 的 $n$ 次方，其餘三角函數亦相同。例如：在平方關係中 $(\sin A)^2=\sin^2 A\neq\sin A^2$ 。以此類推。

上述三角函數的關係式，可以用圖 3 來幫助記憶




〈圖 3〉

① **倒數關係式：**正六邊形中任意兩對角線函數的乘積等於中心的 1，例如

$\sin A\times\csc A=1$ ，得到 $\csc A=\dfrac{1}{\sin A}$

$\cos A\times\sec A=1$ ，得到 $\sec A=\dfrac{1}{\cos A}$

$\tan A\times\cot A=1$ ，得到 $\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$

② **商數關係式：**正六邊形中任一頂點的函數等於其相鄰兩個頂點的函數之乘積。

$\sin A=\tan A\times\cos A$ ，得到 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

③ **平方關係式：**正六邊形中每一個倒立的三角形▼，上方兩個頂點函數平方和等於下方一頂點的函數平方。

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$\tan^2 A+1=\sec^2 A$

$1+\cot^2 A=\csc^2 A$

## 例題 2

① 試求 $\sin 10^\circ \times \cos 20^\circ \times \tan 30^\circ \times \cot 30^\circ \times \sec 20^\circ \times \csc 10^\circ$ 之值

② 試求 $\sin^2 50^\circ + \cot^2 70^\circ - \csc^2 70^\circ + \cos^2 50^\circ$ 之值

解 ：

由倒數關係式可得：

① 原式 $= (\sin 10^\circ \times \csc 10^\circ) \times (\cos 20^\circ \times \sec 20^\circ) \times (\tan 30^\circ \times \cot 30^\circ)$
$= 1 \times 1 \times 1$
$= 1$

由平方關係式可得：

② 原式 $= (\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ) + \cot^2 70^\circ - (1 + \cot^2 70^\circ)$
$= 1 - 1$
$= 0$

隨堂練習 2

試求 $\cos^2 20^\circ + \sec^2 40^\circ - \cot^2 50^\circ + \sin^2 20^\circ$ 之值

答：2

## 例題 3

已知$\theta$為銳角且 $\tan\theta = \dfrac{5}{3}$ ，試求 $\dfrac{6\sin\theta - 2\cos\theta}{\cos\theta + 3\sin\theta}$ 的值

解：

$$\frac{6\sin\theta - 2\cos\theta}{\cos\theta + 3\sin\theta} = \frac{\dfrac{6\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta} + \dfrac{3\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{6\tan\theta - 2}{1 + 3\tan\theta}$$

$$= \frac{6 \times \dfrac{5}{3} - 2}{1 + 3 \times \dfrac{5}{3}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

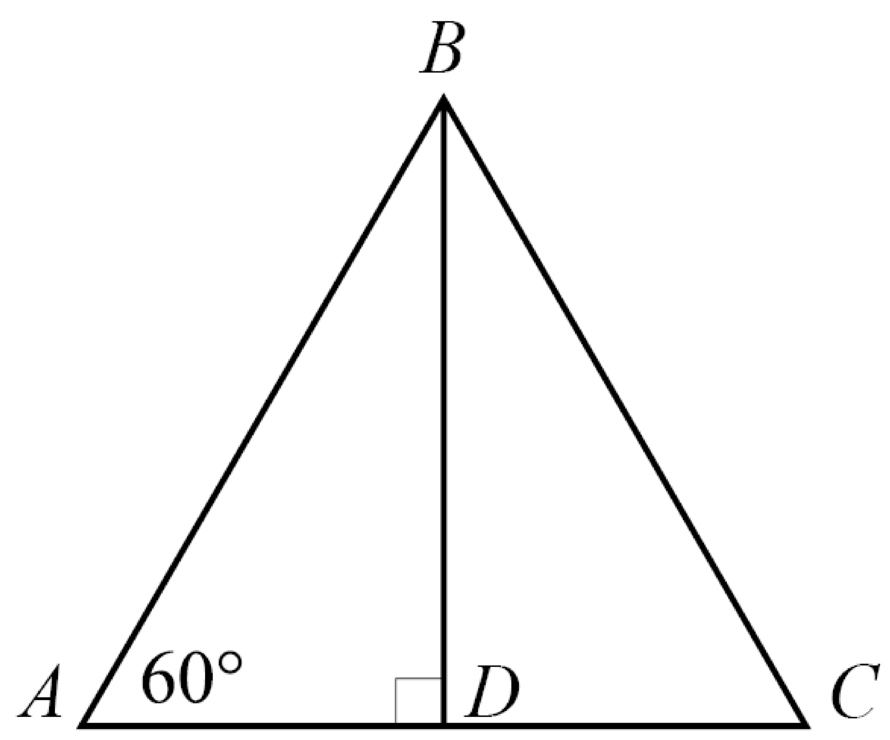
隨堂練習 3

已知$\theta$為銳角且$\cot\theta = 2$，試求$\dfrac{5\sin\theta + 2\cos\theta}{2\cos\theta - \sin\theta}$的值
答：3

## 1-1.3 特別角$30^\circ$、$45^\circ$、$60^\circ$的三角函數值

〈一〉$30^\circ$與$60^\circ$的三角函數值：

如圖 4，作一邊長為 2 的正$\Delta ABC$，由$B$作$\overline{BD} \perp \overline{AC}$於$D$點，
則$\angle A = 60^\circ$，$\angle ABD = 30^\circ$，$\angle ADB = 90^\circ$。




〈圖 4〉

已知$\overline{AB} = 2$，則由幾何性質知$\overline{AD} = 1$，$\overline{BD} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$
由銳角三角函數的定義可得：

① $60^\circ$的三角函數值

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{2}{1} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

② $30^\circ$ 的三角函數值為

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

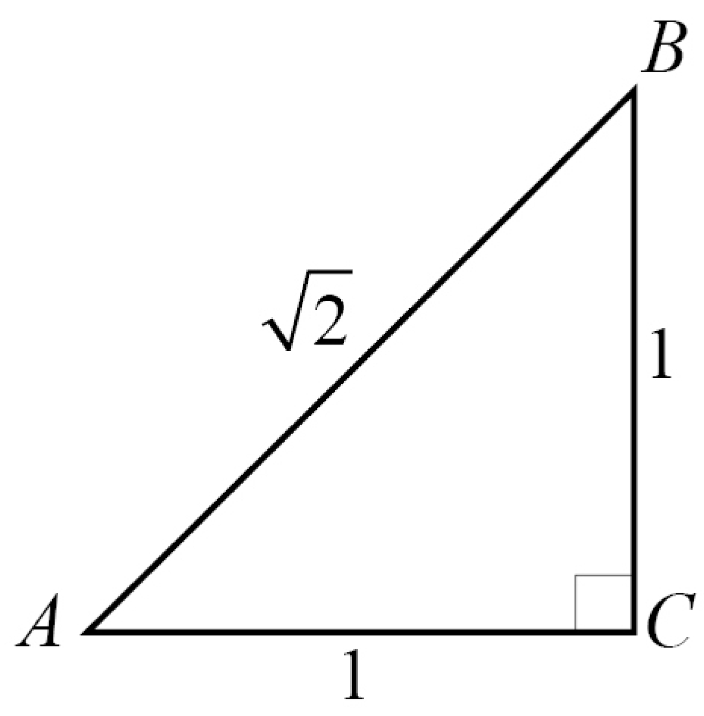
$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

〈二〉$45^\circ$ 的三角函數值

如下圖 5，作一等腰直角 $\Delta ABC$， $\angle C = 90^\circ$ ，令 $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$

則 $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ，且 $\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



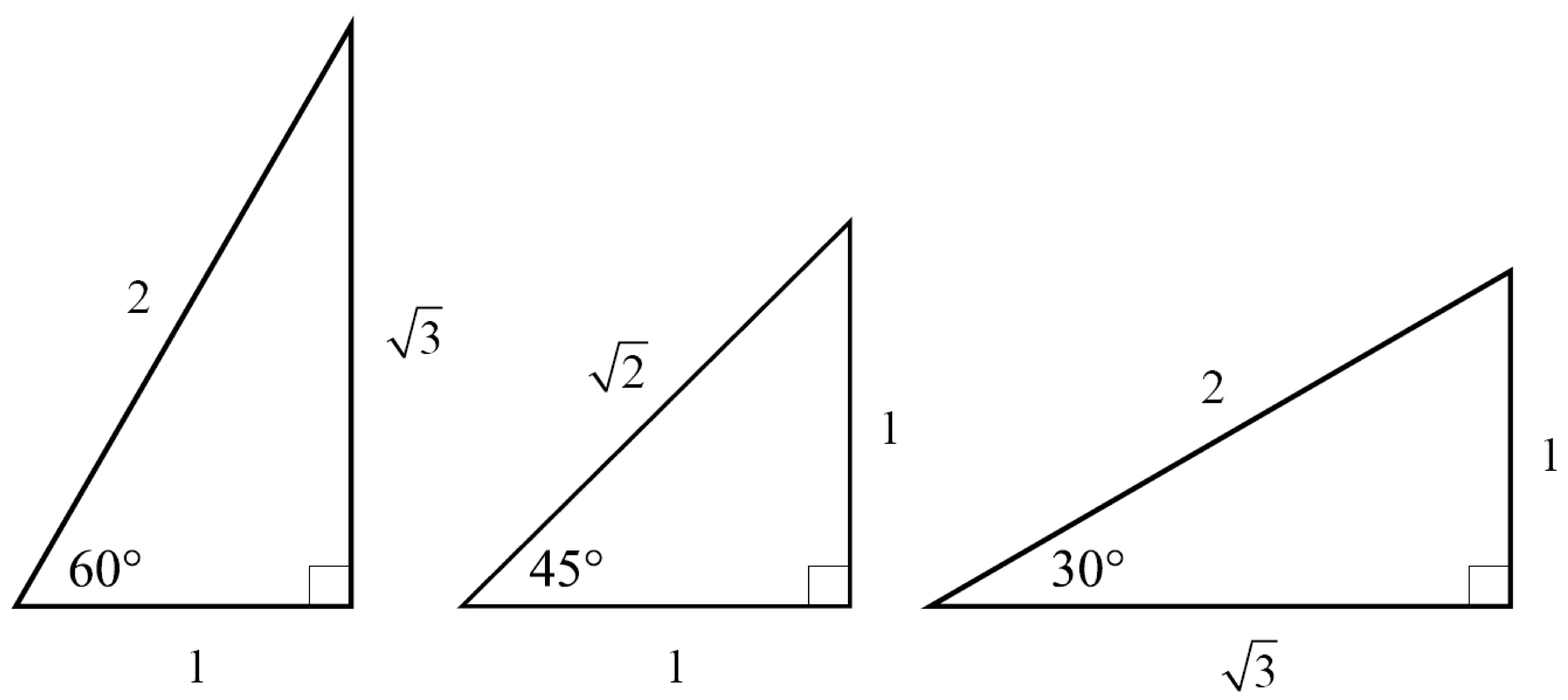

〈圖 5〉

由銳角三角函數的定義可得：

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \qquad \csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$




〈圖 6〉

同學可利用圖 6 的三角形及圖 2 的三角函數之圖像記憶，將特別角的三角函數值熟記如下表：

| 角度＼函數 | sin | cos | tan | cot | sec | csc |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $30^\circ(\frac{\pi}{6})$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $2$ |
| $45^\circ(\frac{\pi}{4})$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $1$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ |
| $60^\circ(\frac{\pi}{3})$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $2$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ |

(以上表格中，$\pi$ 是 $180^\circ$ 的弧度量，$\frac{\pi}{6}$ 是 $30^\circ$ 的弧度量，$\frac{\pi}{4}$ 是 $45^\circ$ 的弧度量，$\frac{\pi}{3}$ 是 $60^\circ$ 的弧度量。)

## 例題 4

求 $(1+2\sin\frac{\pi}{3})(1-2\cos\frac{\pi}{6})$ 的值

解：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2})(1-2\times\frac{\sqrt{3}}{2})\\ &= (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\\ &= 1^2-3^2=1-9=-8\end{aligned}$$

隨堂練習 4

試求 $4\sin^2 30^\circ - 2\cos^2 45^\circ + 3\tan^2 45^\circ$ 的值

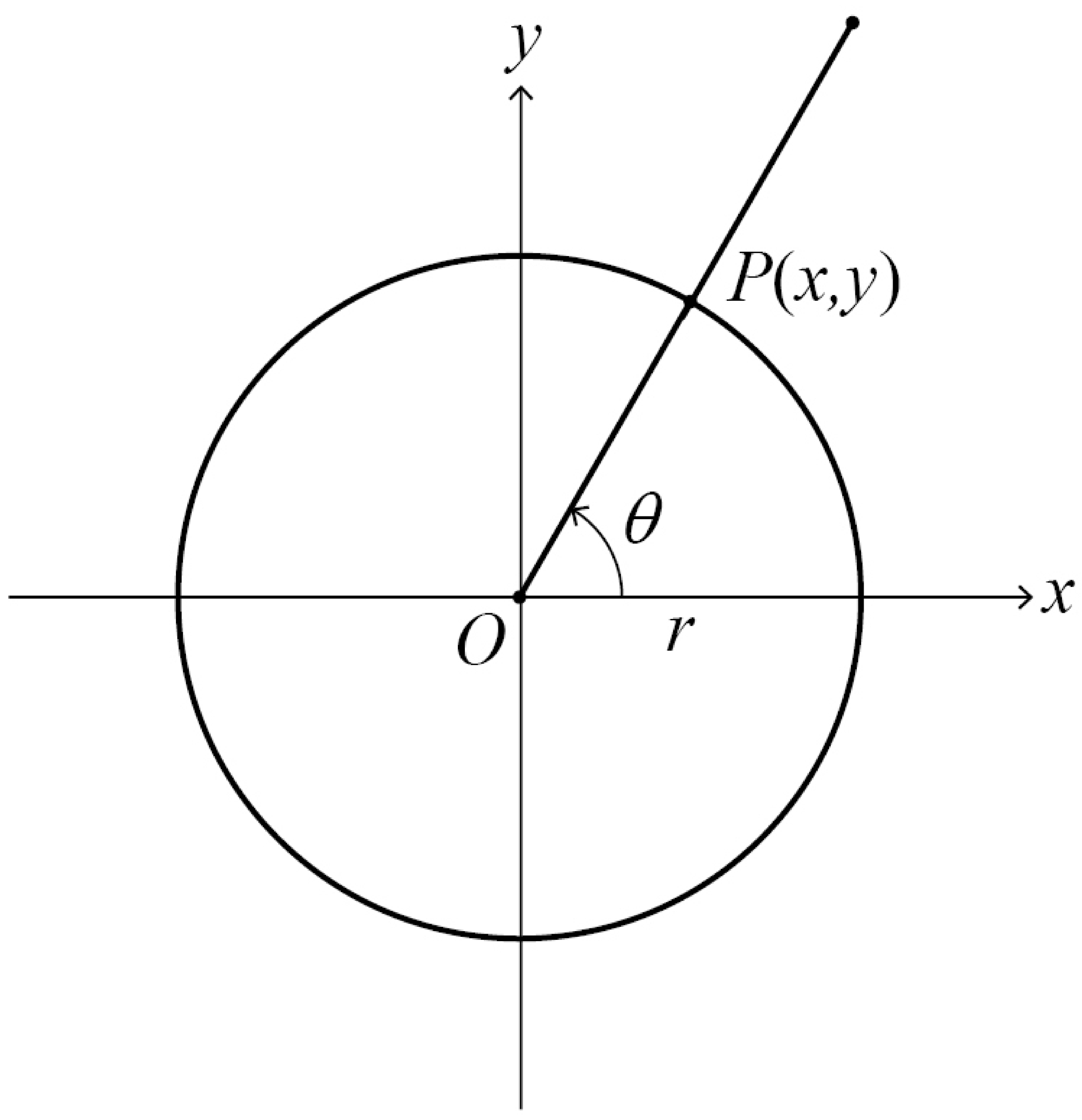
答：3

## 📖1-1.4 任意角的三角函數

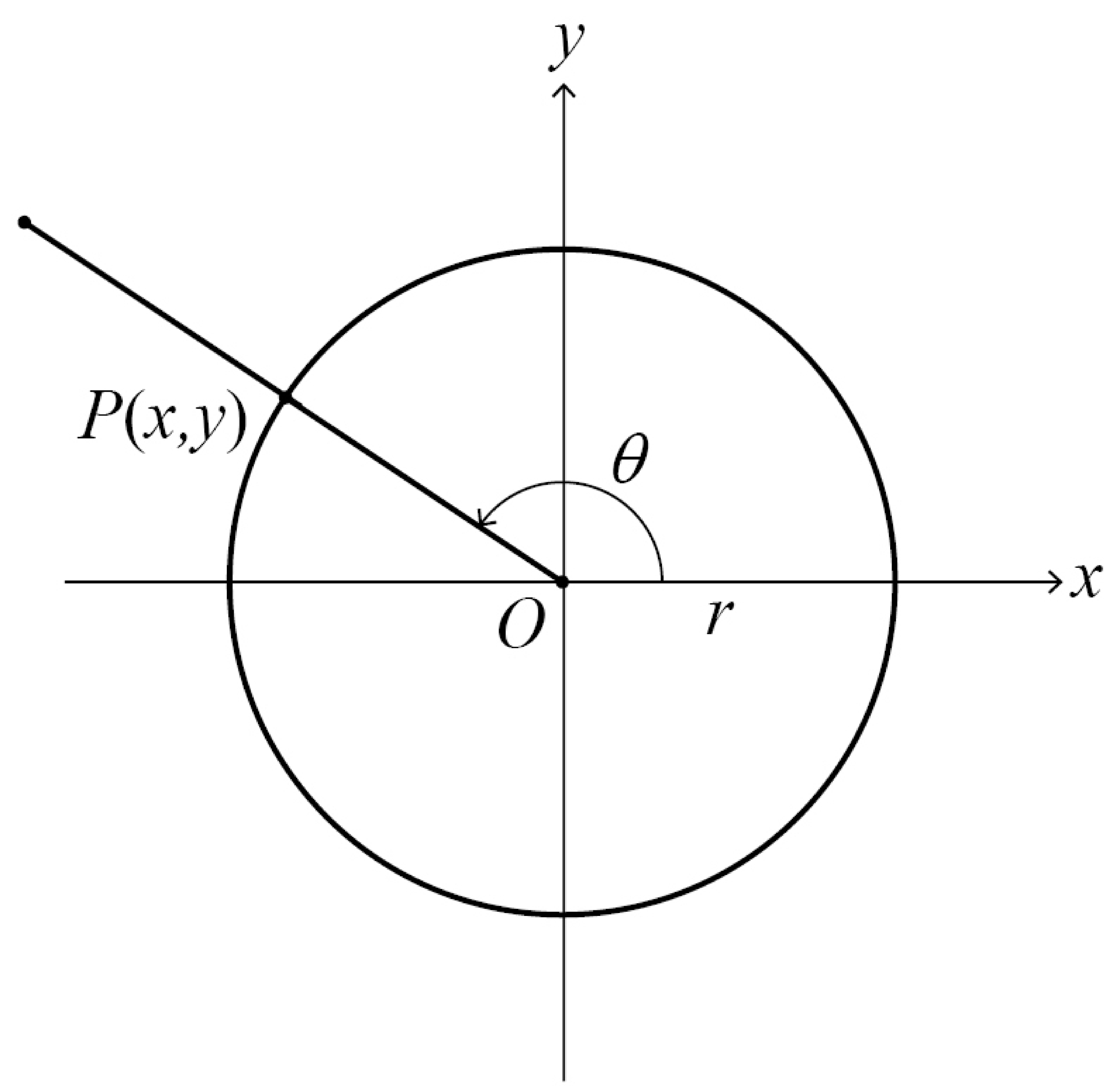
在前面所討論的三角函數，均限制 $\angle\theta$ 為銳角，現在將角推廣到有向角，將$\angle\theta$置於直角坐標系的標準位置角，以 $\angle\theta$ 終邊上的點坐標來定義這種任意角的三角函數。

設$\theta$為標準位置角，取 $\angle\theta$ 終邊上異於原點之任一點$P(x,y)$ ，則$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=r$，其中 $r>0$ 如圖 7-1 和 7-2 所示，則 $\angle\theta$ 的六個三角函數定義如下：

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\qquad\cos\theta=\frac{x}{r}$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x}\qquad\cot\theta=\frac{x}{y}$$
$$\sec\theta=\frac{r}{x}\qquad\csc\theta=\frac{r}{y}$$




〈圖 7-1〉




〈圖 7-2〉

在任意角三角函數的定義中，$x$、$y$ 可為任意實數，且$r=\sqrt{x^2+y^2}$，因此可得$|x|\le r$且$|y|\le r$ ，亦即$\left|\frac{x}{r}\right|\le 1$， $\left|\frac{y}{r}\right|\le 1$，若$x\ne 0$則$\left|\frac{r}{x}\right|\ge 1$， $y\ne 0$則$\left|\frac{r}{y}\right|\ge 1$。

所以我們可得三角函數值的範圍如下：

① $|\sin\theta|\le 1$ ，$|\cos\theta|\le 1$

② 當$\theta$的終邊不在坐標軸上， $\tan\theta$ 、 $\cot\theta$可為任意實數

③ 當$\theta$的終邊不在坐標軸上，$|\sec\theta|\ge 1$ ，$|\csc\theta|\ge 1$

## 例題 5

$\angle\theta$ 為標準位置角，其終邊上有一點 $P(-8,15)$， 求 $\angle\theta$ 的六個三角函數值。

解 ：

$O$ 為原點，又 $x=-8$， $y=15$

因為 $\overline{OP}=r=\sqrt{(-8)^2+15^2}=17$

所以 $\sin\theta=\dfrac{15}{17}$ ， $\cos\theta=\dfrac{-8}{17}$ ， $\tan\theta=\dfrac{15}{-8}$ ， $\cot\theta=\dfrac{15}{-8}$ ， $\sec\theta=\dfrac{17}{-8}$ ， $\csc\theta=\dfrac{17}{15}$

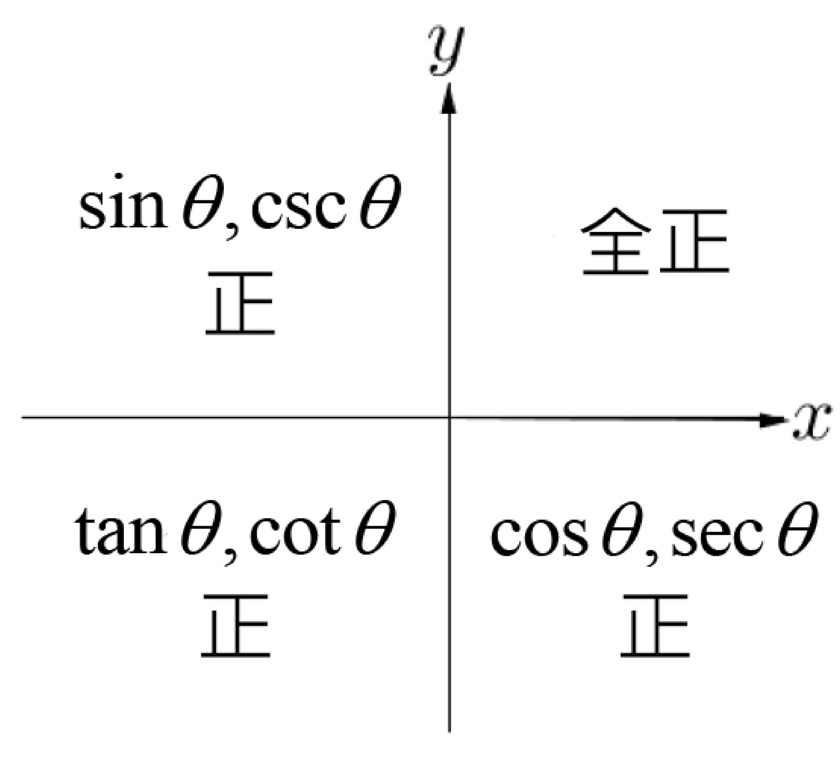
隨堂練習 5

$\angle\theta$ 為標準位置角，有一點 $P(-5,12)$ 在其終邊上，求 $\angle\theta$ 的六個三角函數值。

答：$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ ，$\cos\theta=\dfrac{-5}{13}$ ，$\tan\theta=\dfrac{12}{-5}$ ，$\cot\theta=\dfrac{-5}{12}$ ，$\sec\theta=\dfrac{13}{-5}$ ，$\csc\theta=\dfrac{13}{12}$

根據前面二個例題及隨堂練習的演練中，我們可以發現 $\theta$ 角若是第一象限角，其六個三角函數值均為正值，若是終邊落在第二、三、四象限，則其函數值各有正負，茲列表如下：

| 象限 / 函數 | 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta,\csc\theta$ | + | + | − | − |
| $\cos\theta,\sec\theta$ | + | − | − | + |
| $\tan\theta,\cot\theta$ | + | − | + | − |



## 例題 6

設 $\cot\theta<0$ 且 $\cos\theta>0$，則 $\angle\theta$ 為第幾象限角？

解：

由 $\cot\theta<0\Rightarrow\angle\theta$ 為第二或第四象限角，又 $\cos\theta>0\Rightarrow\angle\theta$ 為第一或第四象限角，

所以 $\angle\theta$ 為第四象限角。

**隨堂練習 6**

若點 $A(\sin\theta,\cot\theta)$ 在第二象限中，則 $\angle\theta$ 為第幾象限角？

答：第三象限。

## 例題 7

已知 $\sin\theta=\frac{-5}{13}$，又 $\sec\theta<0$，求 $\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 的值。

解：

由 $\sin\theta=\frac{-5}{13}<0$ 又 $\sec\theta<0\Rightarrow\angle\theta$ 為第三象限角

設點 $P(x,y)$ 為 $\angle\theta$ 終邊上任一點，則 $x<0$，$y<0$。

因為 $\sin\theta=\frac{-5}{13}=\frac{y}{r}$，令 $r=13$，$y=-5$，所以 $x=-\sqrt{13^2-(-5)^2}=-12$

故 $\cos\theta=\frac{-12}{13}$，$\tan\theta=\frac{5}{12}$

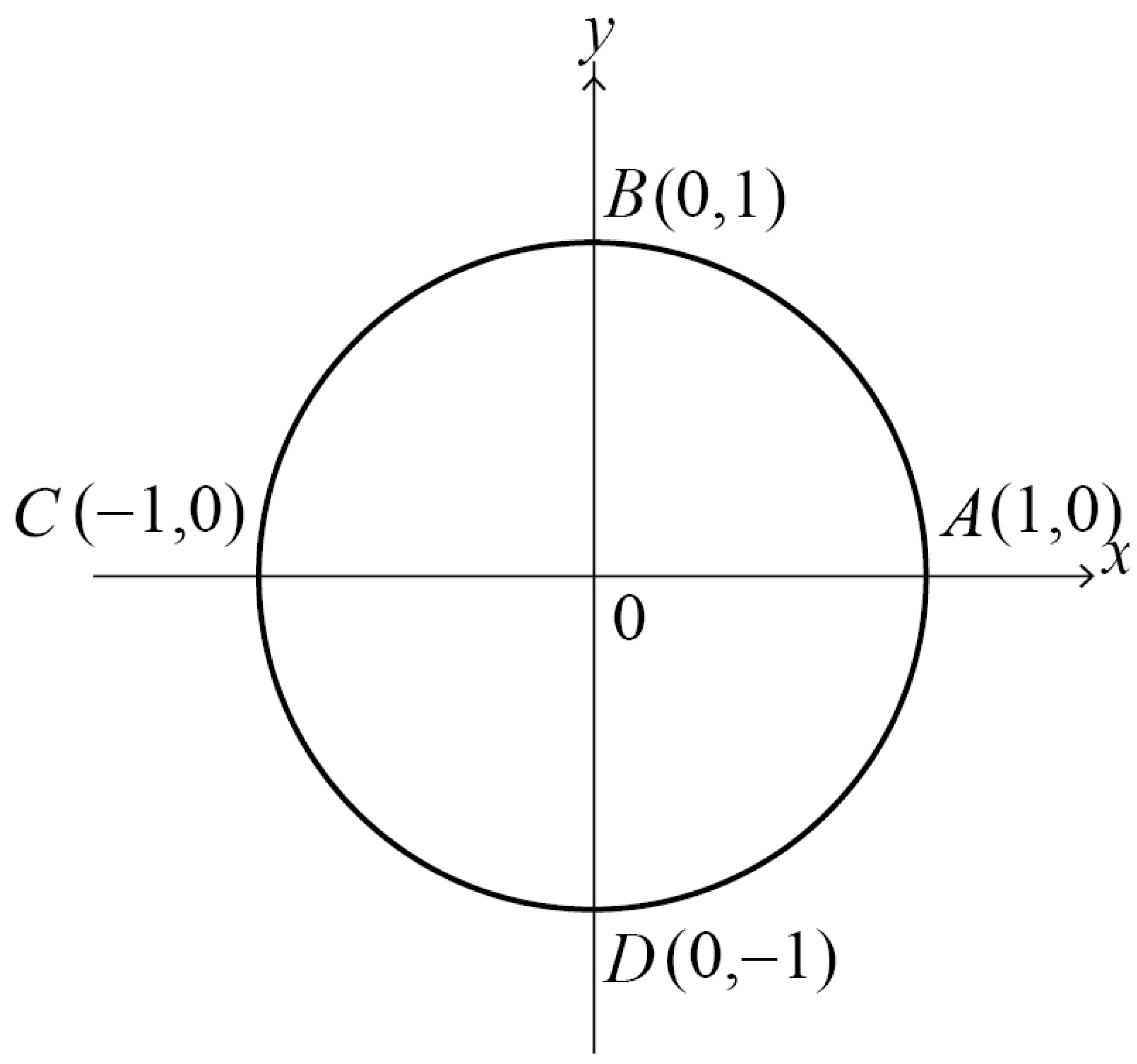
**隨堂練習 7**

已知 $\tan\theta=-2$ 且 $\cos\theta<0$，求 $\sin\theta$ 及 $\sec\theta$ 的值。

答：$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sec\theta=\frac{\sqrt{5}}{-1}$

## 📖1-1.5 象限角的三角函數值

為討論象限角($\theta=\frac{n\pi}{2}$，$n$ 為整數)的值，在坐標平面上，以原點為圓心，作一單位圓(半徑為 1 的圓)，交坐標軸於 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$，如圖 8 所示，則象限角的三角函數值如下：




〈圖 8〉

〈一〉$A(1,0)$ 為 $0°$ 角終邊上的點，由定義可得：

$\sin 0°=\frac{0}{1}=0$　　$\cos 0°=\frac{1}{1}=1$

$\tan 0°=\frac{0}{1}=0$　　$\cot 0°$ 無意義

$\sec 0°=\frac{1}{1}=1$　　$\csc 0°$ 無意義

〈二〉$B(0,1)$ 為 $90°$ 角終邊上的點，由定義可得：

$\sin 90°=\frac{1}{1}=1$　　$\cos 90°=\frac{0}{1}=0$

$\tan 90°$ 無意義　　$\cot 90°=\frac{0}{1}=0$

$\sec 90°$ 無意義　　$\csc 90°=\frac{1}{1}=1$

〈三〉$C(-1,0)$ 為 $180°$ 角終邊上的點，由定義可得：

$\sin 180°=\frac{0}{1}=0$　　$\cos 180°=\frac{-1}{1}=-1$

$\tan 180°=\frac{0}{-1}=0$　　$\cot 180°$ 無意義

$\sec 180°=\frac{1}{-1}=-1$　　$\csc 180°$ 無意義

〈四〉$D(0,1)$ 為 $270°$ 角終邊上的點，由定義可得：

$\sin 270° = \dfrac{-1}{1} = -1$　　$\cos 270° = \dfrac{0}{1} = 0$

$\tan 270°$ 無意義　　$\cot 270° = \dfrac{0}{-1} = 0$

$\sec 270°$ 無意義　　$\csc 270° = \dfrac{1}{-1} = -1$

將上述象限角的三角函數值列表如下：

| 角度 / $\theta$ 函數 | $0°(0)$ | $90°(\frac{\pi}{2})$ | $180°(\pi)$ | $270°(\frac{3\pi}{2})$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | 1 | 0 | －1 |
| $\cos\theta$ | 1 | 0 | －1 | 0 |
| $\tan\theta$ | 0 | 無意義 | 0 | 無意義 |
| $\cot\theta$ | 無意義 | 0 | 無意義 | 0 |
| $\sec\theta$ | 1 | 無意義 | －1 | 無意義 |
| $\csc\theta$ | 無意義 | 1 | 無意義 | －1 |

## 例題 8

求 $\cos 0° + \sin\dfrac{\pi}{2} + \tan\pi + \csc\dfrac{3\pi}{2}$ 的值

解：原式＝ 1 ＋ 1 ＋ 0 ＋ (−1) ＝ 1

隨堂練習 8

求 $\cot\dfrac{3\pi}{2} + 4\csc\dfrac{\pi}{2} - 5\sin\pi + \sec 2\pi$ 的值

答：5

## 1-1.6 化任意角的三角函數為銳角的三角函數

由任意角三角函數的定義可得知，同界角均有相同的三角函數值。亦即設 $n$ 為整數，則

$\sin(n\times 360^\circ+\theta)=\sin\theta$　　$\cos(n\times 360^\circ+\theta)=\cos\theta$

$\tan(n\times 360^\circ+\theta)=\tan\theta$　　$\cot(n\times 360^\circ+\theta)=\cot\theta$

$\sec(n\times 360^\circ+\theta)=\sec\theta$　　$\csc(n\times 360^\circ+\theta)=\csc\theta$

利用上面的公式，我們可將任意的三角函數化為 $0^\circ$~$360^\circ$ 的三角函數值，

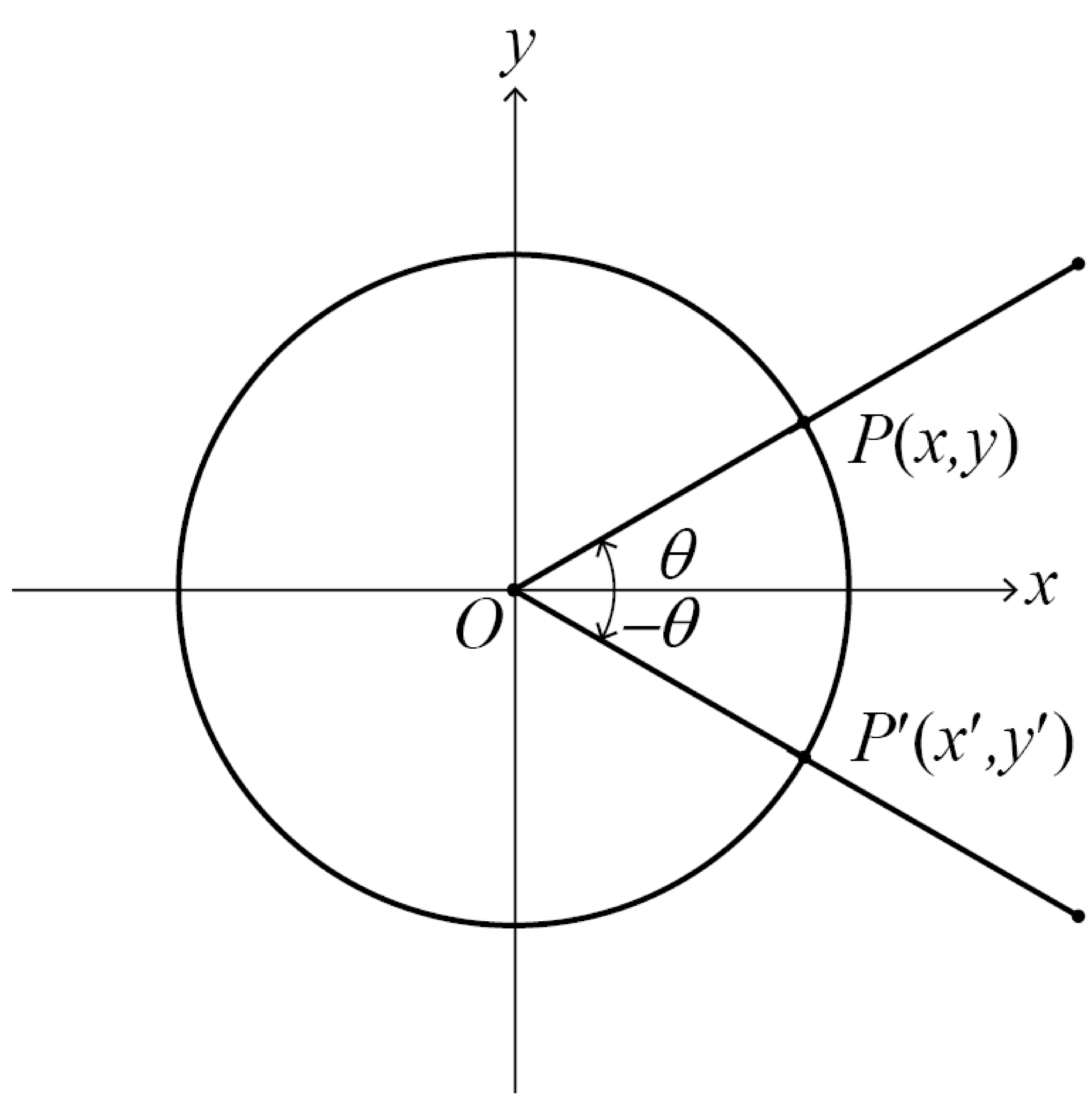
例如：$\sin 780^\circ=\sin(2\times 360^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ$

$\tan(-1320^\circ)=\tan\left[(-4)\times 360^\circ+120^\circ\right]=\tan 120^\circ$

現在我們再進一步將介於 $0^\circ$~$360^\circ$ 的三角函數值化成 $0^\circ\sim 90^\circ$ 的三角函數值。

〈一〉$(-\theta)$ 的三角函數值變換

設 $\theta$ 與 $(-\theta)$ 兩個角的終邊，分別與單位圓交於 $P(x,y)$ 及 $P'(x',y')$ 兩點如圖 9 所示




〈圖 9〉

因為點 $P$ 與點 $P'$ 對稱於 $x$ 軸，所以 $x'=x$， $y'=-y$

則 $\sin(-\theta)=\dfrac{-y}{1}=-y=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=\dfrac{x}{1}=x=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\cot(-\theta)=\dfrac{1}{\tan(-\theta)}=\dfrac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta$

$\sec(-\theta)=\dfrac{1}{\cos(-\theta)}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$

$\csc(-\theta)=\dfrac{1}{\sin(-\theta)}=\dfrac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$

整理得 $(-\theta)$ 的轉換公式如下：

$$\begin{array}{ll} \sin(-\theta)=-\sin\theta & \cos(-\theta)=\cos\theta \\ \tan(-\theta)=-\tan\theta & \cot(-\theta)=-\cot\theta \\ \sec(-\theta)=\sec\theta & \csc(-\theta)=-\csc\theta \end{array}$$

## 例題 9

試求下列各三角函數值

① $\sin(-30°)$　② $\sec(-420°)$　③ $\tan(-\frac{7\pi}{4})$

解：

① $\sin(-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

② $\sec(-420°)=\sec(-420°+360°)=\sec(-60°)=\sec(60°)=2$

③ $\tan(-\frac{7\pi}{4})=\tan(-\frac{7\pi}{4}+2\pi)=\tan(\frac{\pi}{4})=1$

隨堂練習 9

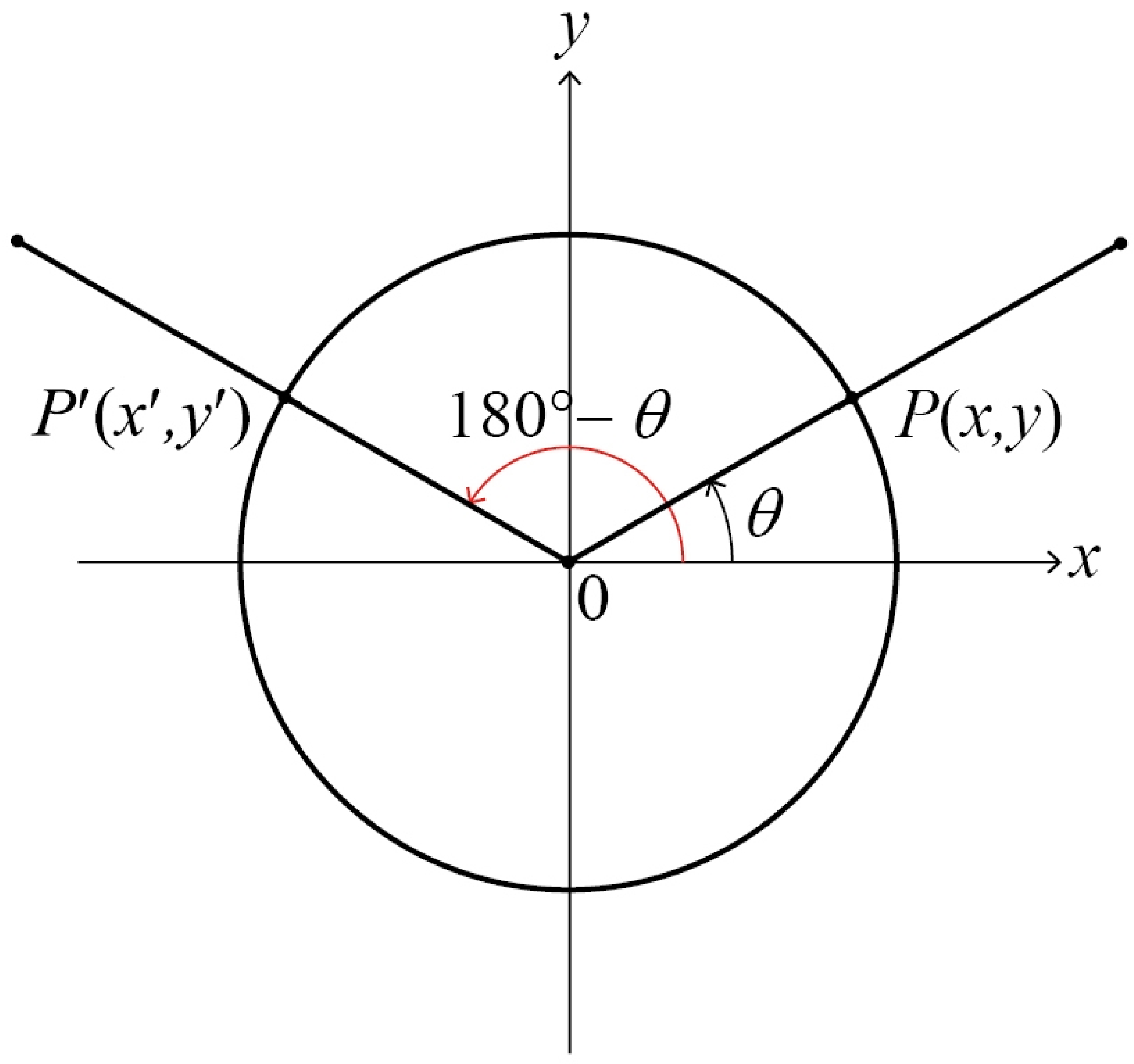
試求下列各三角函數值

① $\cot(-750°)$　② $\cos(-\frac{\pi}{4})$　③ $\csc(-90°)$

答：① $-\sqrt{3}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $-1$

〈二〉$(180°-\theta)$ 的三角函數值變換

設 $\theta$ 與 $(180°-\theta)$ 兩個角的終邊，分別與單位圓交於 $P(x,y)$ 及 $P'(x',y')$ 兩點如圖 10 所示




〈圖 10〉

因為點 $P$ 與點 $P'$ 對稱於 $y$ 軸，所以 $x'=-x$ ， $y'=y$

則 $\sin(180°-\theta)=\dfrac{y}{1}=y=\sin\theta$

$\cos(180°-\theta)=\dfrac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$

$\tan(180°-\theta)=\dfrac{y}{-x}=-\tan\theta$

$\cot(180°-\theta)=\dfrac{1}{\tan(180°-\theta)}=\dfrac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta$

$\sec(180°-\theta)=\dfrac{1}{\cos(180°-\theta)}=\dfrac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$

$\csc(180°-\theta)=\dfrac{1}{\sin(180°-\theta)}=\dfrac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$

整理得 $(180°-\theta)$ 的轉換公式如下：

| | |
|---|---|
| $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$ | $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ |
| $\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$ | $\cot(180°-\theta)=-\cot\theta$ |
| $\sec(180°-\theta)=-\sec\theta$ | $\csc(180°-\theta)=\csc\theta$ |

## 例題 10

試求下列各三角函數值

① $\sin 120^\circ$　　② $\sec 480^\circ$　　③ $\tan\dfrac{11\pi}{4}$

解：

① $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

② $\sec 480^\circ = \sec(480^\circ - 360^\circ) = \sec 120^\circ = \sec(180^\circ - 60^\circ) = -\sec 60^\circ = -2$

③ $\tan(\dfrac{11\pi}{4}) = \tan(2\pi + \dfrac{3\pi}{4}) = \tan(\dfrac{3\pi}{4}) = \tan(\pi - \dfrac{\pi}{4}) = -\tan\dfrac{\pi}{4} = -1$

隨堂練習 10

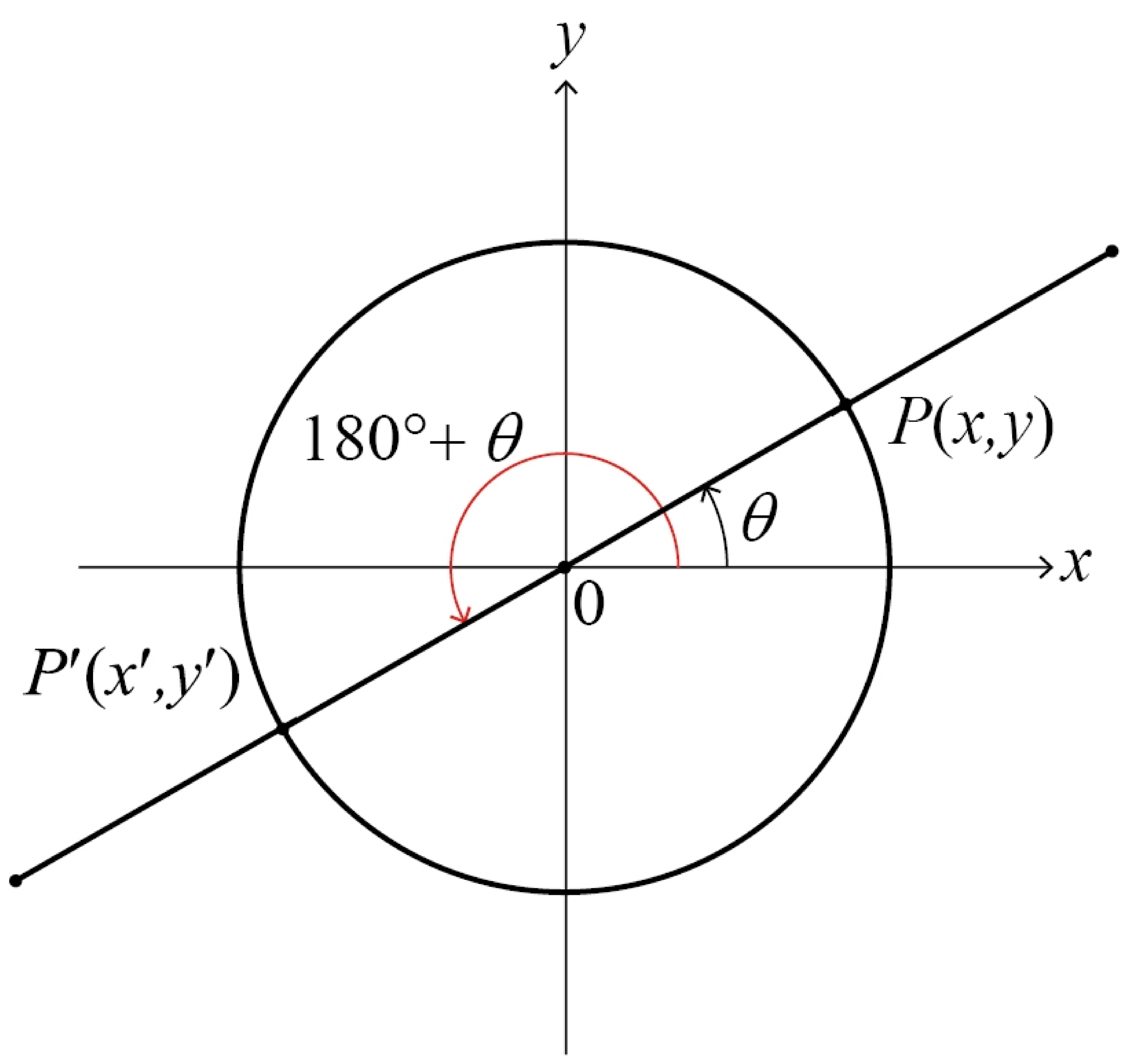
試求下列各三角函數值

① $\csc 150^\circ$　　② $\sec\dfrac{3\pi}{4}$　　③ $\cos 1230^\circ$

答：①2　　② $-\sqrt{2}$　　③ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

〈三〉$(180^\circ+\theta)$的三角函數值變換

設 $\theta$ 與 $(180^\circ+\theta)$ 兩個角的終邊，分別與單位圓交於 $P(x,y)$ 及 $P'(x',y')$ 兩點如圖 11 所示




〈圖 11〉

因為點 $P$ 與點 $P'$ 對稱於原點，所以 $x'=-x$ ， $y'=-y$

則 $\sin(180°+\theta)=\dfrac{-y}{1}=-y=-\sin\theta$

$\cos(180°+\theta)=\dfrac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$

$\tan(180°+\theta)=\dfrac{-y}{-x}=\tan\theta$

$\cot(180°+\theta)=\dfrac{1}{\tan(180°+\theta)}=\dfrac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$

$\sec(180°+\theta)=\dfrac{1}{\cos(180°+\theta)}=\dfrac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$

$\csc(180°+\theta)=\dfrac{1}{\sin(180°+\theta)}=\dfrac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$

整理得 $(180°+\theta)$ 的轉換公式如下：

| | |
|---|---|
| $\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$ | $\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$ |
| $\tan(180°+\theta)=\tan\theta$ | $\cot(180°+\theta)=\cot\theta$ |
| $\sec(180°+\theta)=-\sec\theta$ | $\csc(180°+\theta)=-\csc\theta$ |

## 例題 11

試求下列各三角函數值

① $\sin\dfrac{4\pi}{3}$　　② $\tan 585°$　　③ $\sec 210°$

解：

① $\sin\dfrac{4\pi}{3}=\sin(\pi+\dfrac{\pi}{3})=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

② $\tan 585°=\tan(360°+225°)=\tan 225°=\tan(180°+45°)=\tan 45°=1$

③ $\sec 210°=\sec(180°+30°)=-\sec 30°=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

隨堂練習 11

試求下列各三角函數值

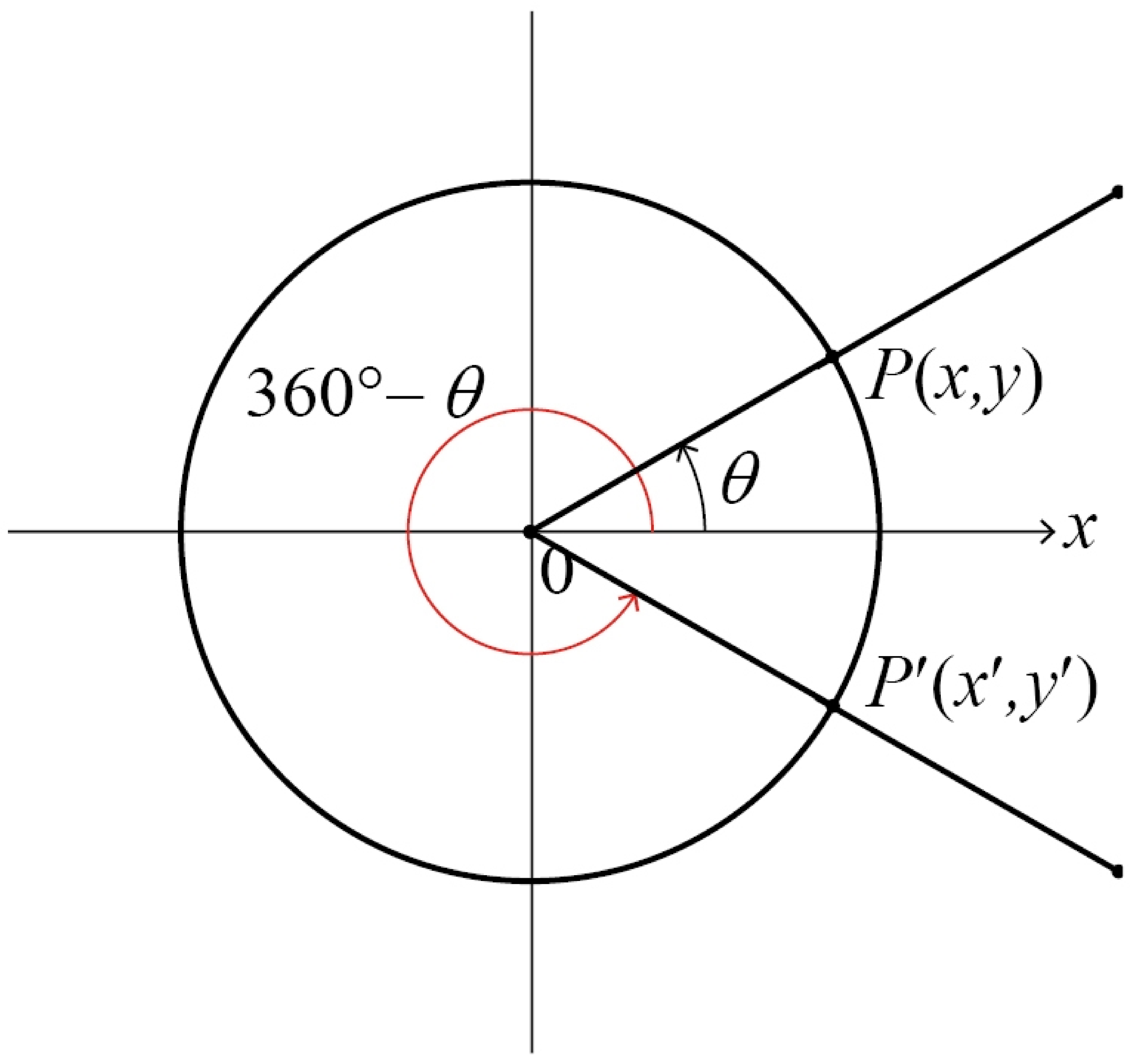
① $\csc\dfrac{7\pi}{6}$　② $\cos\dfrac{5\pi}{4}$　③ $\cot 240°$

答：①$-2$　② $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

〈四〉$(360°-\theta)$ 的三角函數值變換

$(360°-\theta)$ 與 $(-\theta)$ 為同界角的關係，具有相同的三角函數值

我們可以導出 $(360°-\theta)$ 的三角函數值變換如下




〈圖 12〉

公式如下：

$$\sin(360°-\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(360°-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(360°-\theta)=-\tan\theta \qquad \cot(360°-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(360°-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(360°-\theta)=-\csc\theta$$

## 例題 12

試求下列各三角函數值

① $\sin 330^\circ$ ② $\cos(-\frac{11\pi}{6})$ ③ $\tan(-330^\circ)$

解：

① $\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

② $\cos(-\frac{11\pi}{6}) = \cos(-\frac{11\pi}{6} + 2\pi) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\tan(-330^\circ) = \tan(-330^\circ + 360^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

隨堂練習 12

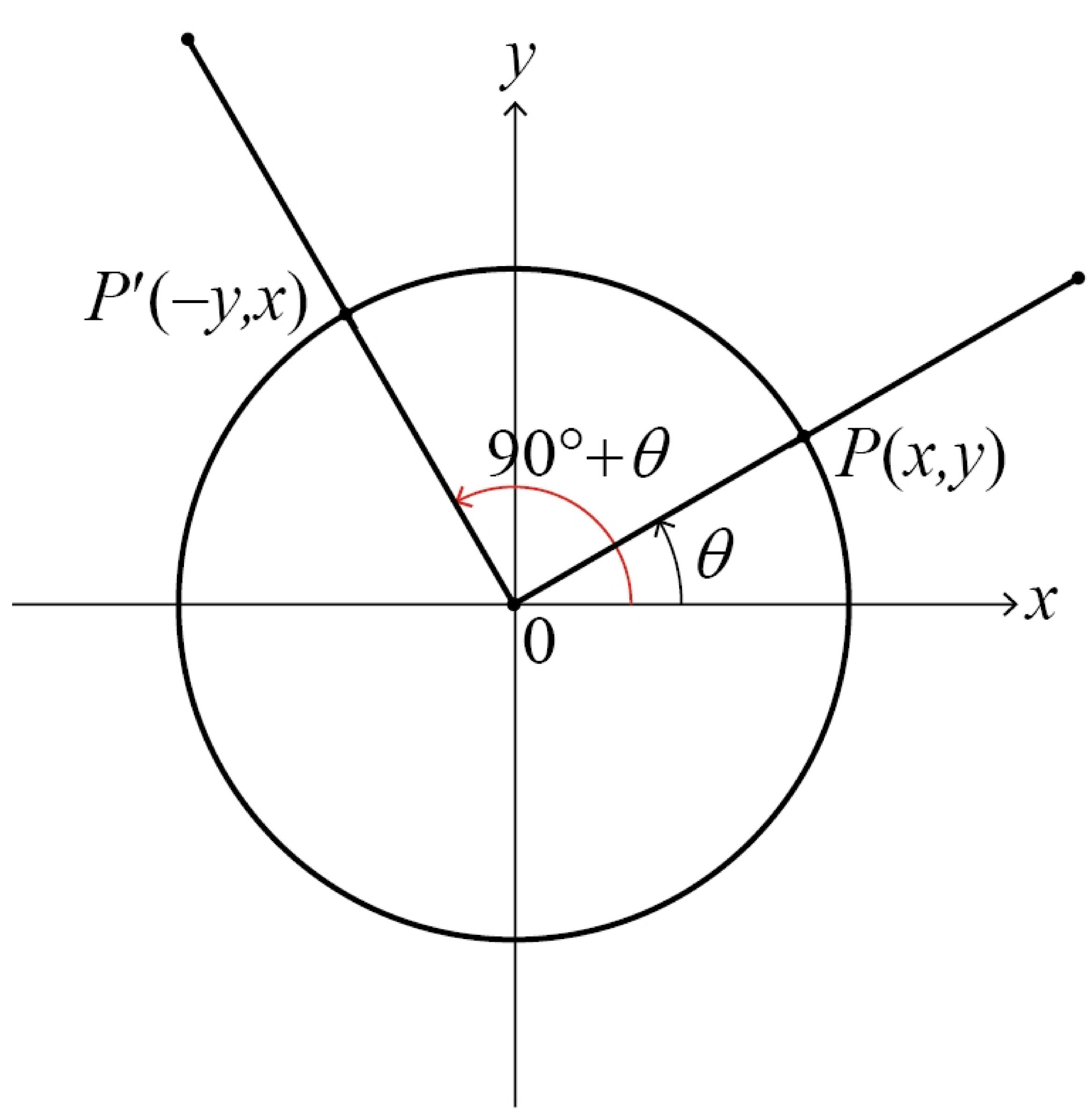
試求下列各三角函數值

① $\sec(1380^\circ)$ ② $\csc(-330^\circ)$ ③ $\cot(\frac{7\pi}{4})$

答：①2 ②2 ③−1

〈五〉$(90^\circ+\theta)$ 的三角函數值變換

因為 $90^\circ + \theta = 180^\circ - (90^\circ - \theta)$，所以利用 $(90^\circ-\theta)$ 與 $(180^\circ-\theta)$ 的三角函數轉換，可推導出 $(90^\circ+\theta)$ 的三角函數轉換如下：




〈圖 13〉

即 $\sin(90°+\theta)=\sin\left[180°-(90°-\theta)\right]=\sin(90°-\theta)=\cos\theta$

$\cos(90°+\theta)=\cos\left[180°-(90°-\theta)\right]=-\cos(90°-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(90°+\theta)=\tan\left[180°-(90°-\theta)\right]=-\tan(90°-\theta)=-\cot\theta$

$\cot(90°+\theta)=\cot\left[180°-(90°-\theta)\right]=-\cot(90°-\theta)=-\tan\theta$

$\sec(90°+\theta)=\sec\left[180°-(90°-\theta)\right]=-\sec(90°-\theta)=-\csc\theta$

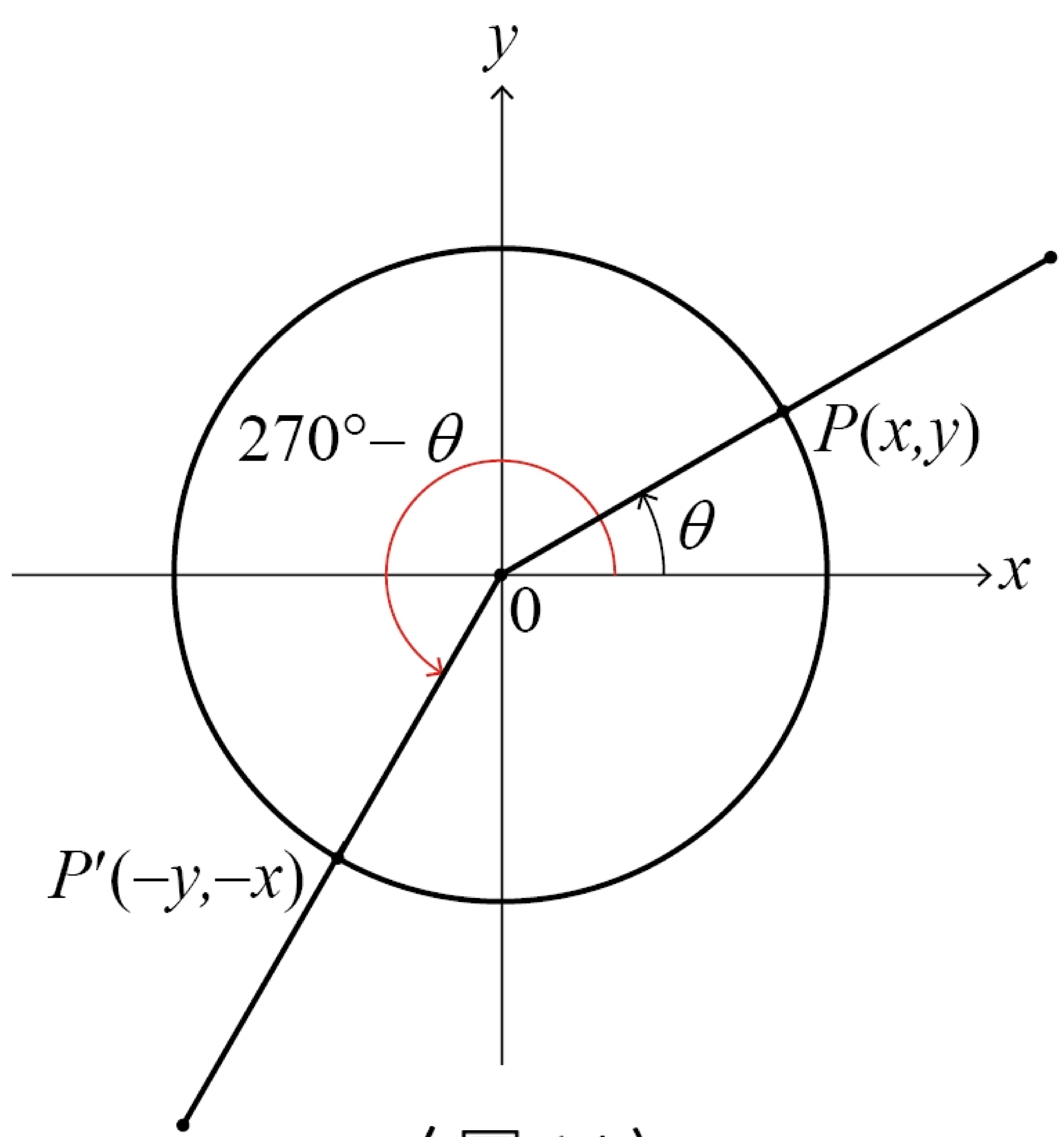
$\csc(90°+\theta)=\csc\left[180°-(90°-\theta)\right]=\csc(90°-\theta)=\sec\theta$

整理得 $(90°+\theta)$ 的轉換公式如下：

| | |
|---|---|
| $\sin(90°+\theta)=\cos\theta$ | $\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ |
| $\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$ | $\cot(90°+\theta)=-\tan\theta$ |
| $\sec(90°+\theta)=-\csc\theta$ | $\csc(90°+\theta)=\sec\theta$ |

〈六〉$(270°-\theta)$ 的三角函數值變換

利用 $(90°-\theta)$ 與 $(180°+\theta)$ 的三角函數轉換可以推導出 $(270°-\theta)$ 的三角函數轉換如下：




〈圖 14〉

即 $\sin(270°-\theta)=\sin\left[180°+(90°-\theta)\right]=-\sin(90°-\theta)=-\cos\theta$

$\cos(270°-\theta)=\cos\left[180°+(90°-\theta)\right]=-\cos(90°-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(270°-\theta)=\tan\left[180°+(90°-\theta)\right]=\tan(90°-\theta)=\cot\theta$

$\cot(270°-\theta)=\cot\left[180°+(90°-\theta)\right]=\cot(90°-\theta)=\tan\theta$

$\sec(270°-\theta)=\sec\left[180°+(90°-\theta)\right]=-\sec(90°-\theta)=-\csc\theta$

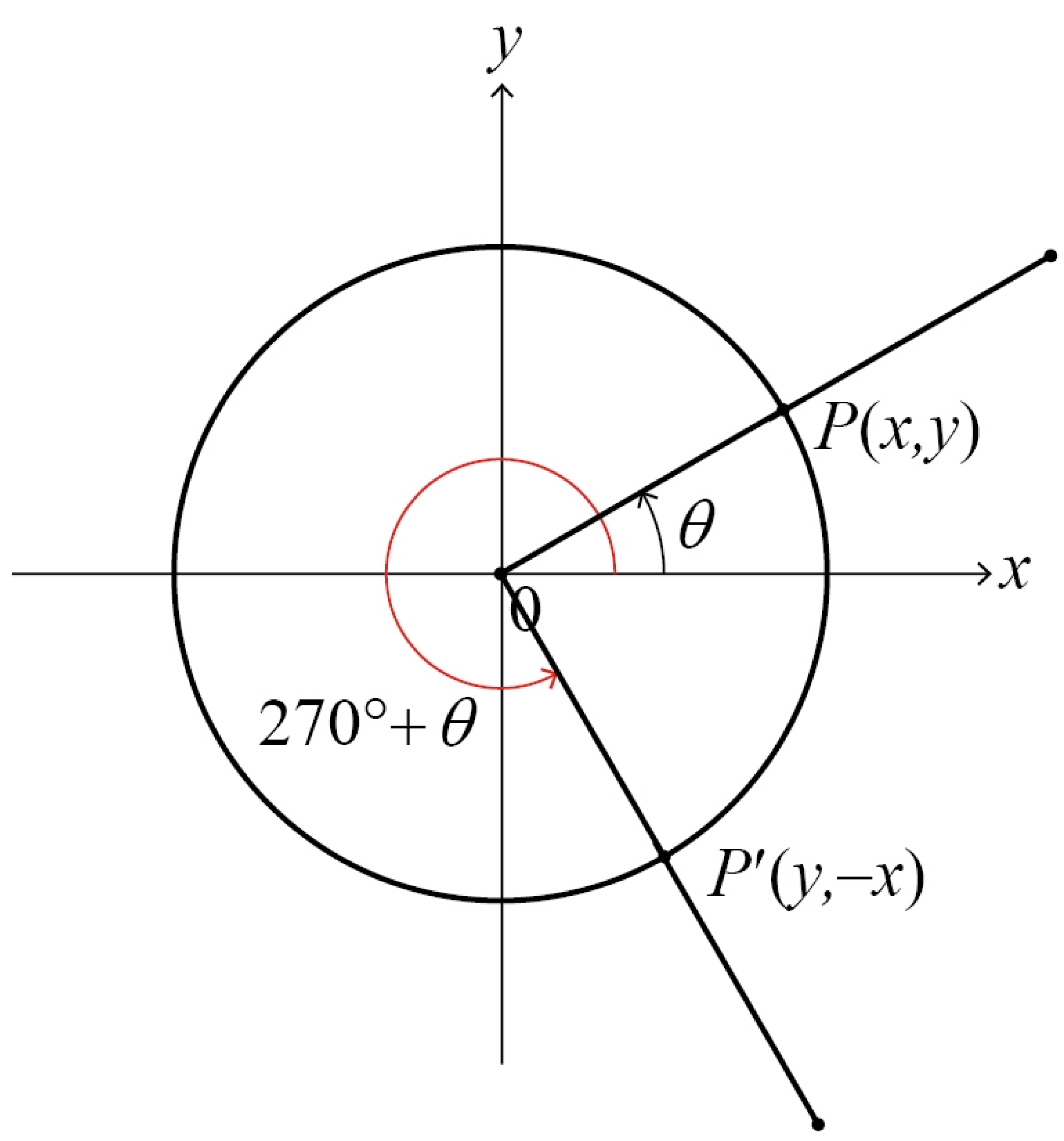
$\csc(270°-\theta)=\csc\left[180°+(90°-\theta)\right]=-\csc(90°-\theta)=-\sec\theta$

整理得 $(270°-\theta)$ 的轉換公式如下：

| | |
|---|---|
| $\sin(270°-\theta)=-\cos\theta$ | $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ |
| $\tan(270°-\theta)=\cot\theta$ | $\cot(270°-\theta)=\tan\theta$ |
| $\sec(270°-\theta)=-\csc\theta$ | $\csc(270°-\theta)=-\sec\theta$ |

〈七〉$(270°+\theta)$ 的三角函數值變換

因為 $270°+\theta=180°+(90°+\theta)$，所以我們利用 $(90°+\theta)$ 與 $(180°+\theta)$ 的三角函數轉換，推導出 $(270°+\theta)$ 的三角函數轉換如下：




〈圖 15〉

則 $\sin(270°+\theta)=\sin\left[180°+(90°+\theta)\right]=-\sin(90°+\theta)=-\cos\theta$

$\cos(270°+\theta)=\cos\left[180°+(90°+\theta)\right]=-\cos(90°+\theta)=\sin\theta$

$\tan(270°+\theta)=\tan\left[180°+(90°+\theta)\right]=\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$

$\cot(270°+\theta)=\cot\left[180°+(90°+\theta)\right]=\cot(90°+\theta)=-\tan\theta$

$\sec(270°+\theta)=\sec\left[180°+(90°+\theta)\right]=-\sec(90°+\theta)=\csc\theta$

$\csc(270°+\theta)=\csc\left[180°+(90°+\theta)\right]=\csc(90°+\theta)=-\sec\theta$

整理得 $(270°+\theta)$ 的轉換公式如下：

| | |
|---|---|
| $\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ | $\cos(270°+\theta)=\sin\theta$ |
| $\tan(270°+\theta)=-\cot\theta$ | $\cot(270°+\theta)=-\tan\theta$ |
| $\sec(270°+\theta)=\csc\theta$ | $\csc(270°+\theta)=-\sec\theta$ |

## 例題 13

試求下列各三角函數值

① $\sin 330°$　　② $\sec(-225°)$　　③ $\tan\frac{13\pi}{4}$

解：

① $\sin 330° = \sin(270° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

② $\sec(-225°) = \sec 225° = \sec(270° - 45°) = -\csc 45° = -\sqrt{2}$

③ $\tan\frac{13\pi}{4} = \tan(2\pi + \frac{5\pi}{4}) = \tan\frac{5\pi}{4} = \tan(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

**隨堂練習 13**

試求下列各三角函數值

① $\cos 210°$　　② $\cot 300°$　　③ $\csc(-\frac{11\pi}{6})$

答：① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　③ 2

## 例題 14

試求 $\sin 120° + \cos(-2010°) + \tan 315°$ 的值

解：原式 $= \sin(180° - 60°) + \cos(-2010° + 6 \times 360°) + \tan(360° - 45°)$

$= \sin 60° + \cos 150° - \tan 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(180° - 30°) - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + (-\cos 30°) - 1$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -1$

**隨堂練習 14**

試求 $\csc 315° + 2\tan(-780°) + \cos 675°$ 的值

答：$-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}$

# 1-2 三角函數的圖形

函數是兩組數字的對應關係，將有向角 ( 以弧度制的度量單位表示 ) 的值當作定義域，其所對應的三角函數值為值域，利用直角坐標平面上的點，描繪出三角函數的圖形。

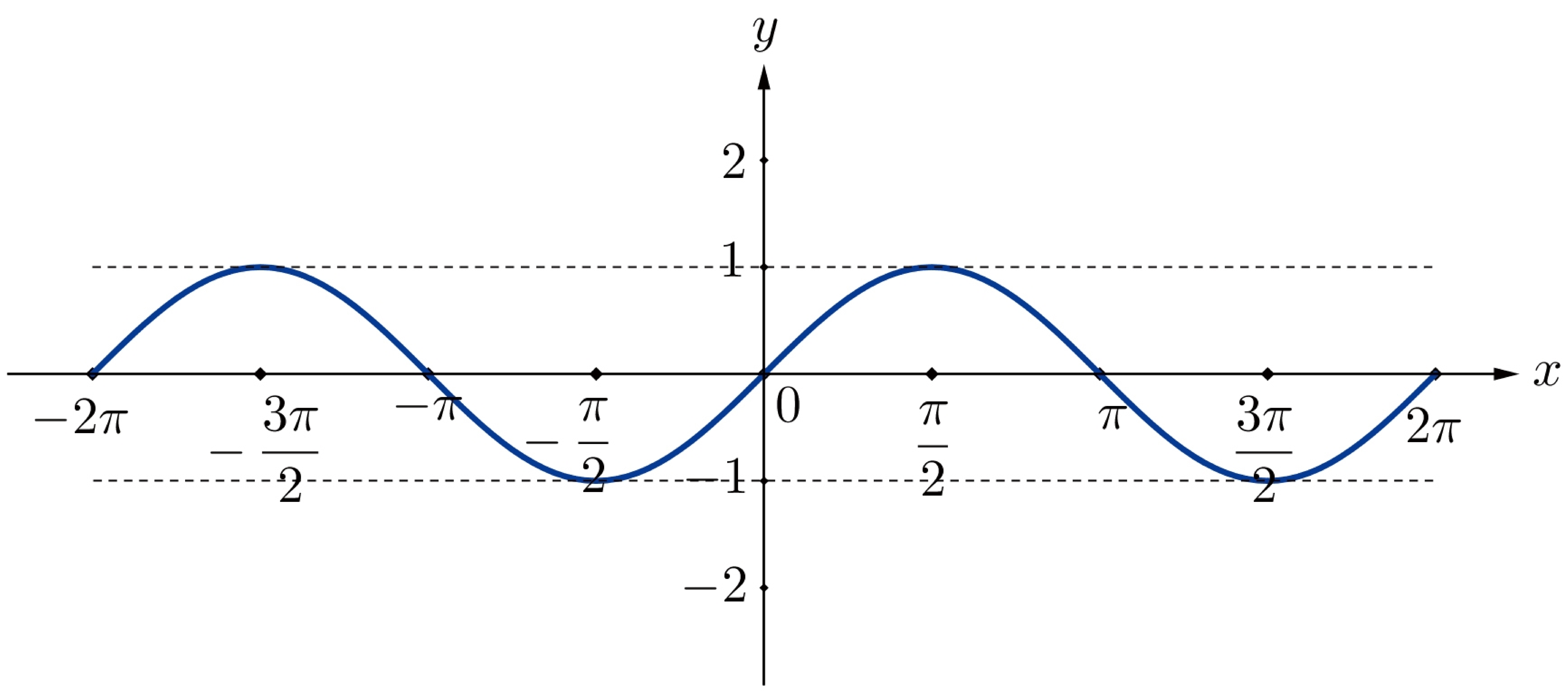
〈一〉 $y=\sin x$ 的圖形

利用 $x\in[0,2\pi]$ 特別角所對應的 $y=\sin x$ 三角函數值，如下表：

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

| $x$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\sin x$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | |

再利用 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ 性質，可描繪出 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 的圖形，如下




〈圖 16〉

由圖形可觀察出，$y=\sin x$ 的圖形具備以下的性質。

① $-1\le\sin x\le 1$ 。

② 圖形連續不間斷，且因為 $\sin(x+2\pi)=\sin x$ ，所以 $y=\sin x$ 的圖形的週期為 $2\pi$ 。

③ $y=\sin x$ 在第一、四象限，亦即當 $x$ 在 $[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$、$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$、$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ 為遞增函數，在第二、三象限，或 $x$ 在 $[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]$、$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 為遞減函數。

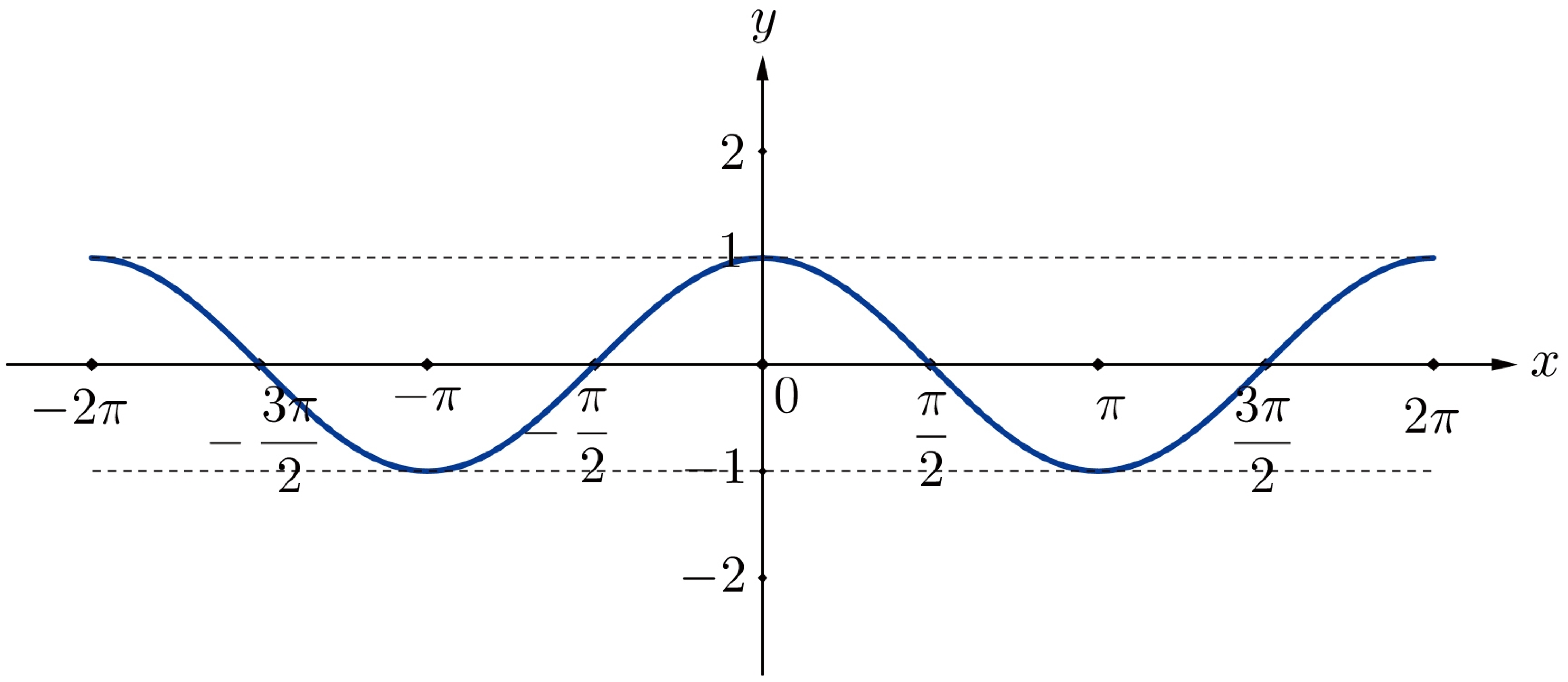
〈二〉$y=\cos x$ 的圖形

利用 $x\in[0,2\pi]$ 特別角所對應的 $y=\cos x$ 三角函數值，如下表：

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |

| $x$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\cos x$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | |

再利用 $\cos(-\theta)=\cos\theta$ 性質，可描繪出 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 的圖形，如下




〈圖 17〉

由圖形可觀察出，$y=\cos x$ 的圖形具備以下的性質。

① $-1\le\cos x\le 1$。

② 圖形連續不間斷，且因為 $\cos(x+2\pi)=\cos x$，所以 $y=\cos x$ 的週期為 $2\pi$。

③ $y=\cos x$ 在第一、二象限或 $x$ 在 $[0,\pi]$ 為遞減函數，在第三、四象限或 $x$ 在 $[\pi,2\pi]$ 為遞增函數。

★ 由上圖 16 與圖 17 可以看出 $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 的圖形相似，只要把 $y=\cos x$ 的圖形右移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，就會變成 $y=\sin x$ 的圖形；因為 $\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$。

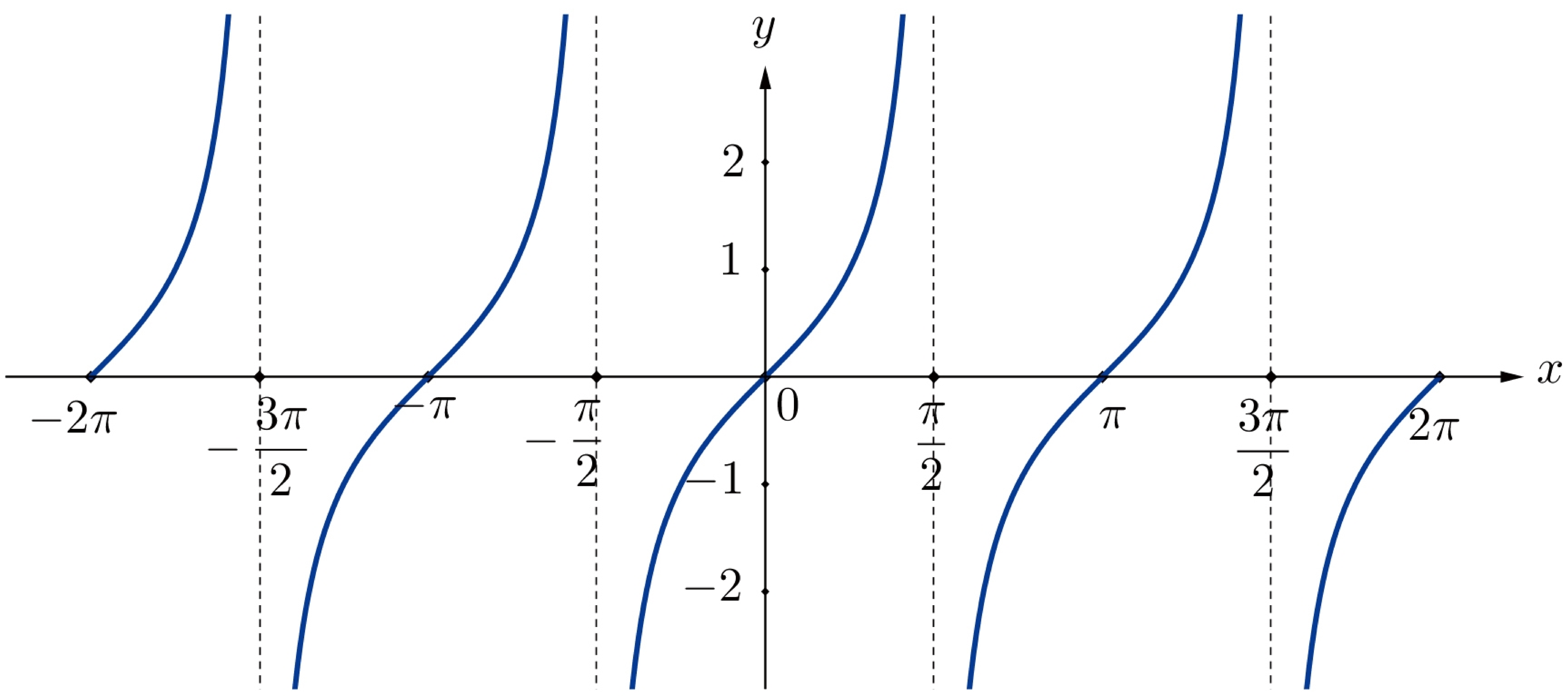
〈三〉 $y=\tan x$ 的圖形

利用 $x\in[0,2\pi]$ 特別角所對應的 $y=\tan x$ 三角函數值，如下表：

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\tan x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | 無 | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

| $x$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\tan x$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | 無 | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | |

再利用 $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ 性質，可描繪出 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 的圖形，如下




〈圖 18〉

① $\tan x$ 為實數 ( 當 $x\neq\frac{n\pi}{2}$ ，$n$ 為奇數 )。

② 圖形在 $x=\frac{n\pi}{2}$ 處不連續，週期為 $\pi$ 。

③ 鉛直線 $x=\frac{n\pi}{2}$ ，其中 $n$ 為奇數，為其漸近線。

★ 在 $y=\tan x$ 函數的圖形中可以看出， $\tan x$ 在 $x=\frac{n\pi}{2}$ 時無意義 ($n$ 為奇數 )，但是當 $x<\frac{n\pi}{2}$ 且逐漸增大接近 $\frac{n\pi}{2}$ 時， $\tan x$ 的函數值會逐漸增加而趨近於無限大 $(\infty)$；而當 $x>\frac{n\pi}{2}$ 且逐漸減小接近 $\frac{n\pi}{2}$ 時， $\tan x$ 的函數值會逐漸減少而趨近於負無限大 $(-\infty)$；所以 $\tan x$ 的圖形會逐漸接近直線 $x=\frac{n\pi}{2}$ ，但是並不相交，這種直線稱為圖形的漸近線。同樣的，在以下所討論的 $y=\cot x$ 的圖形也有類似的情況出現。

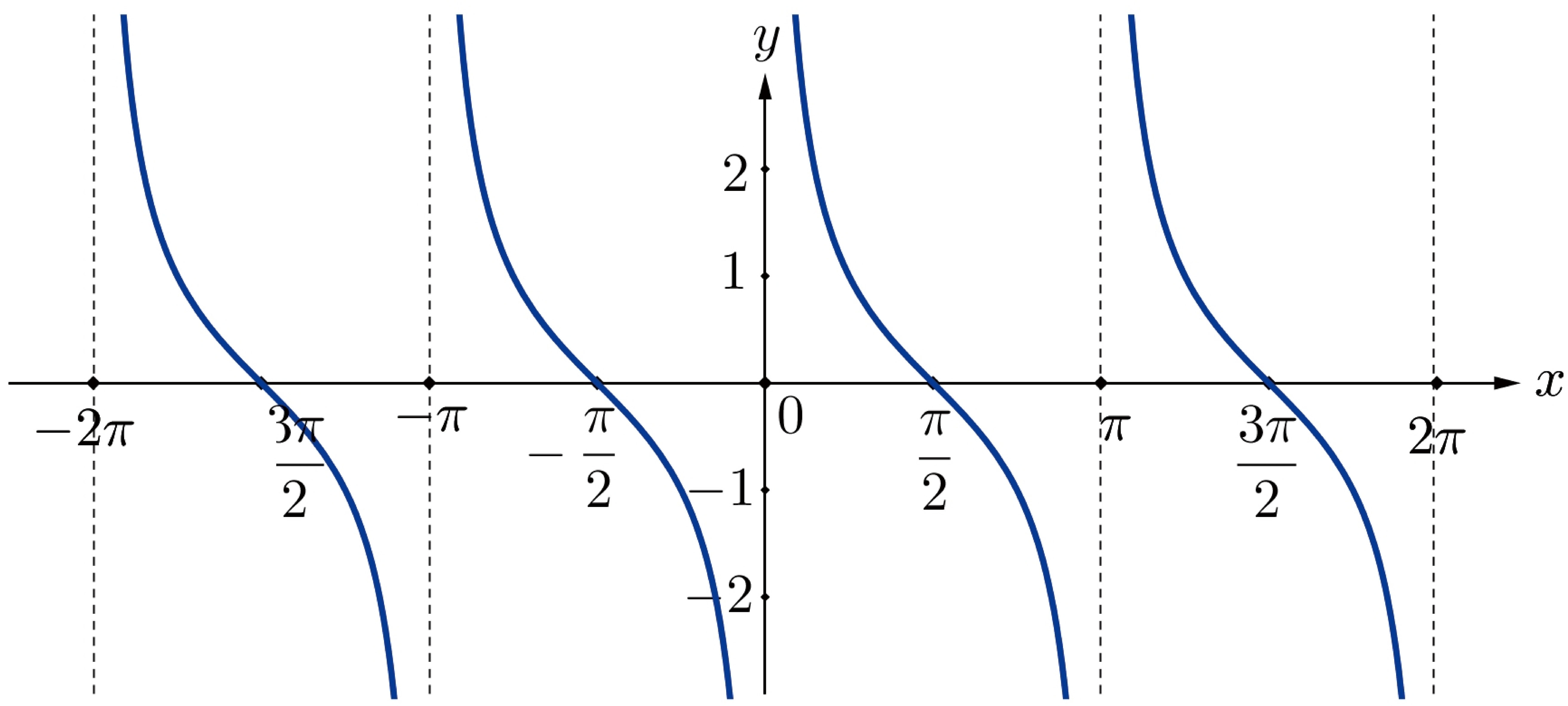
〈四〉 $y=\cot x$ 的圖形

利用 $x\in[0,2\pi]$ 特別角所對應的 $y=\cot x$ 三角函數值，如下表：

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\cot x$ | 無 | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | 無 |

| $x$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\cot x$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | 無 | |

再利用 $\cot(-\theta)=-\cot\theta$ 性質，可描繪出 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 的圖形，如下




〈圖 19〉

① $\cot x$ 為實數 ( 當 $x\neq n\pi$ ，$n$ 為整數 )。

② 圖形不連續，週期為 $\pi$ 。

③ 鉛直線 $x=n\pi$ ，其中 $n$ 為整數，為其漸近線。

★ 在 $y=\cot x$ 函數的圖形中可以看出，$\cot x$ 在 $x=n\pi$ 時無意義 ($n$ 為整數 )，但是當 $x<n\pi$ 且逐漸增大接近 $n\pi$ 時，$\cot x$ 的函數值會逐漸下降而趨近於負無限大 $(-\infty)$；而當 $x>n\pi$ 且逐漸減小接近 $n\pi$ 時，$\cot x$ 的函數值會逐漸上升而趨近於無限大 $(\infty)$；所以 $\cot x$ 的圖形會逐漸接近直線 $x=n\pi$ ，但是並不相交，這種直線稱為圖形的漸近線。

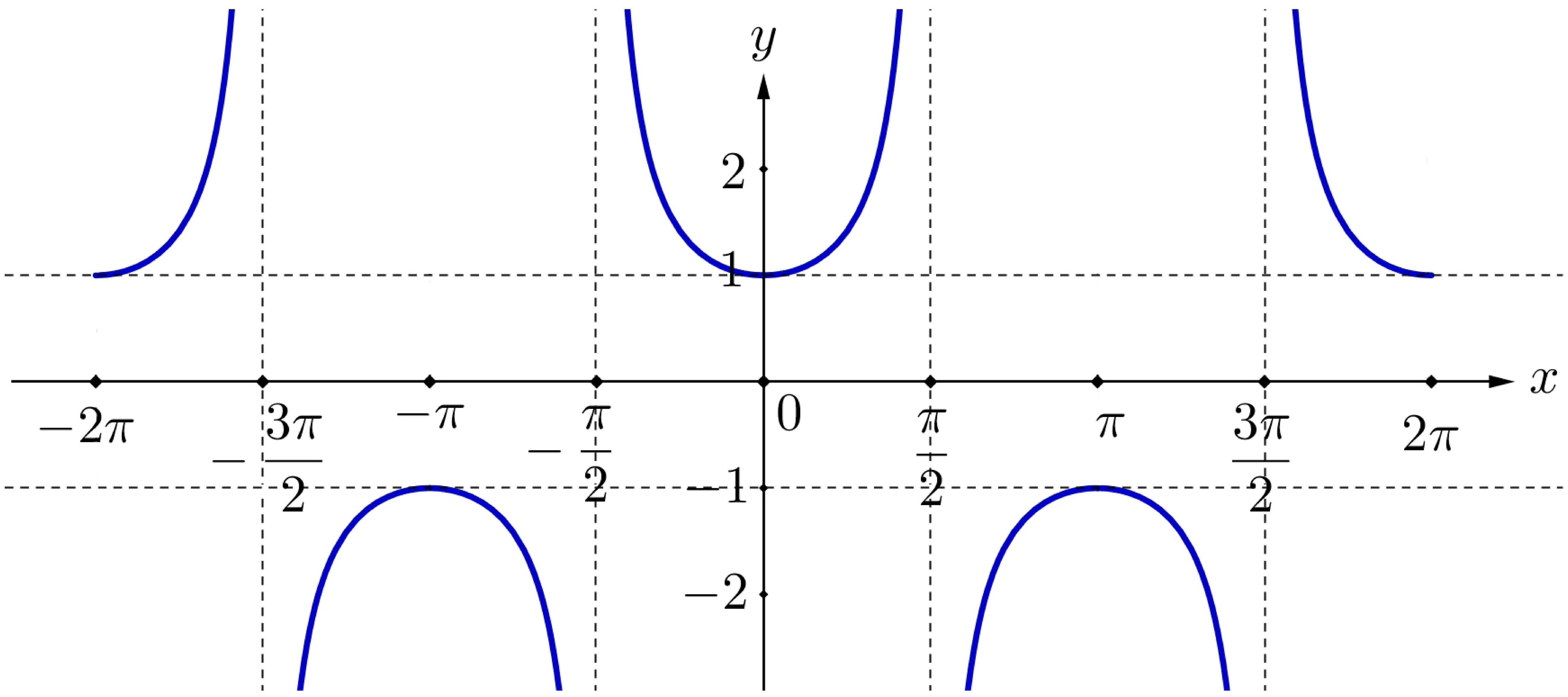
〈五〉 $y=\sec x$ 的圖形

利用 $x\in[0,2\pi]$ 特別角所對應的 $y=\sec x$ 三角函數值，如下表：

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\sec x$ | $1$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | 無 | $-2$ | $-\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ |

| $x$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\sec x$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{2}$ | $-2$ | 無 | $2$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | |

再利用 $\sec(-\theta)=\sec\theta$ 性質，可描繪出 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 的圖形，如下




〈圖 20〉

① $\sec x\le -1$ 或 $\sec x\ge 1$ 。

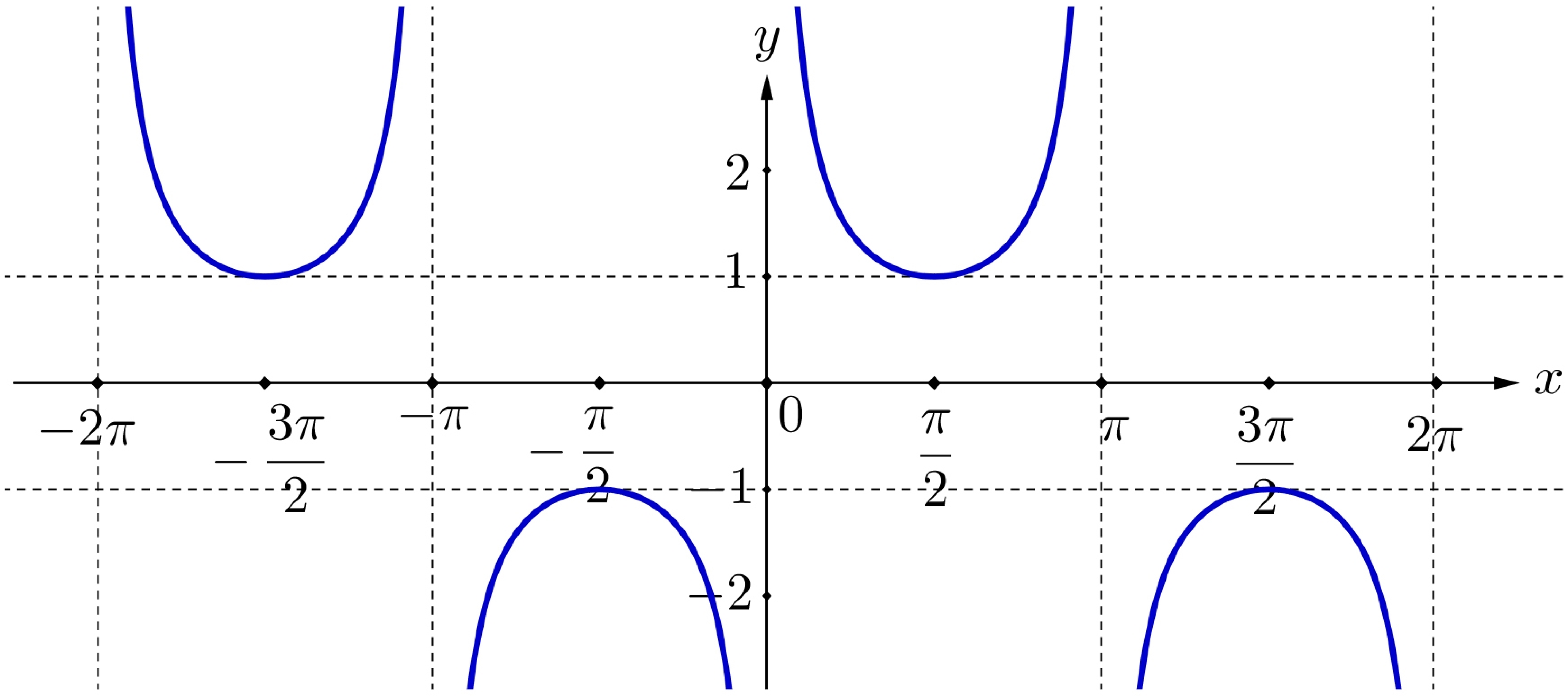
② 圖形不連續，週期為 $2\pi$ 。

〈六〉$y=\csc x$ 的圖形

利用 $x\in[0,2\pi]$ 特別角所對應的 $y=\csc x$ 三角函數值，如下表：

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\csc x$ | 無 | $2$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | 無 |

| $x$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\csc x$ | $-2$ | $-\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{2}$ | $-2$ | 無 | |




〈圖 21〉

① $\csc x\le -1$ 或 $\csc x\ge 1$。

② 圖形不連續，週期為 $2\pi$。

★ 由圖形可以觀察到

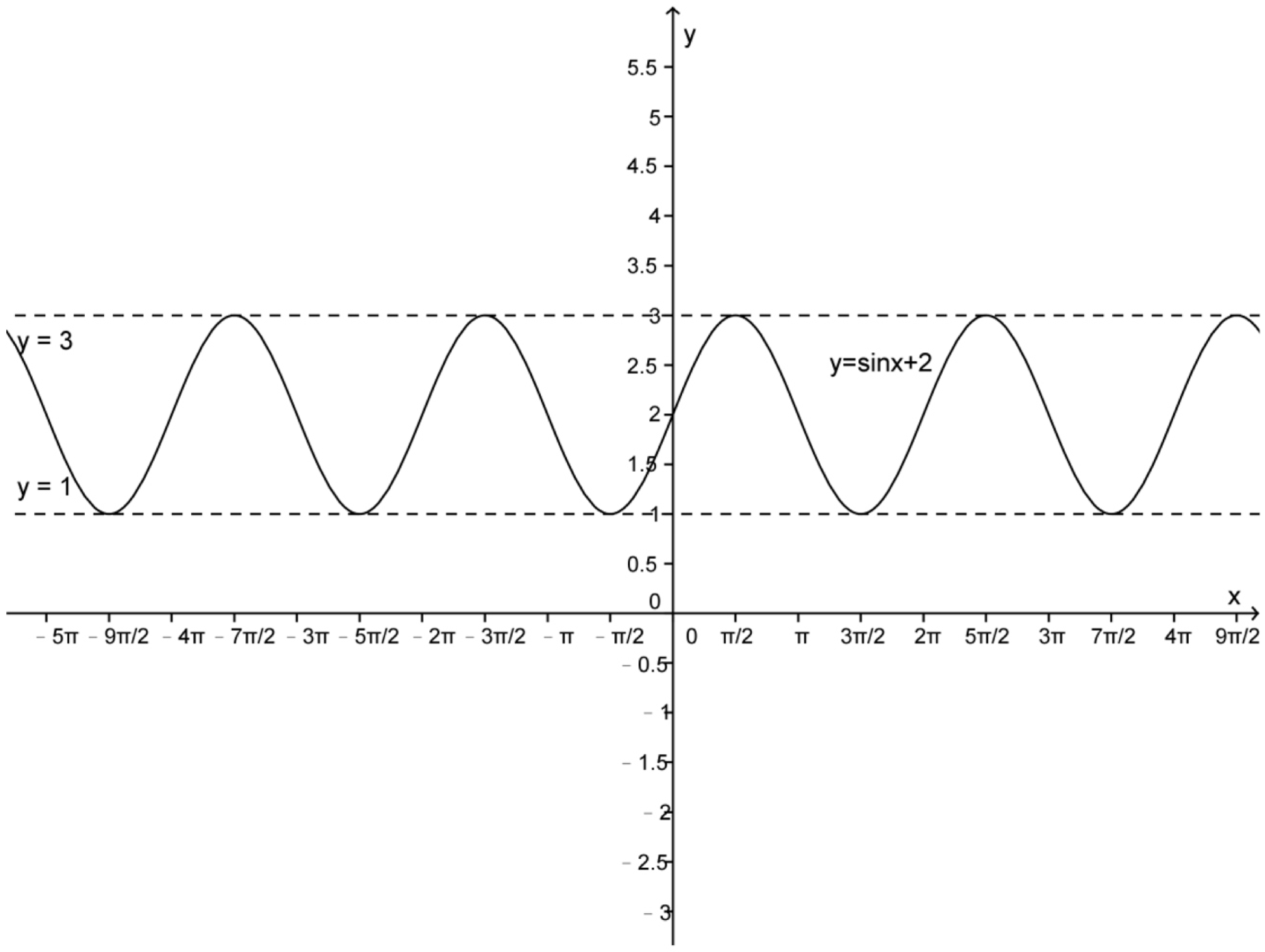
① 正函數 $\sin x$ 、 $\tan x$ 、 $\sec x$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 皆為遞增函數。

② 餘函數 $\cos x$ 、 $\cot x$ 、 $\csc x$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 皆為遞減函數。

## 例題 15

試作 $y=\sin x+2$ 的圖形

解：




隨堂練習 15

試作 $y=2\cos x$ 在 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 的圖形

答：略

## 例題 16

若 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，解方程式 $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$

解：

$(2\sin x-1)(\sin x-2)=0$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin x=2$ ( 因為 $-1\le\sin x\le 1$，所以 2 不合 )

故 $x=\dfrac{\pi}{6}$

隨堂練習 16

若 $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$，解方程式 $\cos^2 x + 3\cos x - 4 = 0$

答：$x = 0$

## 例題 17

試比較 $\sin 20°$ 、 $\sin 80°$ 、 $\cos 20°$ 的大小。

解：

$\cos 20° = \sin 70°$

因為 $\sin 80° > \sin 70° > \sin 20°$

所以 $\sin 80° > \cos 20° > \sin 20°$

隨堂練習 17

試比較 $\sin 50°$ 、 $\cos 50°$ 、$\tan 50°$ 的大小。

答：$\tan 50° > \sin 50° > \cos 50°$

編著

國立嘉義高級家事職業學校 蕭文婷 老師