

永春高中數學資優研習

從方程說起

多項式進路的微積分課程

單維彰

國立中央大學師資培育中心與數學系

文學院學士班主任

民國109年11月7日

單維彰 · 從方程說起微積分 2020/11/07

[1]

方程

《九章》第八章，18題

二元一次多項式聯立等式

三...

單維彰 · 從方程說起微積分 2020/11/07

[2]

古中國知道分數
但是不愛用分數
愛用「小數」

沒有小數點的小數

運用單位量：

分、釐、毫、絲、忽、微

放大單位長：

$$\sqrt{2,000,000} \approx 1,4142$$

古中國

A REFINED VALUE OF π 3RD CENTURY AD
圓周率
得徑七則二十二乃祖氏之約率非祖氏也
半徑較則微
半徑較則微
LUI HUI'S NINE CHAPTER ON THE MATHEMATICS AD 264
FEDERATED STATE OF MICRONESIA 33¢

無窮等比數列
莊子《天下篇》（第33）：
『一尺之捶，日取其半，萬世不竭』

割圓術
劉徽《九章》：
『割之彌細，所失彌少，割之又割，乃至於不可割。』
（祖沖之、祖暅）

5

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

割圓術原理

迭代關係：

$$\text{內接正十二邊形的周長} = 12 \times \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\text{內接正六邊形的周長}}{12} \right)^2} \right)}$$

單維彰·從方體說到微積分 2020/11/07

6

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

割之彌細，所失彌少

◆ 劉徽（西元 250 年，三國魏司馬懿）

200 多邊，設徑長一百萬

周長約 314,1866

◆ 祖沖之（西元 470 年，南朝宋齊兩代）

10000 多邊，設徑長一千萬 密率 $\frac{355}{113}$

周長在 3141,5926 和 3141,5927 之間
(世界記錄一千年)

句股、畢氏定理

《九章》第九章

比例式（一次方程）

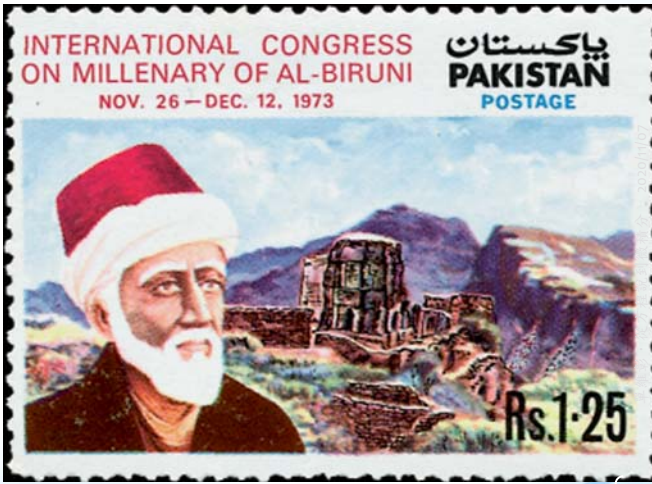
有限的（一元）二次方程



花刺子密
Al-Khwārizmī
(約780—850)
演算法、代數

單維彰·從方程說到微積分 2020/11/07

國立中央大學 National Central University 通識核心課程—文化脈絡中的數學



貝魯尼
Al-Biruni
(973—1048)
留下13,000篇
著作

INTERNATIONAL CONGRESS
ON MILLENNARY OF AL-BIRUNI
NOV. 26 - DEC. 12, 1973

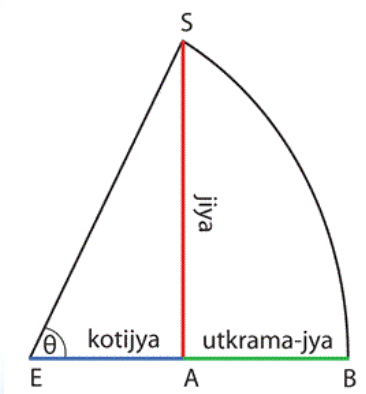
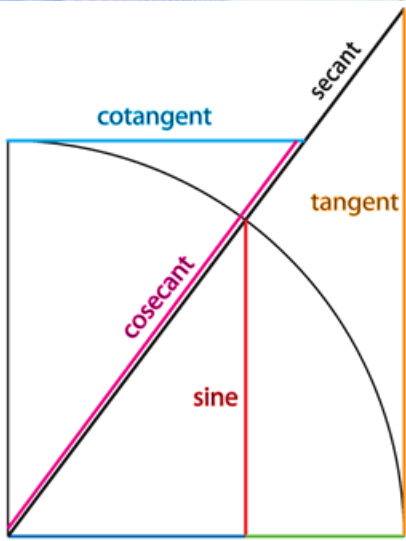
پاکستان
PAKISTAN
POSTAGE

Rs.1-25

單維彰·從方程說到微積分 2020/11/07

國立中央大學 National Central University 通識核心課程—文化脈絡中的數學

三角比的演化





國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

11

Pax Mongolica



國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

12

李冶、秦九韶、楊輝、朱世傑

術曰立天元一為平。一以減云數餘為
長用平乘起為積。一寄左列卦通步
與寄左相消得開方式。一平方開之
得平以減和步即長合開。一以減云
入千四百六十四乃長。一以減云
較等二百五十六為實。一以減云
較等平也。一以天元法之明源法省功
數倍。一以天元法之明源法省功
方廣滿從正負之銳力消之下如意求之得
長而觀其明其正負也。一以天元法之明源法省功
使學者察然易曉也。

今有直田五畝八十八步只云長平併之得七
術曰列全步通分內子得一千八百七十
五以十二乘之得二萬二千五百又分母
四再自乘得六十四乘之得一百四十四
萬為實以一為廉平方開之得一千二百
又分母自乘得十六而一合開
今有直田八畝五分五釐只云長平和得九十
二步問長平各幾何

答曰
平三十八步
長五十四步

單維彰·從方程說到微積分 2020/11/07 [13]

李冶

《測圓海鏡》(1248年)

(一元) 二次方程

三次...

單維彰·從方程說到微積分 2020/11/07 [14]

秦九韶

《數書九章》(1247年)

迭代的綜合除法

單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

15

學科中心電子報，第127期



帶領高一學生認識秦九韶的方程解法

單維彰 / 中央大學數學系教授

在「zh.wikipedia.org/wiki/秦九韶算法」網頁裡面，藉以下四次方程為例，說明秦九韶的求解方法：

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$$

關於秦九韶是何許人？可以輕易從網路查得初步資訊。如果想要獲得進一步的歷史評述，可以讀《數學傳播》的一篇文章 [1]；而目前最權威的文集，可能是中國吳文俊院士主編的「大系」[2]。本文作者要感謝建國中學林信安老師引起這個主題，本文的主旨是說明高中一年級的數學課程可以連結「秦九韶算法」，而高一學生有機會完理解這個算法。

詳全文(222KB)

出處：教育部高中數學學科中心電子報線上系統

[轉載文章](#) [列印本文](#) [關閉視窗](#)

單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

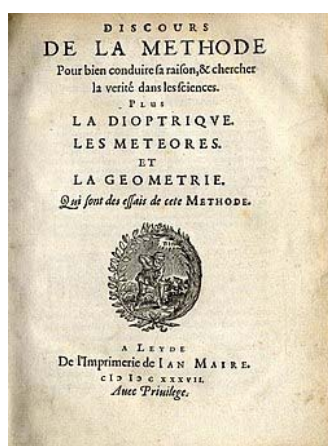
16

微積分 也曾樸素無邪 Naïve Calculus

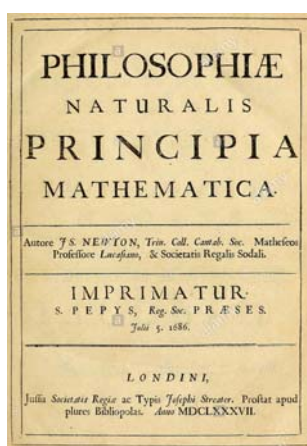
單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

17

微積分「淺」在哪裡？



La Géométrie (1637)



Principia (1687)

單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

18


1637 第一版的目錄

T A B L E

Des matieres de la
G E O M E T R I E.

Liure Premier.

DES PROBLESMES QU'ON PEUT
construire sans y employer que des cercles &
des lignes droites.

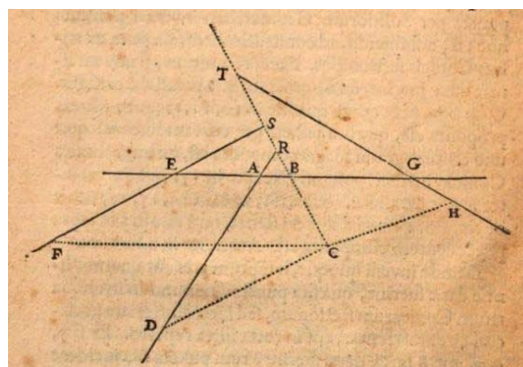
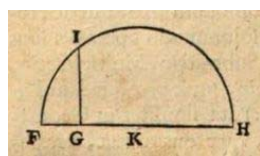
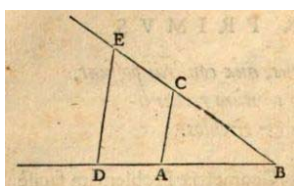
	COMMENT le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.	297
	Comment se font Geometriquement la Multiplication, la Division, & l'extraction de la racine quarree.	298
	Comment on peut user de chiffres en Geometrie.	299
	Comment il faut venir aux Equations qui seruent a resoudre les problemes.	300
	Quels sont les problemes plans; Et comment ils se resolvent.	302
	Exemple tiré de Pappus.	304
	Responſe a la question de Pappus.	307
	Comment on doit poser les termes pour venir a l'Equation en cet exēple.	310
	K k k	Com

進步的觀念：用法文出版（但是在法國遭禁）

單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

[19]

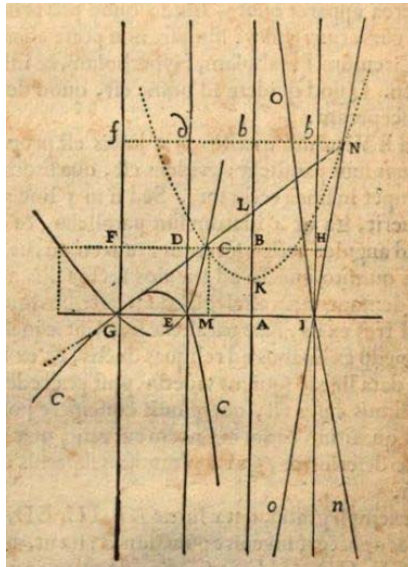
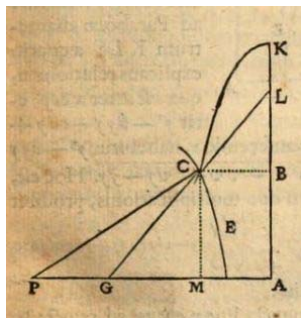
但是笛卡耳只用一條水平數線



單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

[20]

有需要時輔以鉛直線



單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

[21]

Frans van Schooten (1615—60)

荷蘭萊登



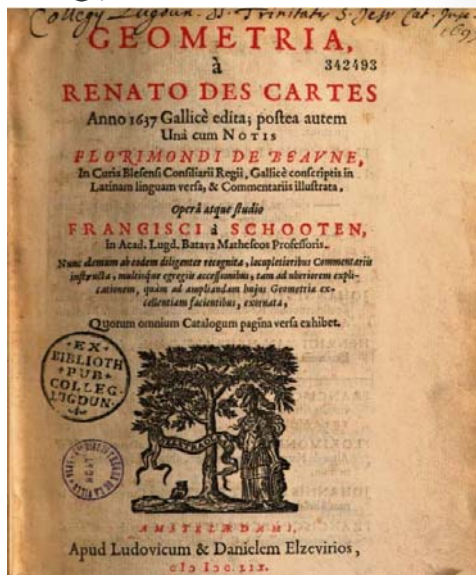
林布蘭作品
229

單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

[22]

施豪登的文化遺產

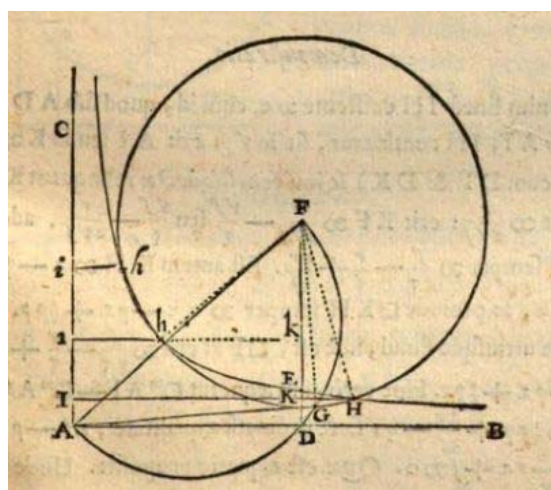
- ◆ 1649：拉丁文譯本。
- ◆ 1659—61：拉丁文注。
- ◆ 教出惠更斯。



單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

[23]

施豪登的拉丁文注：縱坐標

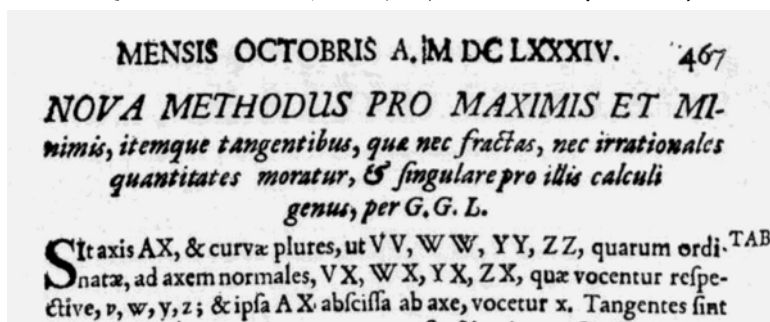


單維彰 · 從方程說到微積分 2020/11/07

[24]

施豪登的拉丁注本

- ◆ 約 1662：牛頓從 Barrow 學習。(→1669)
- ◆ 1672：惠更斯授萊布尼茲。(→1684)



劉柏宏 (2012) 微積分基本定理的發展歷史在教學上的應用與啟發。數學傳播 36。

Naïve Calculus

- ◆ 牛頓、萊布尼茲固然是天才...

他倆的微積分能有多難？

- ◆ 高中一年級的知識背景。
 - 直角坐標的基本方法。
 - 直線點斜式。
 - 多項式函數、綜合除法。

「微積分」之前情提要

- ◆ 方程式局部圖形：像一條直線。
- ◆ 多項式的「秦九」形式：新用途。
- ◆ 切線點斜式→切線斜率。
- ◆ 多項式的餘式與因式定理：

$$f(x) = Q(x) \cdot (x - a) + f(a)$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = Q(x) \quad \text{其中 } x \neq a$$

跟著老師，
搭配高中數學，
順便學微積分。