



以「素養」為導向的十二年國民基本教育課程綱要（108課綱）實施之後，評量工作也就隨之而來了。評量與課程、教學設計緊密相扣，而作者也多次呼籲「考試領導教學」的正面價值（例如單維彰，2009；2015）：設計得宜的評量，不無豎立榜樣的效果。作者參與108課綱數學領綱的研製工作，也是教育部中學數學學科中心「素養多元評量小組」的工作夥伴，故欲以課綱設計者的立場，結合初步的實作經驗，為「素養評量」的內涵與實施辦法，提出建言。

壹 素養評量不是一種題型

討論素養評量，讀者可能立刻聯想到PISA（國際學生能力評量計畫，Programme for International Student Assessment）。確實如此，PISA數學試題的確可以作為素養評量的典範，雖然因為它的評量對象是15歲青少年，所以對於探討高中階段之素養評量的助益有限，但PISA是一個不可迴避的典範。PISA數學試題可歸納出兩大特色：

1. 題組式命題
2. 以情境入題

所以老師們很容易將以上兩大特色當作「素養評量」的定義，而誤以為所謂素養評量就是滿足以上特色的題型。這是我們首先想要避免的觀念。

事實上，以上兩大特色是PISA運用來實踐其評量目標的兩項技術。我們固然可以沿用這些技術，但更重要的是：先釐清評量目標。從小考（平常考）、段考、期末考、複習考到全國性評量（如學測），各有各的評量目標，不見得每一題都要刻意地符合上述特色。

以下兩個小節，分別藉著PISA數學試題的前述兩大特色，討論它們值得借鑑之處。

一 題組式命題

題組的優點是比較容易分辨學生的概念與能力層次，而缺點是容易洩漏試題的用意或者限制考生的思維。所有工具都有其優點也有其限制，如果能掌握目標並且多加思考與練習，總是能儘量發揮工具的長處而避免其拙處。當評量目標希望兼顧個別概念、基本操作程序，以及它們的綜合應用，而且意欲分辨考生的能力等級時，題組是個值得考慮的工具。

附錄1試將106年數學學測（單選）第5題拆成題組，權充一個具體範例，請老師們參考指教。反對題組的學者，可能有以下三種理由。

1. 作答時間變長。以附錄1的題組對照原題，我們猜想多數答對原題的學生，本來就會經歷第1和第2小題的程序，所以增加第1和第2小題，不至於拉長太多作答時間。至於有多少天縱英明的考生，可以跳過小題的過程而直接看出原題的答案，則是一個有待研究的命題。
2. 引導學生作答。附錄1的題組確實企圖引導學生思考，但這是採用題組的目的，不必然被解讀為缺點。根據大考中心公布的鑑別指數表，原題有效地鑑別最高20%和其餘80%的學生；如果評

量的目的是篩選最高20%的學生，則原題是適當的試題，但題組有可能做更細緻的鑑別。至於題組的三個小題是否真有更多的鑑別效果，還需要實證研究。

3. 小題之間並不獨立。試題之間的獨立性，是爲了滿足某些試題分析之統計方法的理論性假設。而評量的目的，並不應該把統計的需求放在首要位置。數學概念的發展，本來就經常是一層套著一層，在某個層次斷掉，就難以接續到更高的層次。著名的Bloom教學目標模型，也是將認知領域分解成上下相依的六個層次，而不是彼此獨立的。小題彼此獨立的題組，就好比「五個獨立是非題」的多選題，而後者已經被公認爲不恰當的多選題。總之，實在沒有必要堅持題組之內各小題的「獨立性」。

以附錄1的題組爲例，若第2小題答錯，而學生依據第2小題的圖形「正確」回答第3小題，則雖然學生具備第3小題欲評測的知識，卻答錯了。對於這種遺憾的狀況，有消極和積極兩種看法。消極的看法是，反正原題也會發生「一步錯，全盤墨」的遺憾，所以題組的品質並沒有比較差。積極的作法是，第3小題的評分可以根據考生的第2小題答案而決定；即使第2小題答錯了，只要根據其錯誤答案而一致地回答了第3小題，就算正確。

經過以上討論，作者想要肯定題組的效用。在適當的評量中採用題組，可以滿足某些評量目標。但是，素養評量的題目不一定非題組不可，而題組形式的題目，也不一定就能夠評量素養。

二 以情境入題

PISA歸納的四類情境——個人、職業、社會、科學——是頗有幫助的指引，幫助我們整理思緒或擬定思索的方向，而且PISA公布的示範試題也帶給老師們相當具體的參照典範。可是我們最擔心的就是：因爲PISA的成功，導致大家把「情境題」和「素養評量」畫上了等號，創造出爲情境而情境的試題。虛偽的情境不但遠離了素養，更是數學的

「反」教育：它就像所謂的「人工難題」，導引學生偏離了學習數學的旨趣，並且助長了「數學虛假而無用」的錯誤觀念。

舉例而言，106年數學學測第2題就是一個虛假的情境：

某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

試想，手機螢幕上顯示的是「數值」還是「數式」？如果是「數式」（這種程式應該很少見），題目就不必說「接近」 81^3 ，而且既然用戶能輸入數式，最後的答案也就不必是數值；但如果是「數值」，有多少人能看得出來某數（譬如532000）「接近」 81^3 ？再者，試用PISA的標準，此題屬於哪一類的情境？恐怕不管說哪一類都難以令人信服。所以，上述情境是虛假的，無助於評量目標，甚至是誤導的。

此題的測驗目標應該是指數律，關鍵步驟有三：1. 點擊三次之後應為 b^8 而不是 b^6 ；然後2. 使用分數的指數律得到 $b \approx 81^{3/8} = 3^{3/2}$ ；最後3. 估計 $\sqrt{27}$ 的數值。學測第2題是否要出三步驟的試題？這是一個值得探討的問題，但是本文不談。我們想要探討的是：撇開「情境」不談，此題的測驗目標是否符合素養評量？讓我們按照上述的解題三步驟來思考這個疑問。

1. 做三次平方，得到8次方而不是6次方，算不算素養？根據大考中心公布的選項分析，超過三分之一的低分組學生被「誘答選項」騙到了：他們選 $b = 9$ ，顯示這些學生可能錯在這一步，而第二步卻是會的。
2. 用指數律求解 $b^8 = 81^3$ 並化簡到 $b = 3^{3/2}$ 算不算素養？
3. 估計 $3^{3/2} \approx 5.2$ 算不算素養？

每位讀者對以上三個問題都各有自己的看法，這就顯示我們有溝通而達成（大致）共識的必要。上述議題按到後面再說，先請讀者思考：如果上述1.和2.都算素養，該考，那麼難道一定要把它們放在情境

裡面考嗎？或者難道因為找不到適當的情境，就不能考嗎？這兩個看法，應該都是荒謬的。這就是為什麼課程設計者的主張是：素養評量的題目不一定非情境不可，而情境題目也不一定就能夠評量素養。這個主張，呼應張鎮華教授（2017）的提醒：

紮實的數學知識，也是素養。

美國的《各州共同數學課程核心標準》（Common Core State Standards for Mathematics, CCSS-Math）的關鍵典範轉移（key shifts）恰好也呼應前述觀點（CCSS Initiative, 2016）。CCSS三大項教學典範轉移的「嚴謹」（rigor）的旨趣就是紮實的數學知識，外加典型應用。其簡短說明如下¹：

嚴謹意指深刻且有效地掌握數學觀念，而非提高難度或提前進度。為協助學生達成標準，施教者應在各年級的主要課題上，以同樣的力道追求嚴謹的三個面向：概念的理解、程序的嫻熟執行，和應用。

但是，總不會「全部」數學知識都屬於素養，所以上述主張還有細緻說明的必要，這就接續到下一節的主題。既然「素養評量」不是一種特定的題型，它是什麼呢？

¹ 原文是Rigor refers to deep, authentic command of mathematical concepts, not making math harder or introducing topics at earlier grades. To help students meet the standards, educators will need to pursue, with equal intensity, three aspects of rigor in the major work of each grade: conceptual understanding, procedural skills and fluency, and application.

貳 素養導向之教學成效

所有的學習評量，都應該肩負評判學習成效的任務。所謂「素養評量」也是學習評量，所以它還是要評判學習成效。有所不同的是，它特別要評判「素養導向之課程與教學」的學習成效。所以「素養評量」本身不是目的，也不是一種題型，而是「素養導向之課程與教學」的評量工具。

「素」是白色或原色的意思，引申成「平常的」。所以「素養」的字面意思可以解釋為「平常就具備（能表現）的學養與修養」。既然強調「平常」，看起來跟九年一貫課程標舉的「帶得走的能力」是一樣的。其實教育的總目標並沒有劇烈的改變，發展課綱的教育界同仁將「素養」定義為知識、能力與態度（國家教育研究院，2014），而所謂「核心素養的滾動圓輪意象」的示意圖（圖1），把「終身學習者」放

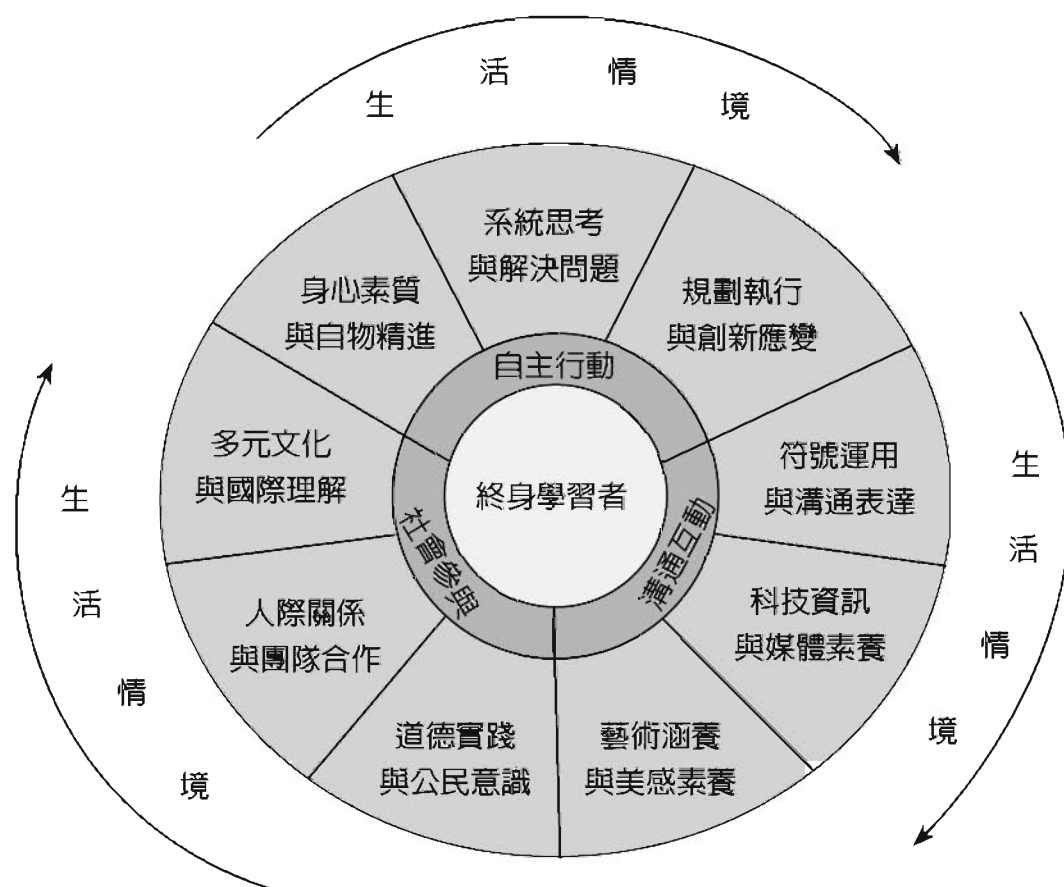


圖1 核心素養的滾動圓輪意象

在中心。於是我們可以這樣說：108課綱和九年一貫課綱在理念上的字面差異，主要是「態度」和「終身學習」兩大項。有些老師可能認為這些話只是「作文」而不予留意，但是這些理念確實是所謂「素養課程」的基本理念，也是企圖思索「素養評量」的理論基礎，不宜完全忽略。

108數學課綱的素養課程設計理念，跟總綱的理念一致，而這一份課綱的素養導向學習內容和學習表現，總括一句話來說就是：

為支持終身學習所需的數學知識、能力與態度。

數學教師同仁肯定都了解數學課程所謂的「知識」和「能力」是什麼，但是「態度」本來就有太多意義，在數學課程的語境裡更是難以捉摸。雖然「態度」很難評量，但是要彰顯「素養課程」的概念，就非要理解「態度」概念不可。本文僅簡約地詮釋：數學課程要教育的「態度」可以分兩方面詮釋：一是一種「意識」，二是特別的「數學思維方式」。意識是指教與學的過程中，隨時保持著關注「為什麼而學」與「如何運用它解決真實問題」的意識。數學的特長之一就是抽象，而抽象賦予數學真正的威力，所以數學的學習不可能完全依賴物質的真實世界；儘管如此，確知數學必與真實世界有所關聯，並且能夠有效解決問題的意識，卻是數學教育的重要任務，這項任務可以和數學的抽象性並行不悖。至於「數學思維方式」的詮釋，按到後面再說。

素養評量不僅用在總結性評量（例如期末考和會考、學測），也用在形成性評量。108數學課綱（教育部，2018）有許多脈絡化的設計，包括老師們不太習慣的「螺旋式」設計（例如先用10的次方引進log符號，然後才學習對數概念），以及現在比較少人運用的「親手做」設計（例如先用量角器和方格紙學習極坐標，然後連結廣義角的三角比），都是針對「意識」目標的課程設計。這部分的素養課程，不容易成為總結性評量的測驗目標，卻是形成性評量的適當目標。

以上說明想要建議教師同仁：素養評量不只是學測和指考的責任，

只要是測度「素養課程」學習成效的評量，都是所謂的素養評量。前一節末所說的「紮實的數學知識」，就是指「素養課程」中的學習內容；以適當的「態度」習得這些數學概念與操作能力，便是「素養課程」的學習成效。

前面對於108數學課綱之素養性的說明，或許還是頗為「作文」而較難掌握，但是本文無法深入詮釋課綱，也沒有篇幅深入詮釋素養。關於這兩者，還得請讀者參閱其他專門文件。但是在本節之末，提舉寫在課綱最前面的五大基本理念（如下），它們是「素養課程」更具體一些的闡述。

1. 數學是一種語言，宜由自然語言的題材導入學習
2. 數學是一種實用的規律科學，其教學宜重視跨領域的統整
3. 數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感
4. 數學應提供每位學生有感的學習機會
5. 數學教學應培養學生正確使用工具

「素養課程」的教材設計、教法原理及成效評量，都值得參酌以上理念，以及寫在課綱裡的闡釋。

素養的內容向度

前面說過PISA的評量對象是15歲青少年，因此它對高中階段的素養評量幫助有限。如果讀者早先讀到這個說法時，並無異議，表示你已經同意：素養須考慮其內容的程度差異。

先不管每個人心目中的「素養」定義為何，假如我們宣稱小學階段的所有數學課程內容都屬於素養，或許大家都同意；但是如果宣稱國中階段的數學課程內容全都屬於素養，或許有些人就會遲疑了。例如「三角形的內角和」可能在大家心目中屬於素養，但是「凸多邊形的內角和」可能就有人遲疑。再例如「比例式」可能在大家心目中屬於素養，但是「三連比」可能就有人遲疑。再舉一個極端的例子，假如我們設定十二年國教的目標，是要畢業生具備有如王國維的中文素養，林語

堂的英文素養，和陳省身的數學素養，豈不妙哉？但是大家都知道這只是說空話而已。由此可見，大家心中對於素養的內容程度是有一把尺的。

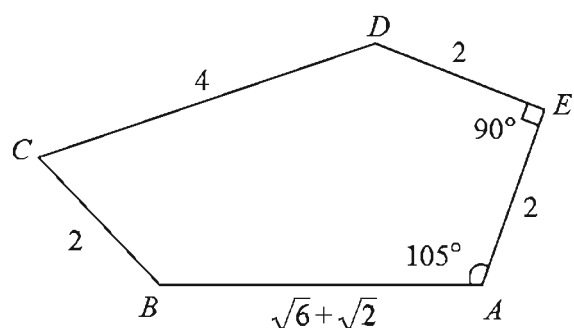
「素養」可以有各種層次，當我們用另一個名詞「國民」或「核心」加以限定，並且當作課程綱要之最高指導理念的時候，就有更明確的內容範圍了。本文的要旨之一，就是要標舉「終身學習」觀念，認為它便是取捨素養課程之內容範圍的依據：為支持終身學習之所需。

假設我們將素養課程的內容設定在「支持終身學習」的水平上，雖然還是有值得爭辯的課題，但是起碼有了一個堪稱客觀的標準。以這個標準來辯論「凸多邊形的內角和」和「三連比」是否屬於素養，雖然我不能預測辯論的結果，但是可以想像正反雙方將會提出哪些證據了。

假設（只是假設）國中數學老師決定「凸多邊形的內角和」和「三連比」不屬於「素養」內容，難道它們就該從國中數學刪除嗎？技術型高中的數學老師或許沒意見，但是普通高中的數學老師可就難以接受了。這個假設的情況彰顯一個觀念：十二年國教的數學課程不能僅針對「素養」的目的，還要肩負「學科」的責任。

所謂「學科」內容並不是「數學系」的學習內容，而是為了下一階段的學習而預備的數學知識與能力。前面說過，小學階段的數學教育目標，可能全是為了「素養」，但是國中階段就未必了，高中階段更不能僅注重「素養」而忽略「學科」任務。

假設我們接著要討論「凸多邊形的內角和」和「三連比」算不算國中階段的「學科」內容？這個議題就不能僅在國中階段的範圍內討論，而要把視野轉移到高中階段的需求（技術型或普通型）。就普通高中而言，凸多邊形是經常運用的數學物件，就算不必背誦內角和公式，但是將多邊形切割成三角形的思維方法，卻是相當基本的。例如106年學測第11題以新發現的密鋪五邊形（如右圖）入題，考生就需要具備三角形切割的基本能力。所以我猜高中數學同仁



應該會贊成「凸多邊形的內角和」是國中階段該學習的數學「學科」內容。

但是高中數學用到「三連比」嗎？有些老師可能用三連比來解釋空間向量的平行（係數積），也可能用三連比的符號來歸納二元一次聯立方程式的解數量：

$$\text{若 } a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 \text{ 則方程組 } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ 有無窮多組解，}$$

若 $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ 但是 $a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$ 則方程組無解。

不知道高中老師們還有什麼例子？如果僅有這種層次的需求，高中老師或許認為可以在需要的時候自己教，而且可能不需要國中階段「將兩組比轉化為三連比」的技術。經過這樣考慮，或許「三連比」就不算學科內容了（僅為舉例）。順帶一提，108數學課綱將「三連比」從七年級挪到了九年級。

如果（只是如果）「三連比」既不算素養內容也不算學科內容，難道是說它完全無用嗎？當然不是，不只是「三連比」，哪怕是「九連比」都可能在特定專業裡有用，例如很可能是烹飪和烘焙的必備知能。別忘了「素養」和「學科」教育的後面，還有「專業」教育。三連比乃至於九連比，可以在特定的專業課程裡學習。分析這三種層次的教育，是課綱設計者的職責，本文不再多寫。

以上舉例，讓我們站在高中立場看國中階段的數學課程，現在要將同樣的思維類比到高中階段數學課程內容的討論。普通高中並不從事「專業」教育，所以普高的數學學習內容僅有「素養」和「學科」兩種目的。總結性的「素養評量」應該是針對「素養」部分的課程內容所做的學習評量。

前面指出數學領綱的第一條理念為「數學是一種語言」，而「素養」則著眼於支持「終身學習」。融合這兩個觀念，數學的「素養」內容以「終身學習所需的語言」為判斷原則，而108數學課綱的高中階

段，大致把素養內容安排在十年級和十一年級的B類課程。領綱的內容選擇，一定還有可商榷之處，也有許多對現實的妥協：例如虛數 i 、入門的推論統計和最單純的微積分觀念，都不在素養內容之列；這些議題值得我們持續地討論。

普通高中數學課程的「學科」內容，就像國中階段一樣，並不能侷限在高中階段本身來討論，而要考量下一階段的學習。普高學生幾乎全部成為大學生，高中數學的「學科」任務不是為了準備大學的數學專業，而是為了準備大學泛理工商管之專業學系需要的共同數學相關課程。就像國中數學的「學科」內容應該考量高中的需求，高中數學的「學科」內容也該考量大學的需求。大學雖然學系紛沓，但所需的共同數學基礎，本質上可歸納為以下四種課程：

微積分、線性代數、統計、計算機原理

它們有時候會被冠以其他名稱（例如管理數學、矩陣計算、計算機概論等），但本質上就是上述四門課的內容。108數學課綱的高中階段，大致把學科內容安排在十一年級的A類課程，和十二年級的選修數學甲、數學乙。形成性的「素養評量」可以涵蓋這些內容，但是總結性的「素養評量」就不適合涉及這些「學科」內容了。

回顧第一節提出的疑問1和2，根據以上論述，作者認為「做三次平方得到8次方」應屬國中階段的素養內容，而「求解 $b^8 = 81^3$ 」應屬高中階段的素養內容，因為它們分別是關於「次方」和「方程式」這兩個數學基本詞彙的最基本語言，如果不能掌握，則嚴重影響未來的終身學習。

肆 素養的表現向度

既然整個課綱都是素養導向的，而課綱以「學習內容」和「學習表現」來陳述課程目標，「素養」也可以拆開「內容」和「表現」兩個向

度來討論。前一節論述素養該有內容的層次，但這一節卻想要指出，素養的表現並無層次。雖然在掌握內容的高度和運用之妙的功力上，人人素養不同，但是素養的表現卻全都可以用李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏教授的「國民數學素養」來概括描述：

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能，並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效與他人溝通觀點。

想要深入了解上述不算太短的「數學素養」一句話定義，應該讀李國偉教授等人的完整報告。以下，作者針對高中階段的數學內容層次，抓出幾個關鍵詞，為「素養評量」做一些不算太長的闡述。

一 個人的

合作固然重要，但素養是個人的。在學校裡，學生應該經歷各種合作學習與群策解決問題的活動，但數學素養的評量是個人的評量，不必刻意關注合作解題的能力。關於這一點，臺灣的評量向來如此，不必特別改變什麼。

二 辨識

這是數學素養的一項關鍵能力和「態度」，以前卻鮮少置入評量。教師或許要問：既然是數學考科，題目當然是數學的，哪有機會考學生「辨識」問題與數學的關聯？此言甚是，但考科之間不無互相串通的可能。例如106年國中會考〈國文〉科試題第22題，幾乎是一道數學題；詳見附錄2。這一題不見得需要數學的「辨識」能力，也不見得深獲國

文、數學老師的共同讚許，但已經開啓了一種想像，令人期待未來的發展。在這個可能性上，「辨識」的評量是可想像的。

即便是在數學考科裡，也能設計「辨識」能力的試題。例如106年數學學測的第1題，不論在內容上及在行為上，都能算是「素養」導向的試題；只可惜命題委員操之過急，使得這一題難度過高（答對率53%），雖然把它放在第1題，卻成為鑑別前40%考生的題目。附錄3試將它改編成題組，並試著置入非選題，除了呈現素養評量的可能樣貌以外，也同時嘗試將書寫作答的題型，分散置入題組之中的命題方法。

參閱附錄3，第1小題屬於比較傳統的辨識，作者預期前80%的考生能夠選出正確答案，第2小題則較為開放，需要「辨識」能力；因為是書寫題，也評量了「溝通」能力。當然兩個小題都需要運用數學知識與技能，就毋須贅言了。

三 工具與資訊

在教學、學習、評量中引進「計算機」工具，是108數學課綱最關切的一項措施。作者個人甚至以這個項目的成敗，判定本屆課綱變革的成敗。在現今社會，一個不含工具與資訊能力的教育，根本沒有資格談論「素養」。

所謂工具當然不僅於計算機（calculator），課綱同仁已經在許多媒體上表明心跡：為了讓全體學生一次到位，並顧慮大型考試的現實考量，也因為發展適切的教材教法需要時間，本屆課綱只希望能在「計算機」上跨出第一步。不管這一步有多小，畢竟我們過去三十年都沒跨成。不論這一步有多小，總勝過裹足不前。

所謂資訊當然也不僅於維基百科和搜尋引擎。PISA已經試辦上網評量，許多公私立評量機構與研究單位，也正在積極研發「安全的」網路評量平臺。例如國家教育研究院前任院長柯華葳教授，曾經主持一個前導計畫，試圖創造一個「可搜尋、可交談」的網路評量環境。融入資訊的教學，可以盡情在課堂裡發揮，但是融入資訊的評量，目前的確非常困難。所以本文按住這個話題，不再談論。

在「計算機」融入教學方面，課綱已經在學習內容的「參考教具」中提示其用途，數學領域《課程手冊》（國家教育研究院，2019）會儘量闡述其用意，編撰教科書的同仁也已經在發展教材。

在「計算機」融入評量方面，我國的經驗甚少，需要積極向國外取經，也必須依據我國課綱內容和特殊品味，設計新的評量題目。但是，新題目固然指日可待，但最好還是能從現有的題目出發，逐步修改，拾級而上，在過程中累積命題經驗與創造力。以下建議四個修改舊題的步驟。

第一步：容許攜帶計算機。這是最不費力的一步，只要容許學生在大小考試使用計算機，就可以了。踏出這一步，至少讓老師注意哪些題目不必再問，而哪些題目最好換個方式問。例如：第一節提出的疑問3，如果可以使用計算機， $3^{3/2} \approx 5.2$ 就僅是操作而已，是否還有評量的必要？得視評量目標而定。

第二步：回答估計量值。數學處理「數」，但真實世界需要的經常是「量」，簡單的說，「量」就是「附加單位的數」。這個步驟就是在舊應用問題的最後，要學生在指定單位與指定精度下，寫出答案的估計值。此步驟幾乎不影響題目也不影響解題過程，只是在最後藉由作答的過程，提醒學生此題的現實意義而已。例如：一個應用問題的答案如果是 $\sqrt{72}$ ，單位是公尺，以前可能要求學生寫「 $6\sqrt{2}$ 公尺」，但比較符合情境的答案或許是「8.5公尺」或甚至是「八公尺半」。

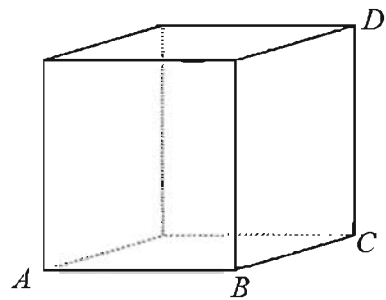
第三步：採用擬真數據。以前，高中教師設計關於三角測量的題目時，總要精心規劃特殊角給學生作答。特殊角是教學過程中方便舉例的權宜之計，但是接近真實情境的問題，不一定總能使用特殊角。引進計算機之後，試題可以更留意情境的真實性與合理性（符合常識），而不必受到特殊角的拘束。

第四步：發揮新增物件。108數學領綱因應計算機的融入而新增了少許物件，例如三角比的反查（不是反三角函數），還有角度的十進制與六十進制轉換（度分秒）。這些新物件都不是學習的「主題」，而是讓計算機搭配慣有課程，做一點點擴充，以提高數學課程與真實世界連

結的可能性。

舉例而言，運用數學知識，我們以前就能計算某角的正弦、餘弦或正切。但是，真實情境可能想要估計那個角究竟有多大（或多小）。以前我們只能算到某角的三角比，然後就在那裡停止。此後，我們可以用計算機從三角比反查角的大小。

借用106年學測第4題的正立方體（如右圖），以 ABC 平面為參考水平面，若問從 B 點望向 D 點的仰角，則屬於國中階段內容的素養，即便准許使用計算機，可能大部分學生不用它也能回答。但是，若問從 A 點望向 D 點的仰角，恐怕就得藉助於計算機



了。高中數學本來就有許多三角測量或空間向量的題目，需算出夾角的三角比；這些題目僅需很小的增修，就能融入反查三角比。

有些情境問題的夾角非常小，例如天文學中的「秒差」，以度為單位的量值並不適用，應該轉用「秒」為單位，例如 0.0007° 大約是2.5秒。這個步驟是計算機的一個簡單應用，而且僅是數學題目的一個小小延伸而已。

以上四個步驟是老師們可以將舊題目改編成容納計算工具之新題目的簡單作法。從這些簡單的改變開始，創新的題目可望如潮水般湧現。

四 描述、模擬、解釋與預測

這四個動詞，可謂數學教育「無法承受的輕」。數學是如此的美好與實用，其威力與影響是如此之廣袤而深邃，但是因為在學習過程中，這四個動詞都被剝奪了它們的舞臺，導致許多人心目中的數學，完全是偏見與誤解。以下可能作者個人的偏見：我國過去的數學評量試題，完全沒有為這四個動詞設計題目的意識。所以，現在我們要一起為這四個動詞建立「問題意識」，其實這就是素養所謂「態度」的意

思。除了自己思考以外，多參加志同道合的討論社群，多參考國外的考題，應該都有幫助。

附錄3題組的第2小題，透過書寫，或許搭上了「描述」與「解釋」的邊。再看106年學測第4題（原題在附錄4），「描述」兩質點距離特色的方式之一，是「對稱於0.5秒的距離」。而「解釋」此對稱性的一種方式，是說明把立方體旋轉，使得 D 、 C 兩頂點與 A 、 B 兩頂點的位置互換，就可以看出例如0.1秒的距離和0.9秒的距離相等。

進一步的數學描述，譬如令 $f(t)$ 表示時刻為 t 的兩質點距離，如何以函數符號表述「 f 對稱於 $t = 0.5$ 」？另一個需要「解釋」的例子是， f 在立方體之內的定義域是 $0 \leq t \leq 1$ ，如果推廣 t 到所有實數，則 $f(t)$ 的意義為何？順著這個脈絡，要學生「預測」當 t 很小或很大的時候， $f(t)$ 是否仍然對稱於 $t = 0.5$ ？而當 t 愈來愈大， $f(t)$ 是會單調地愈來愈大、會大小震盪，還是會愈來愈接近某個定數？最後，「解釋」 $f(0.5)$ 發生最小值的方式之一，是 $f(t)$ 對稱於 $t = 0.5$ 且 $f(t)$ 在 $t \geq 0.5$ 嚴格遞增。

五 數學思維方式

籠統地說，數學思維方式的特長就在於數學模型的建立。數學模型可大可小，在高中階段因為缺乏微積分技能，也沒有足夠的程式寫作技能，所以很難想像大型數學模型的可能性。至於小型的數學模型就是「公式」；我們雖然不主張學生「背公式」，但是說實話，數學真正的威力不就在於「公式」嗎？公式本身沒有錯，需留意的是我們教公式和考公式的「態度」。附錄3第1小題其實已經給了「全校師生玩過寶可夢比率」的公式，但那其實僅是原始數據的直接運用，而第2小題進一步運用間接數據追求「最簡公式」，雖然不是直接地評量數學思維方式，也算是體現了數學思維方式的特長。

數學思維方式的另一項特長是使用符號輔助思考；選對了符號，可以簡化思考的程序，還能增進思考的系統性。這件事說來簡單，但是它的深處潛藏著數學的成熟度，甚至可謂數學的品味與美感，是相當高

層次的思維。譬如附錄3的改題，用大寫和小寫的字母 A 和 a 分別表示學生的總人數和玩過寶可夢的人數，相信是許多數學同仁會不約而同採用的符號系統，但是卻未必是高中生能表現的能力。數學教學與解題過程中，我們不斷地示範這種思維方式的特長，卻可能少了「臨門一腳」，沒讓學生意識到：符號的設計與運用，是數學課要學習的重點之一。106年學測第7題，是一道無所謂公式而很需要善用符號做有系統之思考的問題，題幹如下：

小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：

(甲) 每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次

(乙) 連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食

根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

這一題不到三成的答對率，僅有最頂端的10%考生能處理此題，顯見這方面素養的難度，也提醒我們更需要正視「數學思維方式」在教學過程與教育目標上的重要性。

上述所有考量，都難以透過選擇、填充題型來評量，因為它們本質上都需「數學溝通」，那也就是我要指出的最後一個關鍵詞了。

六 溝通

如果要將數學素養的行為表現總括一個詞來講，本文認為最重要、最核心的，就是「溝通」。國內已經注意到培育這項能力的重要性，而選擇、填充題型實在難以評量此項，我們樂見國內大型考試逐漸「恢復」非選題。但是，非選題的閱卷成本（包含其公平性與可信度）也是必須考量的，行之多年的指考非選題配分方法，值得沿用；但指考的非選題數量太少，因此涵蓋的概念太少，配分又太重，不利素養評量的普

遍性推展。因此PISA的題組式「簡答」題型，也是值得我們琢磨的命題方法。附錄3第2小題便是一個盼能拋磚引玉的初級嘗試。

伍 結語

本文是根據民國106年5月17日至6月7日之間，作者在建國中學與劉柏宏教授、數學學科中心「素養多元評量小組」共同研習思考的結果，以及後來陸續在心測中心討論國中數學會考的發言（包括張鎮華教授的發言），綜合而成。此文原先以通訊的方式，發表於高中數學學科中心的電子報，假想的讀者是國、高中數學教師，但是也幸運地獲得學術領域同仁的關注。

參考文獻

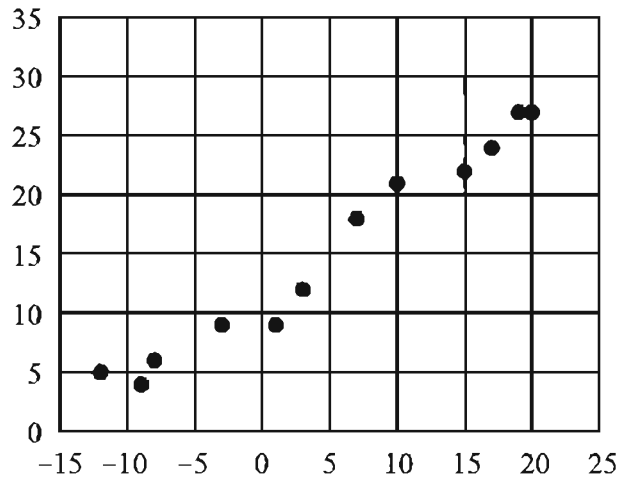
- 張鎮華（2017）。數學學科知識也是數學素養。高中數學學科中心電子報，123，1-8。
- 教育部（2018）。十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要。臺北市：教育部。
- 國家教育研究院（2014）。十二年國民基本教育課程發展指引。新北市：國家教育研究院。
- 國家教育研究院（2019）。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程手冊。新北市：國家教育研究院。
- 單維彰（2009）。考試領導教學了嗎。科學月刊，471，15-16。
- 單維彰（2015）。數學教育面臨的大議題。數理人文，3，16-17。
- CCSS Initiative (2016). Key Shifts in Mathematics. www.corestandards.org/other-resources/key-shifts-in-mathematics/

附錄1

106年數學學測第5題。

· 原題

下圖是某城市在2016年的各月最低溫（橫軸 x ）與最高溫（縱軸 y ）的散布圖。今以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸且最高溫為縱軸重新繪製一散布圖。試依此選出正確的選項。



(4) 最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱。

· 題組

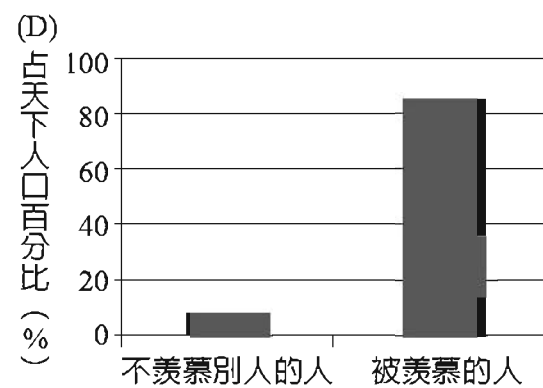
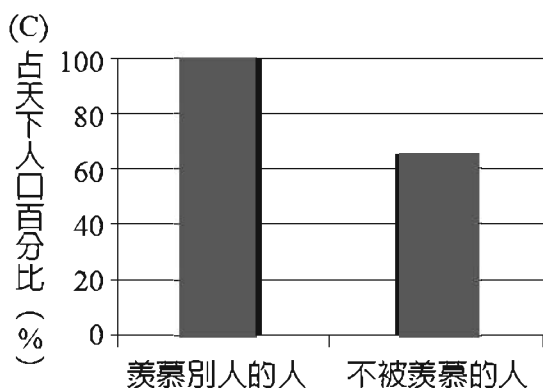
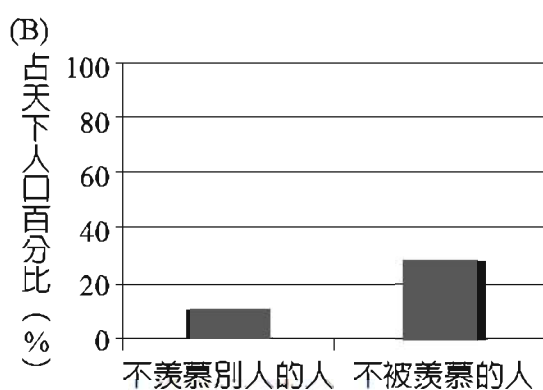
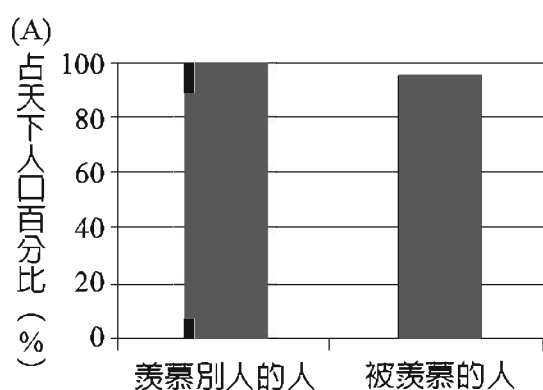
圖A〔圖略〕是某城市在2016年的各月最低溫（橫軸 x ）與最高溫（縱軸 y ）的散布圖。試據以回答以下問題。

1. 以下何者是圖一最下方三個點的數據？〔選項略，各選項的數值皆為整數，評量目標是從散布圖讀出數據。〕
2. 若以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸且最高溫為縱軸繪製另一散布圖，稱作圖B，則以下何者是圖B？〔圖略，畫五幅散布圖讓學生選，其中兩幅在 y 軸的分布與圖A不同，另三幅則相同，而且刻意不讓前三個資料點就能決定答案。評量目標是讀出數據之後重新製圖。〕
3. 試依據圖A和圖B，選出正確的選項。〔選項略，就是原題的選項，評量目標是根據散布圖判斷相關性，並比較兩幅散布圖的相關性相對強弱。〕

附錄2

106年國中國文會考第22題。

周老師在黑板上寫道：「天下沒有一個人從不羨慕別人，只有少數人從沒被別人羨慕過。」她請學生以圖表來表示這句話，下列哪一張圖表最恰當？



附錄3

106年數學學測第1題。

· 原題

已知某校老師玩過「寶可夢」的比率為 r_1 ，而學生玩過的比率為 r_2 ，其中 $r_1 \neq r_2$ ，由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可

夢」的比率之選項。

- (1)全校老師與學生比率 (2)全校老師人數 (3)全校學生人數
 (4)全校師生人數 (5)全校師生玩過「寶可夢」人數

· 題組

已知某校有學生 A 人，其中 a 人玩過「寶可夢」，有老師 B 人，其中 b 人玩過「寶可夢」。試回答以下問題。

1. 以下何者為全校師生玩過「寶可夢」的比率？

- (1) $\frac{a}{A} + \frac{b}{B}$ (2) $\frac{a+b}{A+B}$ (3) $\frac{a+b}{AB}$ (4) $\frac{ab}{A+B}$ (5) $\frac{ab}{AB}$

2. 令 $r_1 = \frac{a}{A}$ 為全校學生玩過「寶可夢」的比率，而 r_2 為全校老師玩過的比率，其中 $r_1 \neq r_2$ ， $r = \frac{A}{B}$ 為該校之「生師比」。試從 A 、 B 、 r 、 r_1 、 r_2 之中挑出最少的資訊（兩個、三個或四個數），做出一條全校師生玩過「寶可夢」的比率公式，並解釋公式的正確性。

附錄4

106年數學學測第4題。

在右下圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A 、 C 同時出發，各自以等速直線運動，分別向頂點 B 、 D 前進，且在1秒後分別同時到達 B 、 D 。請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項。

- (1)兩質點的距離固定不變
 (2)兩質點的距離愈來愈小
 (3)兩質點的距離愈來愈大
 (4)在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小
 (5)在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大

