

2023年台灣數學教育學會年會
第十五屆科技與數學教育國際學術研討會

民族觀點下的 數學課程與學習

單維彰

國立中央大學數學系
師資培育中心、文學院學士班
民國 112 年 4 月 29 日

Ubiratan D'Ambrosio (1985)

Ethnomathematics

and its place in the **H**istory
and **P**edagogy of **M**aths.

For the Learning of Maths

5(1), 44-48.

民族數學 as HPM

◆ 教材教法層次

- 資源豐富
- 教師在課堂內實踐

◆ 課程規畫層次

- 本文提議

基本假設

◆ 數學成就是個人的

- 若有機會進入次文化，終能習得
- 沒有民族差異

◆ 數學教育是社會的

- 受文化影響，有民族差異
- 學習進路的暢窒緩急

華人善算

但似有保鮮期

單維彰·民族觀點數學課程 2023/04/29

[5]

華語特別適算

- ◆ 語言對應數值
 - 語音如數碼
 - 語言本身就是十進位
- ◆ 也很適合記憶
 - 九九表
 - 圓周率 vs The ratio of ...
 - N 邊形 vs quad-/penta-/hexa-...

單維彰·民族觀點數學課程 2023/04/29

[6]

中文	日文	韓文 (古代*)	韓文 (漢化*)	英文	法文	西文	德文
零	れい/ゼロ	×	영/공	zero	zéro	cero	null
一	いち	하나	일	one	un*	uno*	eins*
二	に	둘	이	two	deux	dos	zwei
三	さん	셋	삼	three	trois	tres	drei
四	よん/し	넷	사	four	quatre	cuatro	vier
五	ご	다섯	오	five	cinq	cinco	fünf
六	ろく	여섯	육	six	six	seis	sechs
七	なな/しち	일곱	칠	seven	sept	siete	sieben
八	はち	여덟	팔	eight	huit	ocho	acht
九	きゅう/く	아홉	구	nine	neuf	nueve	neun
十	じゅう	열	십	ten	dix	diez	zehn

陳文暉 (2014) 數詞語言學小論。

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

7

西方數詞

- ◆ 英德 11 12、西 15、法 16
- ◆ 英語 13-19 vs 21-99
- ◆ 西語 21-29 vs 31-99
- ◆ 法語 70 80 90 無字











60+10 4.20 4.20+10

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

8

DIFFERENZE LINGUISTICHE

97

  $90 + 7$
  $7 + 90$
  $9 \times 10 + 7$
  $4 \times 20 + 10 + 7$
  $7 + (-\frac{1}{2} + 5) \times 20$

97

丹麥語
Halvfemsindstye

fem 是五
sind 是無
tyve 是廿

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[9]

華語數詞就是教具

- ◆ 華人兒童可能不太需要十進教具
- ◆ 花片與百數板
 - 有充分的證據
 - 有沒有必要的證據？

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[10]

數字分節

小事卻可能大影響

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

11

華語四位一節

- ◆ 234,7000 vs 23,470,000
- ◆ 新加坡華語
 - 二十三百萬
 - 四百七十千
- ◆ 無礙會計金融專業

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

12

九章啟示錄

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

{ 13 }

1500 年文明所需

- ◆ 解題導向、Realistic
 - 題—解—練
- ◆ 「理解」的文化意義
 - 引導至主流數學文化的歷程
 - 從民族稟氣出發？

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

{ 14 }

「無」的啟示

- ◆ 沒有球體積（誤）
- ◆ 不量角
- ◆ 追求公式而沒想到列表

與後進相較

- ◆ 新算法
- ◆ 情境分類
 - 真實、虛構、純數學
- ◆ 純數學有必要但
不宜久留

「我不喜歡數學！」嘉大楊德清談臺灣中小學數學課本發生了什麼事？

教育

分享文章：[f](#) [t](#) [g](#) [m](#)

人文島嶼 2022-10-16 11:04



臺灣的數學教科書，教育部雖然提倡「數學融入生活」，教科書編製仍常流於「為情境而情境」，就算納入生活情境，往往也只是點綴、包裝，難以讓學生真的感受到學習數學的樂趣、重要性。

Fictitious Situation

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

17

方田與商功

算法幾何 VS 推理幾何

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

18

《九章》1：方田

◆ 面積公式

- 基本是為土地丈量
- 圓面積 = 半徑與半周之積
- 真正關鍵的是圓周率

十進小數誕生

〔祖沖之以丈為徑，〕圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。

《隋書律曆志》



臺灣土地丈單

光緒十五年
 貳甲肆分
 陸厘肆毫
 玖絲

單維彰·民族觀點數學課程 2023/04/29

[21]

《九章》5：商功

- ◆ 體積公式、空間概念

方田與商功

- ◆ 基本形體的學習
- ◆ 寓幾何於計算

單維彰·民族觀點數學課程 2023/04/29

[22]

善用勾股

- ◆ 《九章》：9
- ◆ 「長方形」剖半
 - 有利於相似形的概念建立
 - 內角和顯而易見
- ◆ 實用工具（三角板）
- ◆ 未來學習的主要需求

衰分

不均的分配

《九章》3：衰分

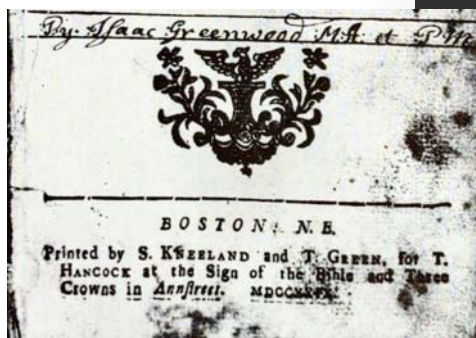
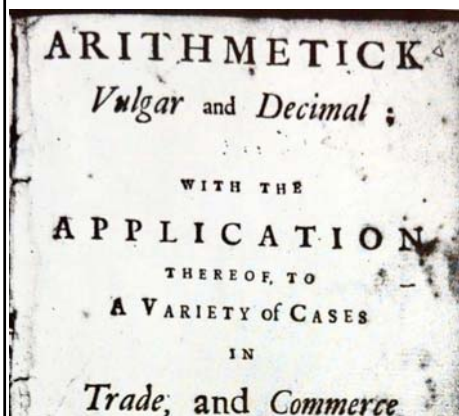
- ◆ 按比例分配
 - 包括正比與反比
 - 多達五項比
- ◆ 分數四則運算的必要
 - 可得真解，如何執行？

$$8\frac{104}{137} \text{ 錢}$$

不盡除的處置

- ◆ 讓它剩下
 - $22 \div 7 = 3 \dots 1$ 並非等式
 - 什麼時候適合教等式？
- ◆ 記錄零頭：fractions
 - 18 世紀：vulgar / decimal fractions
 - 20 世紀美國：common fractions
 - 1980 後：fractions / decimals

十進小數 vs 日常分數



小數是「標準規格化」的分數。

(27)

分數與小數

- ◆ 本是同根生
 - 小數是特殊分數
 - $\frac{1}{3} + 0.3$ 該做小數還是分數運算？
- ◆ 小數都是帶分數
分數也該如此
(假分數僅用於計算步驟)

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

(28)

分數小數誰實用？

◆ 由工具決定

- 英吋刻度尺： $2\frac{3}{8}$ 吋比 2.375 方便
- 台斤槓桿秤： $1\frac{5}{16}$ 斤比 1.3125 方便
- 若有對應的十進貨幣：

$$8\frac{104}{137} \text{ 錢} \approx 8 \text{ 錢 } 7 \text{ 分 } 5 \text{ 厘 } 9 \text{ 毫 } 1 \text{ 絲 } 2 \text{ 忽} \dots$$

(若 1 錢 = 10000 元...)

晚清臺灣 房屋稅

同治二年
壹錢參分肆厘
零毫捌絲貳忽



法國創造公制

- ◆ 就是希望以十進制
「標準化」度量衡
- ◆ 英國偏不要，純屬意氣
- ◆ 不宜有...

$\frac{6}{7}$ 公里 $\frac{11}{4}$ 公斤 $\frac{5}{21}$ 公升

方程

方形排列的計算程序

《九章》8：方程

- ◆ 二／三元一次聯立式
- ◆ 分離係數
 - 工具使然：籌算，無處寫未知數
 - 本質是「增廣矩陣」
 - 加減消去→高斯消去法

單維彰·民族觀點數學課程 2023/04/29

[33]

《九章》8：方程

- ◆ 負數誕生
 - 式中有減，分離成負
 - 紅籌為正黑籌為負，或邪正為異
 - 但只求正解（直到牛頓仍是）

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 3 & -2 & 15 \end{pmatrix}$$

單維彰·民族觀點數學課程 2023/04/29

[34]

負數之用

- ◆ 生活、科學、社會
很少「真的」需要負數
- ◆ 純數學所需（完整性）
- ◆ 有助於程式設計

單維彰·民族觀點數學課程 2023/04/29

〔 35 〕

方程後話

- ◆ 線性代數、Tensor 計算
 - 向量觀念，寫成直式
 - 矩陣：分離係數之二維表格
 - 高中階段：線性組合

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases} \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

單維彰·民族觀點數學課程 2023/04/29

〔 36 〕

弧田未竟

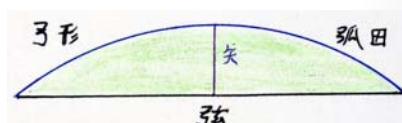
弧弦互算的追尋

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[37]

華人不量角

- ◆ 由弦矢求弓形面積
 - 劉徽發現有誤，但亦不能改
 - 等價於弦矢求弧
- ◆ 真正關鍵是弧弦互算
 - 也就是「三角比」



單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[38]

中國始終不曾量角

◆ 有「三角形」：圭田

- 關心它的面積（半底乘以高）
- 秦九韶：三斜求積術（海龍公式）

◆ 能測量：只用勾股

- 從直角三角形的相似獲得比例式
- 不曾想過勾股之比值（ \tan ）

《九章》9：勾股

◆ 兩邊可測

- 由畢氏定理知第三邊

◆ 一邊可測

- 由相似觀念知另兩邊

◆ 高遠皆不可測（直接測量）

- 重差術（兩個共邊的勾股及兩勾差）
- 劉徽續《九章》10：〈海島算經〉

沒有「角」...

◆ 不能發現

角 \leftrightarrow 勾股比

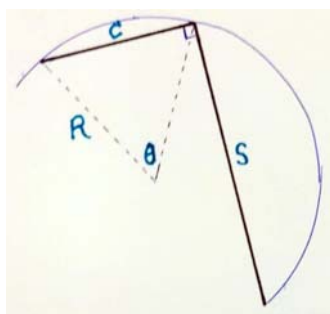
後來的「三角比」

◆ 弧弦不能互算

● 1300年後傷及天象曆算

弦 = $R \text{crd} \theta$ θ = 弧所對的圓心角

弧與弦的對應觀念



θ : 圓心角

所對弦長 $c = \text{crd} \theta$

輔助(補)弦 s

倍角、和差需輔助弦

但三倍角不必：

$$\text{crd}(3\theta) = 3\text{crd}\theta - \text{crd}^3\theta$$

$\text{crd } \theta$

其實沒有公式

(直到牛頓與關孝和)

西方數學也重實用

Arcus		Chordarum	
partes	in	partes	in
0	Jo	0	32 21
1	o	1	2 50
1	Jo	1	34 15
2	o	2	5 40
1	Jo	1	37 4
3	o	3	8 28
1	Jo	1	39 52
4	o	4	11 16
1	Jo	4	41 40
5	o	5	14 4
1	Jo	5	43 17
6	o	6	16 49
1	Jo	6	44 11
7	o	7	19 13
1	Jo	7	45 54
8	o	8	22 15
1	Jo	8	47 11
9	o	9	24 54
1	Jo	9	48 13
10	o	10	27 31
1	Jo	10	49 49
11	o	11	30 5
1	Jo	11	51 11
12	o	12	32 36

還有什麼比 做表更實用？

某人很辛苦地算一遍，
開放答案讓大家抄，
以後只要查表即可。

直到今日仍如此！

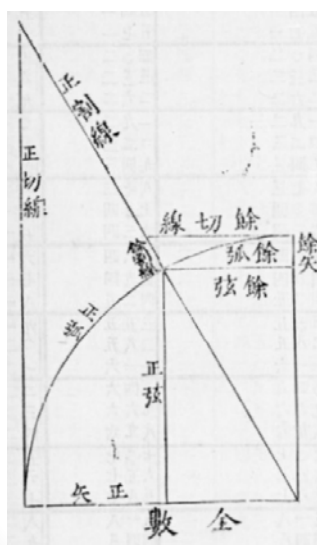
阿拉伯融合發展

- ◆ 從印度學來「半弦」 \sin

$$\text{crd}\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

- ◆ 發展出 12 個「三角比」
單位圓上出 12 條線段長

明朝末年 傳入中國



- ◆ 耶穌會傳教士帶進來
- ◆ 當時有 8 個
- ◆ 現在學 3 個

食髓知味

- ◆ 阿拉伯發現了積化和差

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

- ◆ 查表可使乘法變成加減
- ◆ 後來想到指數律更好用
- ◆ 故計重施：對數表（為實用）

少廣

開方的推廣

《九章》4：少廣

◆ 開方

- 平方根的近似解
- 立方根的概數
- 原本求解 $x^2 = c$
從第二步起「帶從」： $x^2 + bx = c$

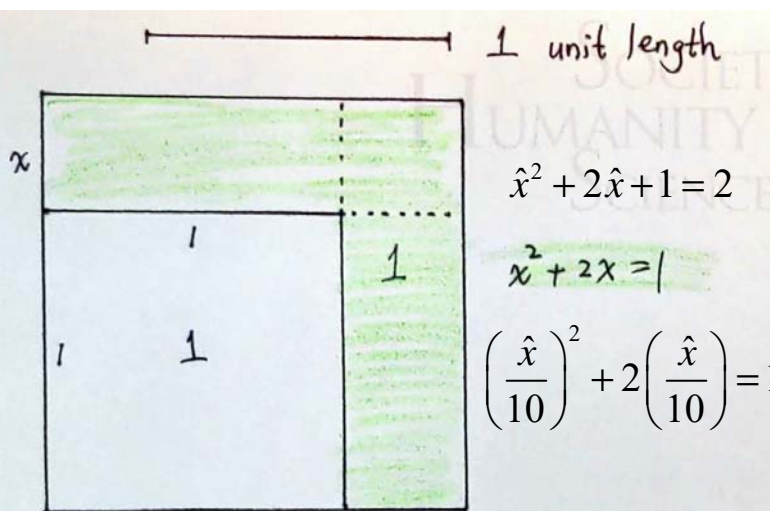
單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[49]

開方一

$$x^2 = 2$$

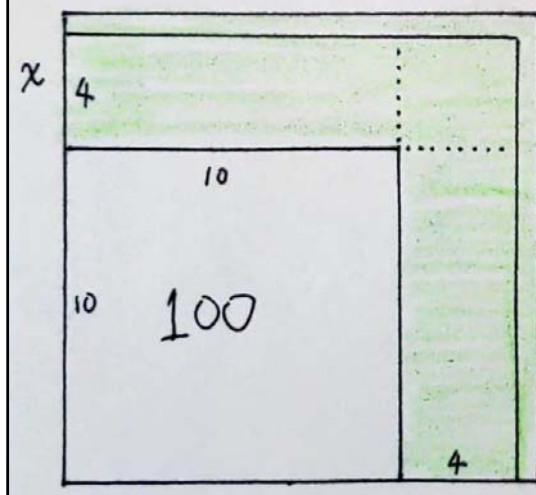
$$(1 + \hat{x})^2 = 2$$



單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[50]

開方二



$$x^2 + 20x = 100$$

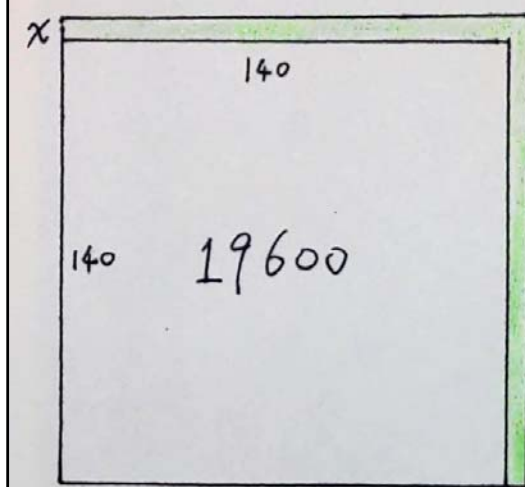
$$(4 + \hat{x})^2 + 20(4 + \hat{x}) = 100$$

$$\hat{x}^2 + 28\hat{x} = 4$$

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[51]

開方三



$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + 28\left(\frac{x}{10}\right) = 4$$

$$x^2 + 280x = 400$$

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[52]

開立方：解 $x^3 = 2$

- ◆ 如法炮製
- ◆ 楊輝（引述賈憲的）三角

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 3 & 3 & 1 \\ & & & & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array} \quad \text{二項式展開}$$

- ◆ 其實就是十分逼近法
可解任意高次方程

東方也有純數學

- ◆ 高次方程當年並無需求
- ◆ 秦九韶示範 10 次方程
- ◆ 不寫變數，仍發展出
平移
- ◆ 綜合除法 & 老九變換

綜合除法一

求解 $x^3 = 2$

一般式 $x^3 - 2 = 0$

顯然 $1 < \alpha < 2$, 從 x 和 1

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad \underline{L} \\ \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 1 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 1 \\ \hline 1 \quad 3 \end{array}$$

$(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 = 0$ **老九變換**

令 $(x-1) \rightarrow \frac{x}{10}$

$$x^3 + 30x^2 + 300x - 1000 = 0$$

—— 求解十分位 ——

綜合除法二

x 顯然超過 1, 從 2 開始

$$\begin{array}{r} 1 \quad 30 \quad 300 \quad -1000 \quad \underline{L} \\ \quad 2 \quad 64 \quad 128 \\ \hline 1 \quad 32 \quad 364 \quad -272 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 3 \quad 99 \quad 1197 \quad \underline{L} \\ \hline 1 \quad 33 \quad 399 \quad 197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 2 \quad 68 \\ \hline 1 \quad 34 \quad 432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 1 \quad 36 \\ \hline 1 \quad 36 \end{array}$$

故知 $2 < x < 3$, 從 x 和 2

繼續做 - - - - - L

$$\begin{array}{r} \quad 2 \quad 68 \\ \hline 1 \quad 34 \quad 432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 1 \quad 36 \\ \hline 1 \quad 36 \end{array}$$

故知 $2 < x < 3$, 從 x 和 2

繼續做 - - - - - L

$$\begin{array}{r} \quad 2 \quad 68 \\ \hline 1 \quad 34 \quad 432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 1 \quad 36 \\ \hline 1 \quad 36 \end{array}$$

$(x-2)^3 + 36(x-2)^2 + 432(x-2) - 272 = 0$

$$x^3 + 36x^2 + 43200x - 272000 = 0$$

—— $\sqrt[3]{2} = 1.2 \dots$ 由 x 求百分位 ——

老九變換

綜合除法三

x 顯然超過 4

$$\begin{array}{r|l} 1 & 360 \quad 43200 \quad -272000 \\ \hline & \end{array} \quad |4$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 364 \quad 44656 \quad -93376 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 365 \quad 45025 \quad -46875 \\ \hline & \end{array} \quad |5$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 366 \quad 45396 \quad 376 \\ \hline & \end{array} \quad |6$$

故知 $5 < x < 6$, 從 x 扣 5

繼續做 ----- |5

$$\begin{array}{r|l} 1 & 370 \quad 46875 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 375 \\ \hline & \end{array}$$

$$x^3 + 3750x^2 + 4687500x - 46875000 = 0$$

$$\sqrt[3]{2} = 1.25 \dots \text{ 由 } x \text{ 求千分位}$$

(但知 $\sqrt[3]{2}$ 很靠近 1.26)

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[57]

綜合除法四

從 8 開始試

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3750 \quad 4687500 \quad -46875000 \\ \hline & \end{array} \quad |8$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3758 \quad 4717564 \quad -9134488 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3759 \quad 4721321 \quad -4383021 \\ \hline & \end{array} \quad |9$$

故知 $9 < x < 10$, 從 x 扣 9

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3768 \quad 4755243 \\ \hline & \end{array} \quad |9$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3777 \\ \hline & \end{array}$$

$$x^3 + 37770x^2 + 475524300x - 4383021000 = 0$$

$$\sqrt[3]{2} = 1.259 \dots \text{ 由 } x \text{ 求萬分位}$$

誤差已經小於 $\frac{1}{1000}$, 若可接受則

可停止而得 $\sqrt[3]{2} \approx 1.260$

單維彰 · 民族觀點數學課程 2023/04/29

[58]

綜合除法後話

- ◆ 17世紀，牛頓從微分
再次發現老九變換
- ◆ 改成升冪排列，變身為
泰勒變換

$$\begin{aligned} & x^3 + 30x^2 + 300x - 1000 \\ &= -272 + 432(x-2) + 36(x-2)^2 + (x-2)^3 \end{aligned}$$

切線與微分

- ◆ 18-19世紀，拉格朗日
企圖用它建立微積分
- $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots$$
- ◆ 輸給柯西，但仍有
教育價值，可接高一

結論與建議

數學教育是從
民族文化導入
主流文化的
歷程。

The End