

臺中一中週六通識講座

文化脈絡中的 數學課程與學習

單維彰

國立中央大學數學系
師資培育中心、文學院學士班
民國111年10月15日

Mission Statement

從中國、歐洲的數學教材，以及美國的數學課程發展歷程，了解現今臺灣數學課程內容的來源，探討臺灣數學教育特色的形成脈絡，並簡述這些內容對於未來學習的價值。

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[2]

《九章》1：方田


◆ 面積公式

- 基本是為土地丈量
- 圓面積＝半徑與半周之積
- 真正關鍵的是圓周率

十進小數誕生

〔祖沖之以丈為徑，〕圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。

《隋書律曆志》



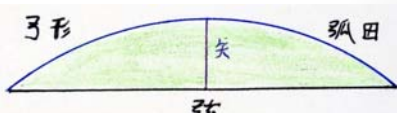
臺清晚 地土灣 單丈

光緒十五年
肆分肆毫
陸厘肆毫
玖絲

單維彰·數學課程與學習 2022/10/15
5

弧田未竟

- ◆ 由弦矢求弓形面積
 - 劉徽發現有誤，但亦不能改
 - 等價於弦矢求弧
- ◆ 真正關鍵是弧弦互算
 - 也就是「三角比」



單維彰·數學課程與學習 2022/10/15
6

中國始終不曾量角

◆ 有「三角形」：圭田

- 關心它的面積（半底乘以高）
- 秦九韶：三斜求積術（海龍公式）

◆ 能測量：只用勾股

- 從直角三角形的相似獲得比例式
- 不曾想過勾股之比值（ \tan ）

《九章》9：勾股

◆ 兩邊可測

- 由畢氏定理知第三邊

◆ 一邊可測

- 由相似觀念知另兩邊

◆ 高遠皆不可測（直接測量）

- 重差術（兩個共邊的勾股及兩勾差）
- 劉徽續《九章》10：〈海島算經〉

沒有「角」...

◆ 不能發現

角 \leftrightarrow 勾股比

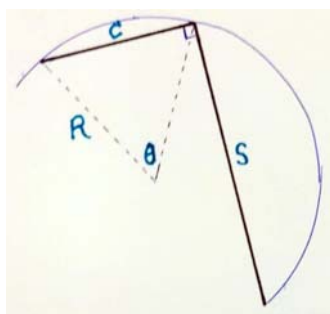
後來的「三角比」

◆ 弧弦不能互算

● 1300年後傷及天象曆算

弦 = $R \text{crd}\theta$ θ = 弧所對的圓心角

弧與弦的對應觀念



θ : 圓心角

所對弦長 $c = \text{crd}\theta$

輔助(補)弦 s

倍角、和差需輔助弦

但三倍角不必：

$$\text{crd}(3\theta) = 3\text{crd}\theta - \text{crd}^3\theta$$

$\text{crd}\theta$ 有公式嗎？

其實沒有！

(直到牛頓...)

西方數學也重實用

Arcu		Chordarum	
partes	in	partes	in
0	30	0	34 11
1	0	1	2 50
1	30	1	34 11
2	0	2	7 40
2	30	2	37 4
3	0	3	11 28
3	30	3	39 52
4	0	4	11 16
4	30	4	41 40
5	0	5	14 4
5	30	5	41 27
6	0	6	16 49
6	30	6	44 11
7	0	7	19 13
7	30	7	45 14
8	0	8	22 11
8	30	8	47 31
9	0	9	24 54
9	30	9	48 13
10	0	10	27 31
10	30	10	49 49
11	0	11	30 5
11	30	11	51 21
12	0	12	32 16

還有什麼比
做表更實用？

某人很辛苦地算一遍，
開放答案讓大家抄，
以後只要查表即可。

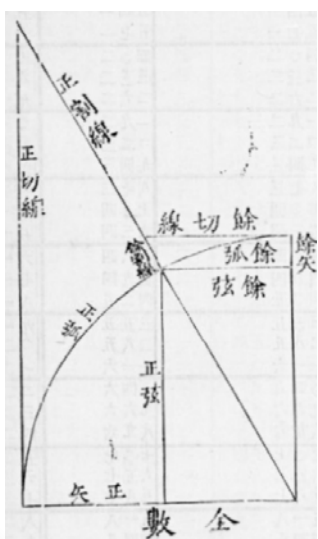
直到今日仍如此！

阿拉伯融合發展

- ◆ 從印度學來「半弦」 \sin

$$\text{crd}\theta = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

- ◆ 發展出 12 個「三角比」
單位圓上出 12 條線段長



明朝末年 傳入中國

- ◆ 耶穌會傳教士帶進來
- ◆ 當時有8個
- ◆ 現在學3個

單維彰·數學課程與學習 2022/10/15
15

食髓知味

- ◆ 阿拉伯發現了積化和差

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

- ◆ 查表可使乘法變成加減
- ◆ 後來想到指數律更好用
- ◆ 故計重施：對數表（為實用）

單維彰·數學課程與學習 2022/10/15
16

Sinusoid



正弦波

- ◆ 測量改以成熟的工具
- ◆ 三角的新時代角色：
 - 波的數學模型
 - 訊號分析／壓縮／傳播

《九章》5：商功

- ◆ 體積公式、空間概念

方田與商功

- ◆ 基本形體的學習
- ◆ 寓幾何於計算

華人善算

(教學的契機)

單維彰·數學課程與學習 2022/10/15

[19]

《九章》3：衰分

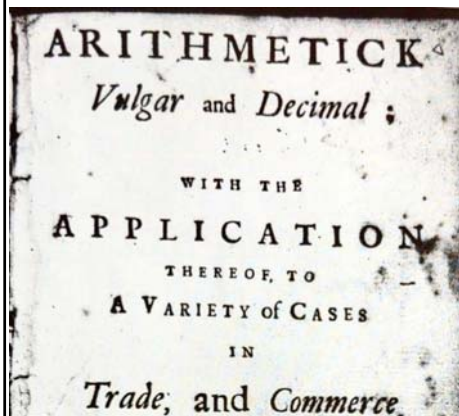
- ◆ 按比例分配
 - 包括正比與反比
 - 多達五項比
- ◆ 分數四則運算的必要
 - 可得真解，如何執行？

$$8\frac{104}{137} \text{ 錢}$$

單維彰·數學課程與學習 2022/10/15

[20]

十進小數 vs 日常分數



小數是「標準規格化」的分數。

21

分數小數誰實用？

◆ 由工具決定


- 英吋刻度尺： $2\frac{3}{8}$ 吋比 2.375 方便
- 台斤槓桿秤： $1\frac{5}{16}$ 斤比 1.3125 方便
- 若有對應的十進貨幣：

$$8\frac{104}{137} \text{ 錢} \approx 8 \text{ 錢 } 7 \text{ 分 } 5 \text{ 厘 } 9 \text{ 毫 } 1 \text{ 絲 } 2 \text{ 忽} \dots$$

(若 1 錢 = 10000 元...)

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

22



晚清臺灣房屋稅

同治二年
壹錢參分肆厘
零毫捌絲貳忽

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[23]

《九章》8：方程

- ◆ 二／三元一次聯立式
- ◆ 分離係數
 - 工具使然：籌算，無處寫未知數
 - 本質是「增廣矩陣」
 - 加減消去→高斯消去法

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[24]

《九章》8：方程

◆ 負數誕生

- 式中有減，分離成負
- 紅籌為正黑籌為負，或邪正為異
- 但只求正解（直到牛頓仍是）

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

[25]

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

負數之用

- ◆ 生活、科學、社會
很少「真的」需要負數
- ◆ 純數學所需（完整性）
- ◆ 有助於程式設計

[26]

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

方程後話

◆ 線性代數、Tensor 計算

- 向量觀念，寫成直式
- 矩陣：分離係數之二維表格
- 高中階段：線性組合

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases} \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[27]

《九章》4：少廣

◆ 開方

- 平方根的近似解
- 立方根的概數
- 原本求解 $x^2 = c$
從第二步起「帶從」： $x^2 + bx = c$

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[28]

開方一

$x^2 = 2$
 $(1 + \hat{x})^2 = 2$

1 unit length

$\hat{x}^2 + 2\hat{x} + 1 = 2$
 $x^2 + 2x = 1$
 $\left(\frac{\hat{x}}{10}\right)^2 + 2\left(\frac{\hat{x}}{10}\right) = 1$

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[29]

開方二

$x^2 + 20x = 100$
 $(4 + \hat{x})^2 + 20(4 + \hat{x}) = 100$
 $= 100$
 $\hat{x}^2 + 28\hat{x} = 4$

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[30]

開方三

$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + 28\left(\frac{x}{10}\right) = 4$
 $x^2 + 280x = 400$

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[31]

開立方：解 $x^3 = 2$

- ◆ 如法炮製
- ◆ 楊輝（引述賈憲的）三角

1 2 1
 1 3 3 1
 1 4 6 4 1

二項式展開

- ◆ 其實就是十分逼近法
可解任意高次方程

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[32]

東方也有純數學

- ◆ 高次方程當年並無需求
- ◆ 秦九韶示範10次方程
- ◆ 不寫變數，仍發展出
 平移
- ◆ 綜合除法 & 老九變換

綜合除法一

求解 $x^3 = 2$

一般式 $x^3 - 2 = 0$

顯然 $1 < \alpha < 2$ ，從 x 扣 1

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad \ll \\ \underline{ \quad 1 \quad 1 \quad 1} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 1 \quad 2 \\ \underline{ \quad 1 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 1 \\ \underline{ \quad 1} \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

$$(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 = 0 \quad \text{老九變換}$$

$$\text{令 } (x-1) \mapsto \frac{x}{10}$$

$$x^3 + 30x^2 + 300x - 1000 = 0$$

—— 求解十分位 ——

綜合除法二

x 顯然超過 1, 從 2 開始

$$\begin{array}{r} 1 \quad 30 \quad 300 \quad -1000 \quad | \quad 2 \\ \underline{ \quad 2 \quad 64 \quad 128} \\ \quad 32 \quad 364 \quad | \quad -272 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 32 \quad 364 \quad | \quad -272 \\ \underline{ \quad 3 \quad 99 \quad 1197} \\ \quad 33 \quad 399 \quad | \quad 197 \end{array}$$

故知 $2 < x < 3$, 從 x 扣 2

繼續做 ----- | 2

$$\begin{array}{r} \quad 33 \quad 399 \quad | \quad 197 \\ \underline{ \quad 2 \quad 68} \\ \quad 34 \quad 432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 34 \quad 432 \\ \underline{ \quad 1 \quad 36} \end{array}$$

老九變換

$$(x-2)^3 + 36(x-2)^2 + 432(x-2) - 272 = 0$$

$$x^3 + 36x^2 + 432x - 272000 = 0$$

$$\sqrt[3]{2} = 1.2 \dots \text{ 由 } x \text{ 求百分位}$$

綜合除法三

x 顯然超過 4

$$\begin{array}{r} 1 \quad 360 \quad 43200 \quad -272000 \quad | \quad 4 \\ \underline{ \quad 364 \quad 44656 \quad -93376} \\ \quad 365 \quad 45025 \quad | \quad -46875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 364 \quad 44656 \quad -93376 \\ \underline{ \quad 365 \quad 45025 \quad -46875} \\ \quad 366 \quad 45396 \quad | \quad 376 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 365 \quad 45025 \quad -46875 \\ \underline{ \quad 366 \quad 45396 \quad 376} \\ \quad 367 \quad 45761 \quad | \quad 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 366 \quad 45396 \quad 376 \\ \underline{ \quad 367 \quad 45761 \quad 15} \\ \quad 368 \quad 46163 \quad | \quad 15 \end{array}$$

故知 $5 < x < 6$, 從 x 扣 5

繼續做 ----- | 15

$$\begin{array}{r} \quad 367 \quad 45761 \quad 15 \\ \underline{ \quad 370 \quad 46875} \\ \quad 371 \quad 47536 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad 370 \quad 46875 \\ \underline{ \quad 371 \quad 47536} \end{array}$$

$$x^3 + 3750x^2 + 4687500x - 46875000 = 0$$

$$\sqrt[3]{2} = 1.25 \dots \text{ 由 } x \text{ 求千分位}$$

(但知 $\sqrt[3]{2}$ 很靠近 1.26)

綜合除法四

從 8 開始試

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3750 \quad 4687500 \quad -46875000 \quad | \quad 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3758 \quad 4717564 \quad | \quad -9134488 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3759 \quad 4721321 \quad | \quad -4383021 \quad | \quad 9 \end{array}$$

故知 $9 < x < 10$, 從 x 扣 9

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3768 \quad | \quad 4755243 \quad | \quad 9 \end{array}$$

$$1 \mid 3777$$

$$x^3 + 37770x^2 + 475524300x - 4383021000 = 0$$

$$\sqrt[3]{2} = 1.259 \dots \text{ 由 } x \text{ 扣 萬分位}$$

誤差已經小於 $\frac{1}{1000}$, 若可接受則

可停止而得 $\sqrt[3]{2} \approx 1.260$

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[37]

綜合除法後話

- ◆ 17世紀，牛頓從微分再次發現老九變換
- ◆ 改成升冪排列，變身為泰勒變換

$$\begin{aligned} & x^3 + 30x^2 + 300x - 1000 \\ & = -272 + 432(x-2) + 36(x-2)^2 + (x-2)^3 \end{aligned}$$

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[38]

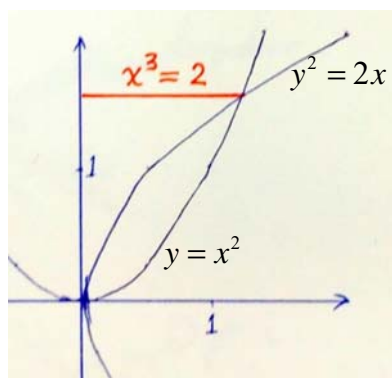
切線與微分

- ◆ 18-19世紀，拉格朗日企圖用它建立微積分

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots$$

- ◆ 輸給柯西，但仍有教育價值，可接高一

倍立方： $(xa)(xb)(xc) = 2abc$

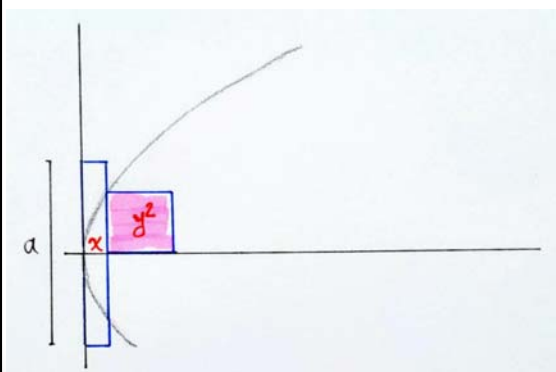


$$x^3 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

明明是人間所需，希臘卻託鬼神。因為...

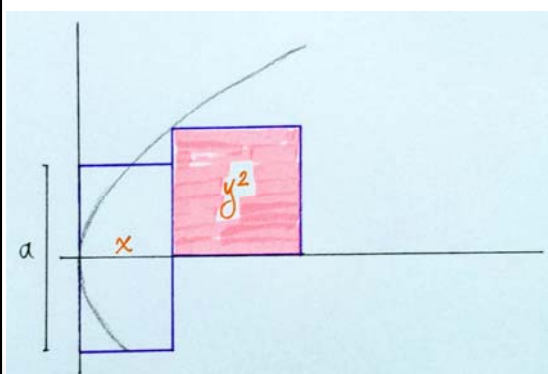
希臘人自以為幾何作圖所得的解無誤差，是神要的真解。

Locus / 軌跡



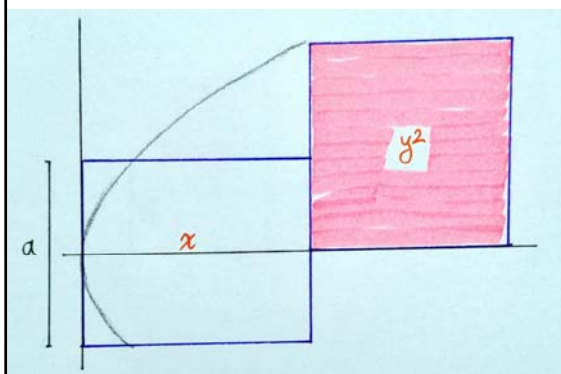
符合 $y^2 = ax$ 的點集合，非尺規作圖可及者。

百年後命名 Parabola



Apollonius (240BC-190BC) 發現那個軌跡是圓錐截痕。

Parabola：併立線

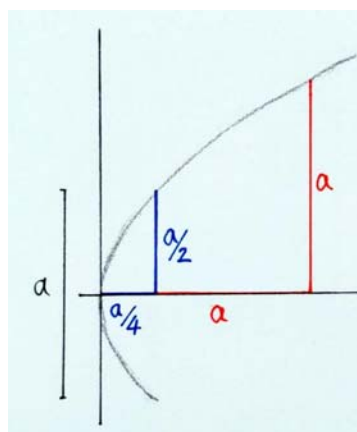


Para: 併立、可排比對照的。指正方形 y^2 與長方形 ax 的恰好相等。

單維彰·數學課程與學習 2022/10/15

[43]

併立線沒有準線與焦點

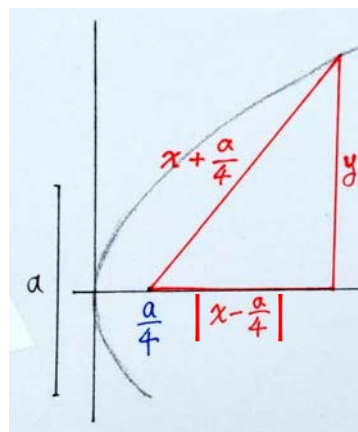


兩組明顯特例。其中一組如今稱為正焦弦，但是當年還沒有準線，還沒有光學性質。

單維彰·數學課程與學習 2022/10/15

[44]

再百年發現準線性質



Pappus (290-350)

最後的
希臘數學大師

光學性質還要
500年，拋射物
還要再500年。

單維彰·數學課程與學習 2022/10/15

[45]

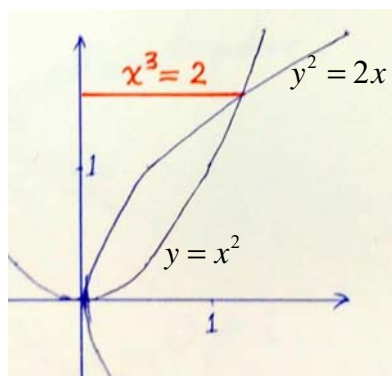
Parabola 到中國

- ◆ 「太聰明」的翻譯
 - 1850 咸豐年間
 - 李善蘭+偉烈亞力《代微積拾級》
- ◆ 教學可以有後見之明
 - 但是脈絡宜避免紊亂
 - 國中的平面幾何其患尤甚

單維彰·數學課程與學習 2022/10/15

[46]

幾何並未得真解



但數形合一的
理念終究孕育
了坐標幾何。

中國不寫變數看
不到方程式，也
沒有數形合一的
興趣。

坐標幾何 → 微積分



坐標幾何出版
於1637。



數學原理出版
於1687。

西方數學教育 本來也不務實

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[49]

博雅與紋飾之學

- ◆ 拉丁文：鍛鍊記憶力
- ◆ 數學：鍛鍊智力
 - 都有為鍛鍊而鍛鍊的教材
 - 在20世紀初被心理學推翻
 - 都屬人文承續之目的

為往聖繼絕學

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[50]

英國「覺醒」Enlighten

What Knowledge is of Most Worth?

(博雅教育乃紋飾炫耀之學)

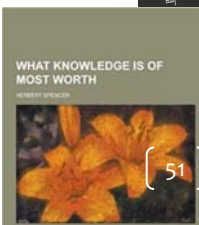
- 一 保護性命存活之學
- 二 謀生以得衣食之學
- 三 撫養教誨子女之學
- 四 閭里國家相關之學
- 五 閒時玩物適情之學

Herbert Spencer, 1859；光緒八年(1882) 中譯
『適者生存』 Amazon 銷售中

肄業要覽

大英史本守著

中國顏永京譯



WHAT KNOWLEDGE IS OF MOST WORTH
Herbert Spencer

[51]

單維彰 - 所謂教育 2022/2/21

美國「進步」Progressive

- 進入「無貴族」時代的總稱
- 「進步教育」的四部和聲



The Struggle for the American Curriculum, 1893-1958
美國中小學課程競逐史 (1893-1958)
Herbert M. Kliebard 著
單文經 譯
Routledge

- ◆ 人文承續論
- ◆ 心理發展論
- ◆ 社會效率論
- ◆ 社會改良論

[52]

單維彰 - 所謂教育 2022/2/21

西算也講實用
中算也有純數

西方數學教育
也曾不切實際
但人家持續在改
我們為何不前？

不缺專業知識與動機

缺的是什麼？

Drive

鐵與血

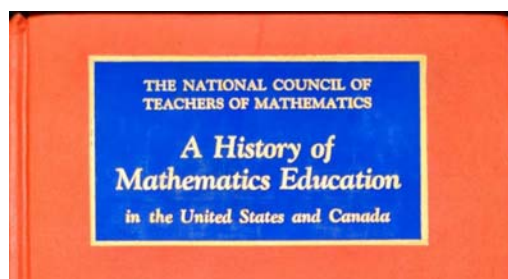
武備與金融

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

〔 57 〕

美國西點軍校

美國數學課程「現代化」之始。



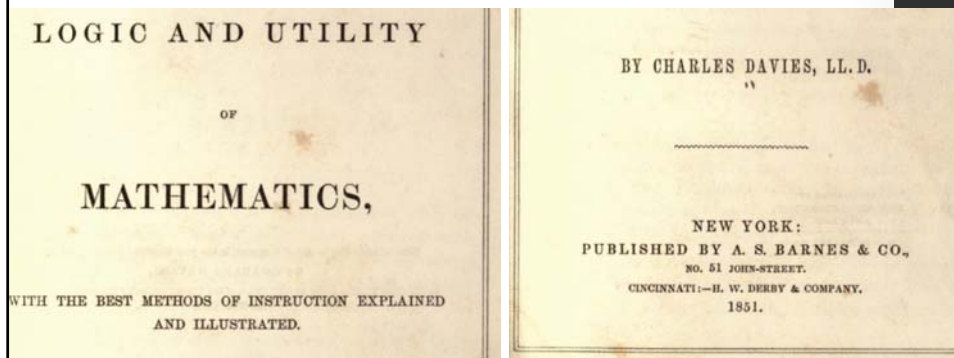
「第一所將『支持科學與技術的較實用數學』編進課程的學校。這些課程內容從西點軍校傳播出來，逐漸發揮影響力，促使美國中學數學課程開始轉型。」

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

〔 58 〕

美國第一本

「數學科教材教法」專書



「根據作者在西點軍校四分之一世紀的教學經驗寫成。」

59

美國對德日宣戰 1941

◆ 國防部要求數學教育



海軍上將尼米茲
Chester W. Nimitz
(1885-1966)

單維彰 - 所謂教育 2022/2/21

60

Sputnik 1957



◆ 「冷戰」
推上最高
峰

◆ 「太空競賽」
開跑



單維彰 - 所謂教育 2022/2/21

[61]

NASA 與 DoD 促成今日數教

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/15

[62]

數學 & 教育
也不是
臺灣缺乏創新
的原罪

The End

但我們仍努力更新數教