

數學教材 為支持素養學習所需的 解構與重構

單維彰

國立中央大學師資培育中心與數學系

國立彰化師範大學數學系簡報

民國105年10月28日

摘要

- ◆ 「素養」作為12年國教完成後的理想狀態
- ◆ 「課綱」為此願景安排具體路徑
- ◆ 「數學領綱」重置學習內容
- ◆ 以「前導研究」八項議題為綱目

數學素養

◆ **Literacy**

知某數 · 識某文

◆ **Numeracy**

◆ **Mathematical Literacy**

數學素養——PISA 2011 版

在不同情境脈絡中，個人能辨識、做及運用數學的能力，以及藉由描述、建模、解釋與預測不同現象，來瞭解數學在世界上所扮演的角色之能力。

數學素養是連續的，即數學素養愈高的人，愈能善用數學工具做出有根據的判斷，這也正是具建設性、投入性及反思能力的公民所需具備的。

臺灣 PISA 國家研究中心 (民100)

數學素養——PISA 2013 版

個人有能力在多樣的情境中去形成、應用與詮譯數學，這包括了數學化推理與使用數學概念、程序、事實與工具來描述、解釋與預測現象。

數學素養輔助個人認知到數學在世界上扮演的角色，促成建設性、積極參與以及能反思的公民所需之周延有據的判斷與決策。

OECD (2013)

數學素養——國民素養版

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效與他人溝通觀點。

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏(2013)

數學素養的思想原則

- ◆ 數學作為一種語言（支持終身學習）
- ◆ 重視數學中的文化素材
- ◆ （對學習者）有意義的學習脈絡
- ◆ 實踐「以人為本」的核心內涵

數學作為一種語言

- ◆ 1—4年級：母語的學習

- ◆ 搭配自然語言的日常意義而學習

- ◆ 5—10年級：基礎外語的學習

- ◆ 輔以母語的第二語言學習

- ◆ 以支援終身學習（掃除文盲）為基本原則

- ◆ 11—12年級：專業外語的學習

- ◆ 滿足專業或博雅的需求，不必假扮動機與情境

- ◆ 目標清楚、鷹架完整、講究效率

數學素養的課程架構



林福來，李源順，鄭章華，單維彰(2013)

◆ 知：知道，to know 「是什麼」

◆ 行：能做，can do 「做什麼」

除了注意數學課題「是什麼」以外，還要在實用的標準之下，注意並經常反思，學習某個數學課題要用來「做什麼」？

識

關於理解和連結的後設認知、以及對數學價值的賞識態度。包括「為什麼要這樣」、「為什麼是這樣」等問題的理解。「識」很難被翻譯成英文；除了對應基本的 to understand 以外還有 make sense of（使產生意義）、be aware of（意識到）和 have an insight into（洞察）的意思。

數學課程為導向素養的解構與重構

審視多年以來「凝為塊狀」的數學課程，按照素養的精神以及數學學習的邏輯，予以拆解，然後以學生為本——而不是以數學為本——重新建立學習脈絡。

國家教育研究院

「十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究」

整合型研究

子計畫三（民國102年12月）

十二年國民基本教育數學領域

綱要內容之前導研究

研究主持人：林福來教授（國立臺灣師範大學）

共同主持人：單維彰教授（國立中央大學）

李源順教授（臺北市立大學）

鄭章華助理研究員（國家教育研究院）

十二年國民基本教育課程綱要

國民中小學暨普通型高級中等學校

數學領域

(草案)

中華民國105年2月

素養導向數學教材 / 曾世杰 主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

素養導向國民中學數學教材：指數律

主編者：鄭章華

作者：曾明德、鄧家駿

(依姓氏筆畫順序排列)

發行人：柯華葳

出版者：國家教育研究院

編審者：十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組

召集人：曾世杰

副召集人：單維彰、鄭章華

編輯小組：古欣怡、朱安強、林美曲、林信安、馬雅筠、陳吳煜

陳淑娟、曾明德、曾俊雄、鄧家駿

(依姓氏筆畫順序排列)

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用

一

不確定性與數據處理

五個階段皆有學習表現

d-I-1

認識分類的模式，能主動蒐集資料、分類、並做簡單的呈現與說明。

d-II-1

報讀與製作一維表格、二維表格；報讀長條圖與折線圖，並據以做簡單推論。

d-III-2

能從資料或圖表的資料數據，解決關於「可能性」的簡單問題。

d-IV-2

理解機率的意義，能以機率表示不確定性和以樹狀圖分析所有的可能性，並能應用機率到簡單的日常生活情境解決問題

d-V-3

理解事件的不確定性，並能以機率將之量化。理解機率的性質並能操作其運算，能用以溝通和推論。

每個年級皆有學習內容

- ◆ 1、2年級：分類與計數
- ◆ 3年級：列聯表（新）
- ◆ 4—10年級：各種呈現數據的圖表
- ◆ 6年級開始探討「可能性」
- ◆ 7年級引進計算機作為處理數據的工具
- ◆ 8年級認識相對與累積次數作為客觀機率的基礎
- ◆ 9年級認識古典機率以及描述數據分布的基本統計量
- ◆ 10年級複合事件與一維、二維的數據分析（百分位數）
- ◆ 11年級條件機率
- ◆ 12年級（選修）（離散型）隨機變數的分布

二

數的四則運算

有效位數與運算的概念性理解

- ◆ 全數加法最多為三位加三位
減法最多為三位減三位
乘除最多為二位乘以二位和三位乘以一位
除法為四位除以二位
- ◆ 「億以內的數」規範大數的計算應如
「 1600×200 」與「 $60000 \div 400$ 」之形式
(也就是「有效位數」限於三位或二位以內的原則)
- ◆ 從7年級起正式引進計算機(器)
輔助計算為次，輔助學習為要

絕對值與科學記號數字

- ◆ 國中階段：僅為「記號」：
概念理解與溝通表達
- ◆ 高中必修：代數性質與基本運算
- ◆ 高中選修：本身與合成函數的圖形
- ◆ 計算機：具體呈現科學記號
- ◆ 常用對數：自然連結科學記號
(任一正數都是10的次方)

國中實驗作品：指數律



三

直角三角比與比例式

國中階段最劇烈的改變

- ◆ 特別強調「三角比」而非「三角函數」
- ◆ 延伸相似三角形的對應邊比值為常數的概念
- ◆ 在紙上畫相似的三角形即可解決問題
- ◆ 但是，計算機「背誦」了這些特殊的比值

國家教育研究院

「十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯計畫」

- ◆ 曾明德、鄧家駿《素養導向國民中學數學教材：直角三角比》
- ◆ 高中：斜率與TAN，極坐標到鈍角三角比

國中實驗作品：三角比



比、比例式、三連比

- ◆ 六年級引進比與比值，做算術層次的推論
- ◆ 七年級寫出比例式，做代數層次操作
 - 刪除繁分數的問題
 - 可解遞移比例，不做三連比概念
- ◆ 八年級藉直角三角形的三邊關係，引進三連比符號以及具體的擴約操作
- ◆ 九年級正式學習三連比以及三角比

四 論證

專注在小學階段

- ◆ 在「平面幾何」之外
- ◆ 以「推理」代論證
 - 四邊形內角和為360度
 - 三角形不可能有兩鈍角
- ◆ 倚賴教師之專業能力做正確而適當的拿捏

中學以上

- ◆ 要求「觀察」、「臆測」與「親手做」
- ◆ 參考教具
- ◆ 先「觀察」發現規律性，然後數學方法
 - 遞迴關係
 - 數學歸納
 - 二維數據的相關係數
- ◆ 還有很大的增強空間

五 空間概念

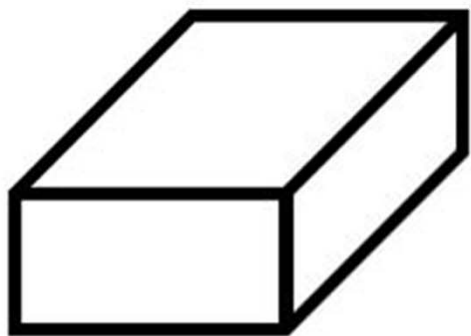
國中與國小重複，與高中斷裂

- ◆ 5—10 年級的漸進發展
- ◆ 5 年級使用實體工具測量生活環境裡的互相垂直的面，推論和觀察互相平行的面，在長方體上認識線與面的垂直與平行關係
- ◆ 古欣怡、林美曲《素養導向國民小學數學教材：正方體與長方體》
- ◆ 9 年級在長方體上理解兩面的垂直與平行關係，認識兩邊之間的垂直、平行和歪斜關係，並能辨識與理解線與面的垂直關係

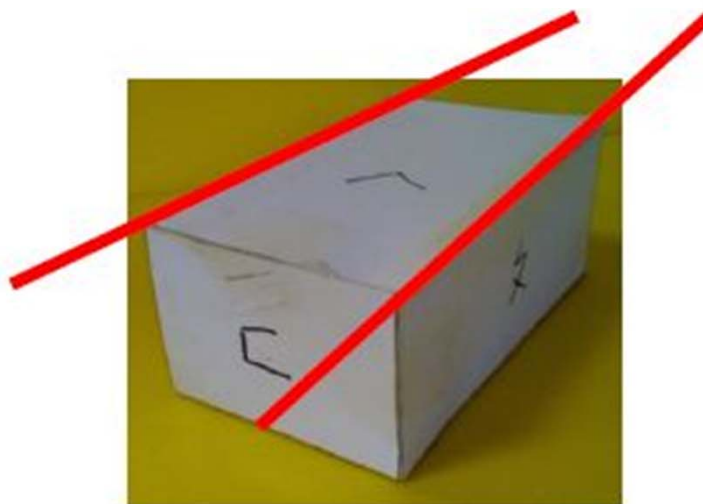
支援3D軟體所需的基礎

- ◆ 透視圖，直覺與美術
- ◆ 示意圖，圖像符號之慣例
- ◆ 視圖，工程的溝通工具
- ◆ 正方體積木堆疊的三視圖
- ◆ 長方體、球、圓柱的截面
- ◆ 旋轉體，薄片的堆積

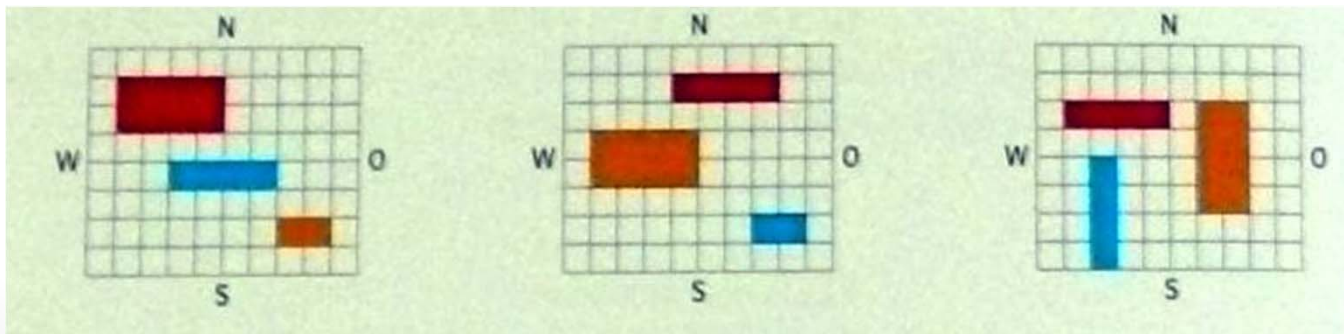
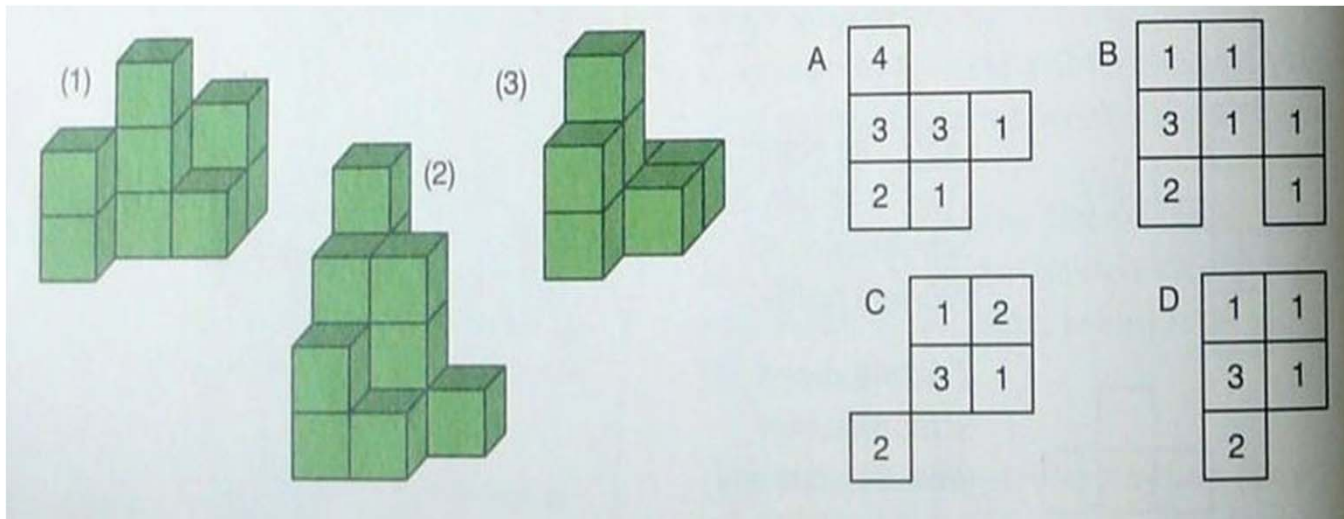
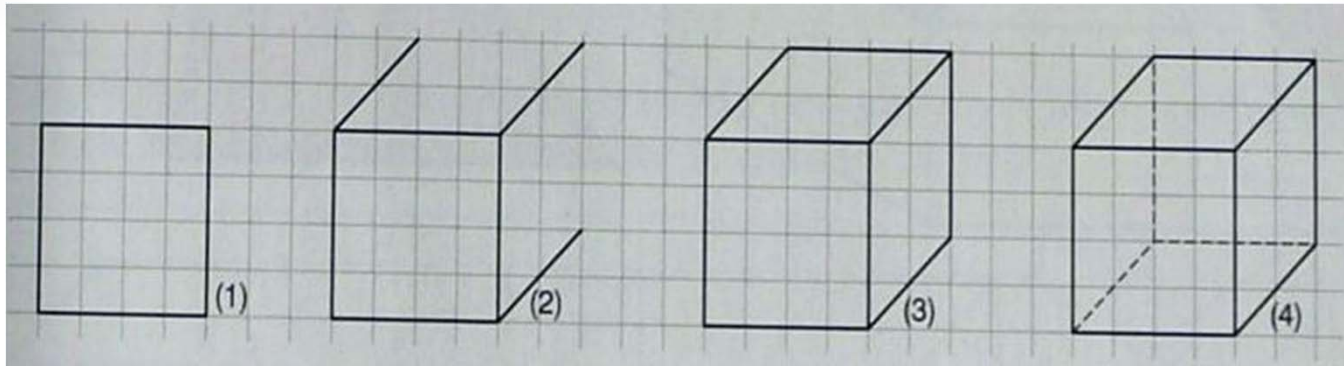
國小實驗作品：正方體與長方體



圖一：長方體示意圖



圖二：長方體紙盒照片



六

高中的技術性課題

不在主要脈絡上的特殊技術

- ◆ 線性規劃：必修→數乙
- ◆ 代數基本定理與勘根定理：必修→選修
- ◆ 轉移矩陣：11A（限二階）
- ◆ 空間向量的外積：11A
- ◆ 信賴區間：刪除（連續型隨機變數）
- ◆ 拉格朗日插值多項式：刪除
- ◆ 有理根檢定：刪除

七 線性代數

從位移向量轉向位置向量

- ◆ 轉移向量教學的目標
 - 不當作解決平面幾何問題的利器
- ◆ 支持空間向量的學習
- ◆ 線性組合：矩陣乘法與線性代數的基本概念
- ◆ 向量成為將一點「傳送」到另一點的「交通工具」
- ◆ 線性代數成為計算機科學、統計學、圖學的共同基礎，「數據分析」的最基本工具

八

多項式微積分

多項式教學方向的轉移

- ◆ 從代數「式的運算」轉向函數「變化關係」
- ◆ 聚焦在函數圖形的大域與局部特徵
- ◆ 從二次提升到三次函數
- ◆ 「社會組」概念的轉變
- ◆ 「數學乙」含微積分基礎課程

素養與否，課程未逮

在於是否在「知道」與「能做」之外，還能帶領學生「識」。而識的媒介與深度，仍然以實用為依歸，同時要在學生可知與能做的範圍裡面進行，倘若脫離了實用原則，變成為數學的學術內容而學習，就不再符合素養的期待了。

唯有教師，才能「導向素養」

◆ 講「人話」

例：兩邊之「差」

◆ 緊扣「常識」

例：負即相反，負負便是相反再相反

◆ 抓住「需求」

不僅依據學術內容而教學，學過就要經常用

◆ 給學生「親手做」的機會

（未必等他自己發現）

請指教