

登

月

1 9 6 9 0 7 2 0



1.62 m/s

3 8 4 4 0 1

50年前，人類何以登上月球？
50年後，人類又將邁向何處？

焦點評論
從山竹解禁談檢疫

經典專欄
有光就能抗菌除臭？

張昭鼎研討會
素養導向下的教與學

NT\$249

ISSN:0250-331X



9 770250 331001

科技都進步成這樣了， 是否該讓計算機融入數學課程？



單維彰／任教於中央大學。

Take Home Message

十二年國民基本教育第一代數學課程綱要，如何以務實而又謙卑的小工具計算機（electronic calculator），作為數學教育的改變樞紐？藉由計算機融入國中與高中階段數學課程的設計，108 數學領綱企圖讓數學的教學與評量發生本質上的改變（即所謂質變），而這項設計也是數學支持自然科學領域的具體作為……

當計算機進入國高中數學課程

108 數學領綱最重要的興革項目之一，就是在國中和高中階段引進計算機，而小學階段仍尊重筆算與心算的基礎教育習慣，不建議使用計算機。

領綱開宗明義提出數學教育的五大理念，其中一條為「數學教育應培養學生正確使用工具的素養」，這些工具除了計算機外，傳統的直尺、圓規、量角器、三角板和方格紙，甚至是新科技的電腦軟體與智慧型手機應用程式（App），都包含在內。

教師「應」或「宜」在數學課程中教導學生使用計算機的宣告，早在 1975 年就出現在數學課程標準裡。當時的小學階段數學課程還有珠算

的學習內容。按照數學教育前輩的規劃，算盤應該逐漸淡出數學課程，同時以計算機取代。事實顯示，算盤確實淡出於數學課程之外，然而，淡入計算機的規劃卻從未發生。

不同於以往各版課程標準或綱要，108 領綱不僅將計算機的使用寫在理念、教學建議或實施要點裡，還確實將計算機寫進「學習表現」和「學習內容」兩大表格內，明文規定計算機是數學課程的教學目標，因此，教科書和評量試題都應有相對應的內容。

將計算機列為數學課程的教學目標，當然至少要讓學生能「用」計算機，也就是具備操作能力。但是數學教育不僅止於按鍵操作的低層次目標，還

要讓學生有機會藉由工具的協助而理解數學。此外，計算機也同時讓學生有機會藉由解決「擬真」問題時體認數學的用途，進而培育對於數學的正向態度。

最後，計算機也使得學生有機會「探究」數學。由於數學大多是抽象的概念，不同於自然領域通常有實際的觀察對象，如果不使用計算機，數學幾乎沒有任何可觀察、操作的對象。在數學教學中引進計算機，使得數學課在某種程度上也有機會從事觀察、實驗與探究。

因為計算機的操作，數學課程多了一些溝通的約定，特別是在考卷上寫下「標準答案」的需求。所以數學課綱

早在1985年就寫在國中數學課程標準裡



新增了關於概數的約定語言，例如「以三位有效數字作答」約定如何將計算機顯示的結果轉換成特定數值的程序。運用這些關於取概數的約定，可以簡短而準確地溝通概數的規格，將有助於教材和試題的編寫。

是理想，不是理想主義

數學領綱的編製委員，當然對於未來的數學教育懷抱著理想；假如課綱沒有呈現任何理想，那是設計者對不起社會的託付。

可是，有理想並不就是「理想主義」；相反地，數學領綱的委員們非常務實，簡直是現實主義的擁護者。正因為採取現實主義，故數學領綱指定的計算機規格不含繪圖功能，也不能儲存程式。課綱委員手上使用的計算機，定價只有新臺幣 200 元；而課程手冊中建議的 3 款計算機，都是目前國家考試准用的科學型計算機，網路上的標價介於 150~360 元之間，團購的話可以更便宜。

課綱如此謙卑而保守的設計，就是為了**務實**；將工具設定在人人皆能負擔的範圍裡，即便弱勢族群也可經由社會福利的管道提供協助，因此 200 元單價的學習工具應不致於引起社會的撻伐。更重要的是，課綱委員認為必須允許學生帶著計算機進入考場，否則這項興革必將功虧一簣。在臺灣目前的學校氛圍裡，「因為計算機對學習有益，所以就算考試不准用，老

師和學生也都會經常使用它」的主張才真的是理想主義。「考試必須容許學生使用計算機」的主張，並不是什麼偉大的道理，只是秉持教學與課程的一項基本原理：評量是課程的一部分，**評量內容應吻合教學目標**。

若考慮考試的實務限制，電腦軟體、手機 App 顯然都有更高的「危險性」，社會對於公平的疑慮更高，其障礙就更難以逾越，這就是課綱做出如此保守設計的最主要原因。無論是教室裡、課外活動或課後作業裡，師生都可以隨意使用電腦軟體和手機 App，但是考試的時候，課綱僅要求使用計算機而已。

但也由於功能的限制，使得計算機無法作為方程式 / 函數繪圖、向量類型運算（包括統計與數據分析）及程式設計等數學學習的工具。課綱或《說明手冊》對於以上課題的學習工具，都另有建議，但是基於前述考量，未列為必需的內容。長久以來（從民國 64 年以來），「不准使用科技工具」的教育現實，就像一片透明天花板，重重壓在臺灣每位教師和學生的頭上，眼看著科技文明不斷更新，國際同儕的教育內容不斷進步，我們卻全被這片透明天花板壓制在下面而無法成長。

然而筆者相信，只要讓計算機從今（2019）年起真正落實在數學課程裡，這個微小而謙卑的工具，將會成

為刺破天花板的小尖兵，不僅讓數學教育開始質變，也期望自然領域和生活與科技領域能一起呼吸新鮮空氣，乃至於社會領域和藝術領域，當然也不會放棄改變的機會，社會對於數位工具的接受度就有可能逐漸改變。

計算機只是**刺破透明天花板**的開始。所謂行遠必自邇，如果今年走得這一步，便有理由樂觀地期待下一個 10 年的課綱，社會家長及教師同仁將能接受 App 成為全國學生必備的學習工具，同時也在考試中允許使用。如果 108 數學領綱的這一項興革失敗了，則可能仍與民國 64 年寫在課程標準裡的話一樣，只能空談理想，跨不出實踐的第一步。

教學意念：數感與圖感

粗略地說，高中數學的主要學習目標就是**實數的數感與函數的圖感**。計算機的引入，首先將引起這兩項內容在教學方法上的質變，一旦計算機攜入考場，評量的題目也必須立刻質變。

先說實數的數感。實數固然包括整數和分數，但是高中階段的實數，強調的是無理數。學生在小學階段，也許延續至國中階段，被鍛鍊出優異的自然數數感，造就我國國



民傲視全球的心算能力。但是，那樣的數感並不能延續到實數，原因很簡單：實數無法心算。以對數為例，學生被訓練得都能記憶 $\log 2=0.3010$ 、 $\log 3=0.4771$ ，能做出像 $\log 50=2-\log 2=2-0.3010=1.699$ 、 $\log 45=\log(3^2 \times 5)=2\log 3+\log 5=2 \times 0.4771+(1-0.3010)=1.6532$ 之類的計算，能回答諸如「 2^{32} 有幾位數」之類的「應用題」。以上的計算過程，本質上鍛鍊的仍然是正整數的數感：質因數分解，絕非實數的數感。

很多人擔心，使用計算機會折損學生的「計算能力」。然而捫心自問：如果不使用計算機，多少人會算諸如 $1.07^{0.17}$ 、 $\sqrt[3]{17}$ 、 $\log 17$ 、 $e^{0.17}$ 、 $\sin 17^\circ$ 、 $\cos^{-1}(-0.17)$ 之類的實數？既然多數人本來就不會算這些數，那麼用工具來算它們，究竟折損了什麼計算能力？以前因為不使用工具，那些數從來不出現在數學課程裡，學生哪裡有機會獲得數感？同理，考試的問題永遠限定在可以用自然數化簡或者可以記憶的範圍裡，例如，只要涉及三角就必須是 30° 、 45° 、 60° 之類的特殊角，哪有那麼多恰好如此的真實情境呢？所以「擬真」的問題當然也就沒

機會出現在數學評量裡。

以上的限制，都可以用區區 200 元的計算機來突破。不必多麼高科技的工具，只要一台謙卑的掌上計算機，關於實數的教學將可以徹底改變，發生的是教學內容與評量目標的質變而非量變。不論是 STEAM〔註一〕的情境問題，還是援引物理化學生物、地科、地理或公民的跨領域教材，全都有機會進入數學課程。

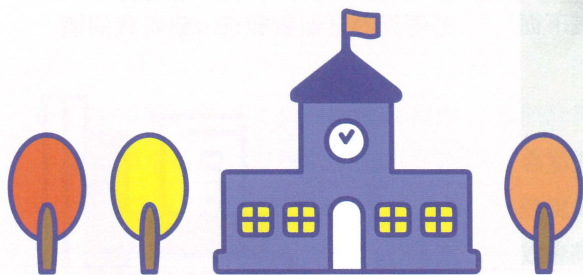
再來要說函數和方程式的圖感（以下僅以函數代表）。這項主題，幾乎可謂高中數學成敗的關鍵。在這個主題上，計算機能夠直接提供的幫助，雖然很有限，但非常關鍵：運用計算機，學生才有機會真正在方格紙上畫「很多」由自變數與應變數決定的點，而獲得函數圖形乃由無窮多點聚集而成的觀念。如今的教學，

因為沒有適當的工具讓學生親自動手做，所以都由教師示範或告知結果。導致非常多學生，當被問及「直線上有幾個點」時，都很有信心地回答「兩個」；被問及「拋物線上有幾個點」時，則比較不確定，有人說三個、有人說五個。

真正有效幫助建立圖感的工具，可能是新加坡等國採用的繪圖計算機。最近出現的一款 App：Desmos，很明顯地優於繪圖計算機。因為它目前僅能安裝於電腦（瀏覽器）或行動裝置上，所以它或可成為課堂上的教學利器，但是進入考場則還是會讓人擔心。不過，由於 Desmos 可在安裝後離線使用，所以只要能斷網，還是不難成為考試的工具。繪圖計算機和 Desmos 之類的工具，相對於 Geogebra 之類的軟體，教學上最主要的差異在於：前者比較容易人手一



(Pixabay)



機，在課堂上讓學生跟著做或自行探究，放學後也能在家操作。

突破想像障礙，提升教學效率

計算機在數學教育上還有一份更重要的價值：它能提高教學的效率。前面說過，實數不能筆算，如果不使用計算機，根本不能觀察，必須完全根據概念來想像。這一層障礙，使得部分學生失去學習的機會：如果一開始無法想像，就很難跟上學習的進度，坐在教室裡也不具有任何意義。大家都知道，數學教室裡經常有神遊太虛、甚至直接趴下去睡覺的學生。使用計算機之後，使得部分數學概念變成可以觀察的數字，降低了學習的門檻，而且就算還沒有獲得概念，也至少能夠操作與實驗，不會無事可做。

位於建國中學的數學學科中心，在去（2018）年邀請前導學校的數學同仁們，針對新領綱 10 年級第一次段考前的學習內容，進行教案設計與教學實驗。所有參與實驗的教師，全都認為將計算機融入數學教學之後，最明顯的改變莫過於教室內的氛圍：起碼不再有學生自外於學習，人人得以參與學習。對數學老師而言，這是最珍貴的回饋。

實驗教學的內容不一而足，不論主題為何，老師們發現的共同點包括：學生操作工具的能力超乎預期。雖然老師本來就預期學生操作計算機的困難不大，但是實驗結果顯示，學生習得

操作方法及運用計算機歸納出數學性質的猜想，所需的時間還是短得讓老師驚訝。

總結教學實驗的心得，計算機融入數學課程，能夠增加學生在課堂內的參與率、提高獲得實數（無理數）數感的學習機會，並讓真實情境（個人的、社會的、職業的、科學的）進入數學課程的大門。

評量， 就是課程的一部分！

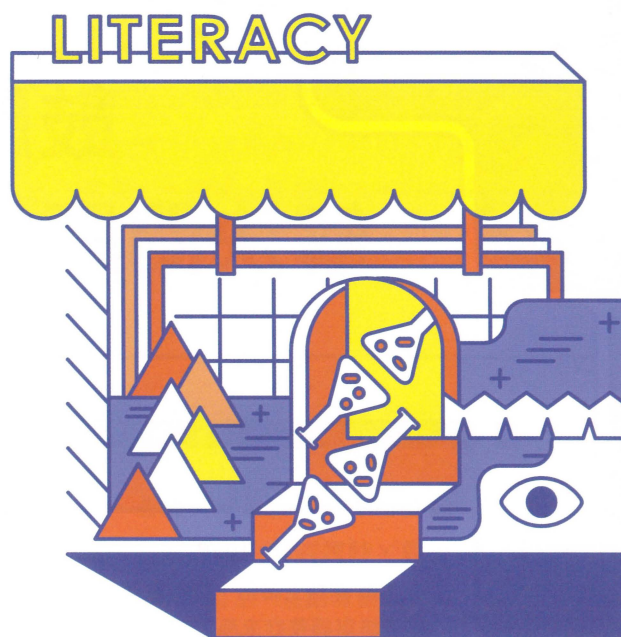
在教育的學理上，課程本來就包含教材、教法、評量。在臺灣的教育現實上，學習很難不去關心考試成績。高中數學學科中心正奮力推動 108 數學領綱，在計算機融入數學課程方面，具體目標是希望全國的高中都能從 108 學年的第一次段考開始，容許學生攜帶計算機進入數學考場。學科中心已經針對第一次段考的範圍，邀請種子教師為新課綱的學習內容和學習表現嘗試素養導向命題。

在命題單上，學科中心明列以下類型的數學素養：

- ▲ 數學學科知識的素養
- ▲ 應用到情境的素養
- ▲ 正確使用計算機工具的素養

目前已經建立了大約 60 題的題庫，可作為全國所有高中第一次數學段考的參考試題。這些試題經過兩名教授的兩段審查與修訂，數學和文字品質

大約30題



都應相當可靠。命題老師來自全國各地，題目的難度分布很廣，所以題庫的適用範圍也應該可以很廣。

寫到這裡，筆者還是必須強調一點：大考中心才是最後一哩。在截稿的此時，大考是否准用計算機，還沒有定論：既沒有同意，也還沒拒絕。期望數學或自然科學領域的工作同仁，能一起支持校內數學段考准用計算機，如果有機會的話，也希望各位能贊成大考中心舉辦的數學考科准用計算機。

這台單價 200 元的小工具，有機會讓全臺灣的數學教育發生質變，甚至擴展到數學領域之外。

〔註一〕 STEAM (Science, Technology, Engineering, Art, and Mathematics) 是一種跨學科的教學方法，結合科學、技術、工程、藝術及數學五大領域的知識，讓學生能在學習過程中以多元的知識解決問題。

給魚？供釣竿？ 還是成為那釣竿製造者？

李依庭／本刊主編。

Take Home Message

過去，坐在同一教室、翻同一頁教科書、讀著一樣的章節、聽老師上相同課程，是人們所熟悉的同班同學。而在這波新教育浪潮中，將進行「每間學校、每個科目、每堂課程皆不盡相同」的目標，打造身旁鄰座不再侷限於班級同儕，而是興趣選課下校園同窗齊聚的一幅景象。

縱使放眼全球，人口數不斷逐年攀升，不過，在臺灣近年來少子化的現象不減反增，小家庭人口數的組成已成大宗，更為一大趨勢。正因如此，父母無不投注大量金錢與心力，希望讓孩子能贏在起跑點。而以國家發展角度而言，則期望將莘莘學子培育成可用之將才，以提昇國際間競爭力，更為國家未來的棟樑。

有鑑於此，教育部發布「十二年國民基本教育課程綱要（108年課綱）」，於今（2019）年8月開始於中小學及高校全面實施，課綱中強調以「素養」取代學科知識的直接給予和基本能力的學習，並加強「實作」課程，目標是為培養學生具備思考性、創造性和解決問題的核心特質，以適應生活、面對未來挑戰。

然而，在這次教育部所進行 108 課綱的變革中，帶來的不只是對學生在

課程中學習方向的改變，更影響教師在教學面的策略與脈絡，因而存在著許多的不確定性。所以，第 26 屆張昭鼎紀念研討會廣邀設計此課綱的教育人士、深耕學界多年的大學教授與高中教師，一同探討、分享新課綱的理念與實際面。在幫助學生了解應考目標之餘，更提供教育工作者因應新課綱的一平台。

各學科跨領域的整合

國語、英文、數學、自然、社會，是每個人自小學開始便觸及到的五大科目。即使升上國中或高中，國語轉為國文；自然變成理化，抑或是物理、化學、生物和地球科學；社會變成歷史、地理和公民，但這些不過是科目的細分或延伸，並不影響知識本質的傳遞。

然而，隨著中等、高等教育的洗禮，學生在分科教學之下能準確回答各科

目中的單元問題，卻逐步喪失將各領域知識拼湊答題的整合能力。所以，大學考試入學中心主任張茂桂表示 108 課綱為消弭此現象，在往後的升學考試上，將嘗試各學科的結合與跨領域的命題，期望學生將人文社會、歷史文化和科學知識等整合並運用在日常生活和課程探究情境上。

數感與圖感

回憶起小時候求學時期，在數學課堂上若拿起計算機，便會被老師指正應該親自運算，計算機彷彿是一個萬惡不赦的存在。然而，在最新 108 課綱中卻興起「將計算機融入數學課程」的革命。

數學，是一種語言，而數感與圖感，則是學習這項語言的目標。因此，如何提升其學習效率，計算機，就是一個用來幫助、理解數學的重要工具。如同現代人至一陌生地時已習慣打開 Google 地圖來找尋目地的，計算機的使用是數學課堂上最基礎的輔助，為學生帶來的是提升無理數的數感和函數圖形圖感的相關能力，重要的是更能提高學生在課堂的參與度，讓學生藉由計算機的實作啟發興趣，面對數學不再只是恐懼和排斥。



中央大學單維彰教授表示，新加坡在 1980 年代初期將科學型計算機融入中學數學課程的教學與評量，且自 2006 年起開始使用繪圖計算機。而在臺灣，儘管還未全面實行，但從初步的教學實驗中可觀察到融入計算機的數學課程不僅可幫助教育者的科學教育理念的設計與實踐，更能加強學生在探究與實作上的能力。

不一樣的課堂風景

在自然領域中，108 課綱普通高中自然科領綱提出希望在實作的過程中，針對物質與生命世界中培養學生**發現問題、認識問題、解決問題及提出結論與表達溝通**的能力。所以，在探究式教學中，自然科老師的專業已不再是傳授知識的教導者，而是在科學探究中協助學生完成每項實驗歷程的引導者。學生的角色也從被動的聽課轉變成提出問題、規劃與研究、論證與建模和表達與分享的主動學習者。而教師則在過程中一步步的引導學生找出答案，從做中學培養學生的科學素養。

臺南一中物理科何興中老師表示，探究與實作課程的實踐，更獲得許多學生正向的反饋，實驗步驟的設計、親自驗證和同儕間相互討論等都是引發他們對自然課的好奇興趣的因素。此外，何興中也分享去（2018）年由物理教育學會舉辦的探究與實作競賽中，臺灣高中生普遍在**規畫與研究、論證與建模**的答題能力較為突出，而較不擅長回應**發現問題、表達與分享**相關的問題。因此，期望透過 108 課綱探究與實作課程的實踐，平衡學生在科學知識和洞察研究的能力。

長榮大學環境資訊研究中心主任賴信志則表示，以涵蓋在自然課程中的地球科學為例，它是一個具有統整自然學科及跨學科優勢的科目，所提及的天氣氣候、環境變遷和海洋變化等都是與學生生活中最為密切相關的。所以，在課程的設計上，便能將地球科學融入各項自然學科中，像是藉氣候變遷引導實作綠能電池的物理課，以發揮出地球科學跨領域的特色。

離不開的電腦時代

生活在現今社會中，電腦的使用已是一項日常中的基本需求。然而，因著人類對 3C 產品的依賴和對各種電子商品需求的日益增加，再加上近年來機器學習、深度學習和人工智慧等名詞層出不窮的出現，宣告著世界即將邁向一個資訊科技的時代。也因此，程式設計遂成為運轉此項技術的一顆重要齒輪，而以**運算思維**為導向的教學，也成為 12 年國教中資訊科技課綱的一大重點。

臺灣師範大學資訊教育研究所教授林育慈認為，現代人身處在一個運算的時代，生活中處處都是運算，所以，在期望能提升生活品質的前提下，培養運算思維能力已不再只是電腦工程師或資訊相關科系，更應落實在各領域中。舉例來說，土木工程、高樓建造從以往的親手繪圖到現今模擬軟體的測試，將大幅提升建築結構的安全性；生物學家早期只能透過人工方法定序，現在能透過電腦演算法進行基因序列的比對，縮短實驗時間外更能快速分析實驗之後的統計問題；而即便是從事音樂、美術的藝術家，其藝術的創作透過資訊科技的輔助能讓作

品更別具一格，許多互動藝術更是藉由資訊技術的加乘而蔚為完整、精采；社會學家、人文學家也能透過數據分析人類行為或商業模式等，延伸其研究並提出不同的結論或見解。

而要如何培養運算思維，以往的傳統教學不外乎是指令記憶、按照步驟操作，缺乏思維下培養出使用者而非創造者。有鑑於此，新課綱中所提及的增進運算思維，指的並非是數學計算技能、軟硬體按步驟的操作或程式的語法知識等，而是**希望以資訊科技的知能為基礎，發展且具備有效運用電腦來解決問題的思維能力**。在了解軟硬體運作之後進而活用、甚至開發出新設計解決遭遇的大小問題，成為善用電腦程式的創造者，以面對科技時代的挑戰。

結語

2015 年，芬蘭開始推動情境式學習，主張「新的學校課程將強調廣泛的技能，而不是在學科主題中學習事實」。今年，108 課綱即將在臺灣上路，將學習素養列為一大目標，著重培養學生在生活情境中，**真實運用知識的學習表現**。而教導者則運用資源，帶領學生觀察、探究和實作等活動，重視學生在知識、能力及態度上與實際生活的連結。期望透過課綱的改革，能看到學生們於生活態度上的改變，在跨出課本單一思維後，從多元學習體驗中認識自己。

延伸閱讀

2019 張昭鼎紀念研討會—108 課綱初登場：科學素養導向的理想與實際（上午場）：<https://bit.ly/2ZrKAHT>。

科技都進步成這樣了， 是否該讓計算機融入數學課程？

單維彰·民國 108 年 4 月 27 日

刊登於《科學月刊》595（2019 年 7 月）58-61

當計算機進入國高中數學課程

首先要跟讀者說明，108 數學領綱最重要的興革項目之一，就是在國中階段和高中階段引進計算機，而小學階段還是尊重筆算與心算的基礎教育習慣，不建議使用計算機。

領綱開宗明義提出數學教育的五大理念中，其中一條為「數學教育應培養學生正確使用工具的素養」，除了計算機以外，傳統的直尺、圓規、量角器、三角板和方格紙等工具，新科技的電腦軟體與智慧型手機應用程式（App），都包括在內。

教師「應」或「宜」在數學課程中教導學生使用計算機（電算器）的宣告，早在 1985 年就開始寫在國中數學課程標準裡，而且當時的小學階段數學課程還有珠算的學習內容。按照數學教育前輩的規劃，算盤應該逐漸淡出數學課程，同時逐漸代之以計算機。事實顯示，算盤確實淡出了數學課程，然而，淡入計算機的規劃卻從未發生。

不同於以前各版課程標準或綱要，108 領綱不僅將計算機的使用寫在理念、教學建議或實施要點裡，還確實將計算機寫進「學習表現」和「學習內容」兩大表格內，明文規定計算機是數學課程的教學目標，因此，教科書和評量試題都應有相對應的內容。

將計算機列為數學課程的教學目標，當然至少要讓學生能「用」計算機，也就是具備操作能力。但是數學教育不僅止於按鍵操作的低層次目標，還要讓學生有機會藉由工具的協助而理解數學。此外，計算機也同時讓學生有機會藉由解決「擬真」問題時體認數學的用途，進而培育對於數學的正向態度。

最後，計算機也使得學生有機會「探究」數學。由於數學大多是抽象的概念，不像自然領域通常有實際的觀察對象，如果不使用計算機，數學幾乎沒有任何可觀察、可操作的對象。在數學教學中引進計算機，使得數學課在某種程度上也有機會從事觀察、實驗與探究。

因為計算機的操作，數學課程多了些溝通的約定，特別是在考卷寫下「標準答案」的需求。所以數學課綱新增了關於概數的約定語言，例如「以三位有效數字作答」約定了如何將計算機顯示的結果轉換成特定數值的程序。運用這些關於取概數的約定，可以簡短而準確地溝通概數的規格，將有助於教材和試題的編寫。

是理想，不是理想主義

數學領綱的編製委員，當然對於未來的數學教育懷抱著理想；假如課綱沒有呈現任何理想，那是設計者對不起社會的託付。

可是，有理想並不就是「理想主義」；相反地，數學領綱的委員們非常務實，簡直是現實主義的擁護者。正因為採取現實主義，故數學領綱指定的計算機規格不含繪圖功能，也不能儲存程式。課綱

委員手上使用的計算機，定價只有新臺幣 200 元；而課程手冊中建議的 3 款計算機，都是目前國家考試准用的科學型計算機，網路上的標價介於 150~360 元之間，團購可以更便宜。

課綱如此謙卑而保守的設計，就是為了務實；將工具設定在人人負擔得起的範圍裡，才不會造成「弱勢族群」的負擔，或者至少可經由社會福利的管道提供協助，因此 200 元單價的學習工具應不致於引起社會的撻伐。更重要的是，課綱委員認為必須允許學生帶著計算機進入考場，否則這項興革必將功虧一簣。在臺灣目前的學校氛圍裡，「因為計算機對學習有益，所以就算考試不准用，老師和學生也都會經常使用它」的主張才真的是理想主義。「考試必須容許學生使用計算機」的主張，並不是甚麼偉大的道理，只是秉持教學與課程的一項基本原理：評量是課程的一部分，評量內容應吻合教學目標。

若考慮考試的實務限制，電腦軟體、手機 App 顯然都有更高的「危險性」，社會對於公平的疑慮更高，其障礙就更難以逾越，這就是課綱做出如此保守設計的最主要原因。無論是教室裡、課外活動或課後作業裡，師生都可以隨意使用電腦軟體和手機 App，但是考試的時候，課綱僅要求使用計算機而已。

但也由於計算機的功能限制，使得它無法作為方程式函數繪圖、向量類型運算（包括統計與數據分析）及程式設計等數學學習的工具。課綱或《說明手冊》對於以上課題的學習工具，都另有建議，但是基於前述考量，未列為必需的內容。長久以來「不准使用科技工具」這項教育現實，就像一片透明天花板，重重壓在臺灣每位教師和學生的頭上，眼看著科技文明不斷更新，國際同儕的教育內容不斷進步，我們卻全被這片透明天花板壓制在下，無法成長。

然而筆者相信，只要讓計算機從今（2019）年起真正落實在數學課程裡，這個微小而謙卑的工具，將會成為刺破天花板的小尖兵，不僅讓數學教育開始質變，也期望自然領域和生活與科技領域能一起呼吸新鮮空氣，乃至於社會領域和藝術領域，當然也不會放棄改變的機會，社會對於數位工具的接受度就有可能逐漸改變。

計算機只是刺破透明天花板的開始。所謂行遠必自邇，如果今年走得這一步，便有理由樂觀地期待下一個 10 年的課綱，社會家長及教師同仁將能接受像 App 這樣的工具成為全國學生必備的學習工具，也在考試中允許使用那些工具。如果 108 數學領綱的這一項興革失敗了，則可能仍與民國 74 年寫在課程標準裡的話一樣，只能空談理想，跨不出實踐的第一步。

教學意念：數感與圖感

非常粗略地說，高中數學的主要學習目標是以下兩大項：實數的數感，函數的圖感。計算機的引入，首先將引起這兩項內容在教學方法上的質變，一旦計算機攜入考場，評量的題目也必須立刻質變。

先說實數的數感。實數固然包括整數和分數，但是高中階段的實數，強調的是無理數。我們的學生在小學階段，也許延續至國中階段，被鍛鍊出優異的自然數數感，造就我國國民傲視全球的心算能力。但是，那樣的數感並不能延續到實數。原因很簡單：實數無法心算。以對數為例，我們的學生被訓練得都能記憶 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，能做諸如 $\log 50 = 2 - \log 2 = 2 - 0.3010 = 1.699$ 、

$\log 45 = \log(3^2 \times 5) = 2\log 3 + \log 5 = 2 \times 0.4771 + (1 - 0.3010) = 1.6532$ 之類的計算，能回答諸如「 2^{32} 有幾位數」¹之類的「應用題」。以上的計算過程，本質上鍛鍊的仍然是正整數的數感：質因數分解，絕非實數的數感。

很多人擔心，讓學生使用計算機之後，會折損了他們的「計算能力」。請各位讀者捫心自問：如果不使用計算機，多少人會算諸如 $1.07^{0.17}$ 、 $\sqrt[3]{17}$ 、 $\log 17$ 、 $e^{0.17}$ 、 $\sin 17^\circ$ 、 $\cos^{-1}(-0.17)$ 之類的實數？² 既然多數人本來就不會算這些數，那麼，用工具來算它們，究竟折損了甚麼計算能力？以前因為不使用工具，那些數從來不出現在數學課程裡，學生哪裡有機會獲得數感？同理，考試的問題永遠限定在可以用自然數化簡或者可以記憶的範圍裡，例如只要涉及三角就必須是 30° 、 45° 、 60° 之類的特殊角，哪裡有那麼多恰好如此的真實情境呢？所以「擬真」的問題當然也就沒機會出現在數學評量裡。

以上那一切限制，都可以用區區 200 元的計算機來突破。不必多麼高科技的工具，只要一支謙卑的掌上計算機，關於實數的教學將可以徹底改變，發生的是教學內容與評量目標的質變，而不是量變。不論是 STEAM 的情境問題，還是援引物理化學生物地科地理公民的跨領域教材，全都有機會進入數學課程了。

再說函數和方程式的圖感（以下僅以函數代表）。這項主題，幾乎可謂高中數學成敗的關鍵。在這個主題上，計算機能夠直接提供的幫助，雖然很有限，但是非常關鍵：運用計算機，學生才有機會真正在方格紙上畫「很多」由自變數與應變數決定的點，而獲得函數圖形乃由無窮多點聚集而成的觀念。如今的教學，因為沒有適當的工具讓學生親自動手做，所以都由教師示範或告知結果。導致非常多學生，當被問及「直線上有幾個點」時，都很有信心地回答「兩個」；被問及「拋物線上有幾個點」時，則比較不確定，有人說「三個」，有人說「五個」。

真正有效幫助建立圖感的工具，可能是新加坡等國採用的繪圖計算機。新近出現的一款 App：Desmos，很明顯地優於繪圖計算機。因為它目前僅能安裝於電腦（瀏覽器）或行動裝置上，所以它或可成為課堂上的教學利器，但是進入考場則還是會讓人擔心。因為 Desmos 可以在安裝之後離線使用，所以只要可以斷網，它也不難成為考試的工具。繪圖計算機和 Desmos 之類的工具，相對於 Geogebra 之類的軟體，在教學上最主要的差異在於：前者比較容易人手一機，在課堂上讓學生跟著做，或自行探究，而放學後也能在家操作。

突破想像障礙，提升教學效率

計算機在數學教育上還有一份更重要的價值：它能提高教學的效率。前面說過實數不能筆算，所以諸如 $1.07^{0.17}$ 、 $\sqrt[3]{17}$ 、 $\log 17$ 這些數，如果不使用計算機，根本不能觀察，必須完全根據概念來想像。這一層障礙，使得部分學生失去學習的機會：如果一開始無法想像，就很難跟上學習的進度，坐在教室

¹ 學生記憶的解法是：先做 $\log 2^{32} = 32 \times 0.3010 = 9.632$ ，取其整數，再加 1；有些學生誤以為那是 9.632 四捨五入為整數的結果。

² 當然，天下有人會算，否則計算機的程式是誰寫的？像作者本人這樣的數學專業者，都可以用紙筆算出指定精確度的概數。但我們都知道，那屬於專業能力，不是高中的教育目標，更不是國民應具備的數學素養。

裡也不具有任何意義。大家都知道，數學教室裡經常有神遊太虛、甚至直接趴下去睡覺的學生。使用計算機之後，使得部分數學概念變成可以觀察的數字，降低了學習的門檻，而且就算還沒有獲得概念，也至少能夠操作與實驗，不會無事可做。

位於建國中學的數學學科中心，在 107 年邀請一些前導學校的數學同仁，針對 108 數學領綱 10 年級第一次段考前的學習內容，進行教案設計與教學實驗。所有參與實驗的教師，全都認為計算機融入數學教學之後，最明顯的改變就是教室內的氛圍：起碼不再有學生自外於學習，人人得以參與學習。對數學老師而言，這是最珍貴的回饋。

實驗教學的內容不一而足，不論主題為何，老師們發現的共同點包括：學生操作工具的能力，超乎預期。雖然老師本來就預期學生操作計算機的困難不大，但是實驗結果顯示，學生習得操作方法，以及運用計算機歸納出數學性質的猜想，所需的時間還是短得讓老師驚訝。

總結教學實驗的心得，計算機融入數學課程，能夠增加學生在課堂內的參與率、提高獲得實數（無理數）數感的學習機會，並讓真實情境（個人的、社會的、職業的、科學的）進入數學課程的大門。

評量，就是課程的一部分！

在教育的學理上，課程本來就包含教材、教法、評量。在臺灣的教育現實上，學習很難不去關心考試成績。高中數學學科中心正奮力推動 108 數學領綱，在計算機融入數學課程方面，具體目標是希望全國的高中都能從 108 學年的第一次段考開始，容許學生攜帶計算機進入數學考場。學科中心已經針對第一次段考的範圍，邀請種子教師為新課綱的學習內容和學習表現而嘗試素養導向命題。在命題單上，學科中心明列以下類型的數學素養：

- ◆ 數學學科知識的素養
- ◆ 應用到情境的素養
- ◆ 正確使用計算機工具的素養

目前已經建立了大約 30 題的題庫，可作為全國所有高中第一次數學段考的參考試題。這些試題經過兩名教授的兩段審查與修訂，數學品質和文字品質都應該可靠。命題老師來自全國各地，題目的難度分布很廣，所以題庫的適用範圍也應該可以很廣。

寫到這裡，我們還是必須說：大考中心是最後一哩。在截稿的此時，大考是否准用計算機，還沒有定論：既沒有同意，也還沒拒絕。期望數學或自然科學領域的工作同仁，能一起支持校內數學段考准用計算機，如果有機會的話，也希望各位能贊成大考中心舉辦的數學考科准用計算機。

這一支單價 200 元的小工具，有機會讓全臺灣的數學教育發生質變，甚至擴展到數學領域之外。