

高中數學學科中心108進階研習  
數學素養教學與評量  
高二(A、B)  
新北市·林口高中

單維彰  
國立中央大學師資培育中心與數學系  
108數學課綱高中組  
民國108年4月17日

單維彰·108進階研習·11AB·2019/4/17

1

大綱

- ◆ 素養補述
- ◆ 教學意念：連結與脈絡
- ◆ 11年級A、B課程內容差異對照表
- ◆ 11A提要
- ◆ 11B提要

單維彰·108進階研習·11AB·2019/4/17

2

可先提問...

單維彰·108進階研習·高一上·2019/4/10

3

素養補述

素養導向的數學教學  
就是  
歷來追求的  
理想的數學教學

只是一直未竟其功而再次改名

單維彰·108進階研習·11AB·2019/4/17

4

## 無意於昨是今非

- ◆ 並不是以前都教錯了  
否則沒有今日的經濟奇蹟
- ◆ 只是教育須與時俱進
  - ◆ 教育的總目標遷移了
  - ◆ 學生的組成結構改變了
  - ◆ 知識的產生與需求更新了

5

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

## 附件 1. 中學數學教育的 半世紀回顧及其啟示

6

單維彰 - 108 數學研習 - 高一上 - 2019/4/10

## 教學意念

### 連結、連結、連結

- ◆ 數學課程的有機脈絡  
不是一塊一塊互不相干
- ◆ 連結 10 年級
- ◆ 主題間連結
- ◆ 跨領域連結 (STEAM)

7

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

## 對數律

- ◆ 每個正數都是 10 的次方
- ◆ 對數律 就是指數律

$$ab = 10^{\log a} 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$$

$$ab = 10^{\log ab}$$

8

單維彰 - 11 年級分組課程 - 2019/5/17

## 一般底對數：觀念記號

- ◆ 每個正數都是 2 的次方 ...
- ◆ 計算機實驗確認，然後

$$a = 10^{\log a} = 10^{\log 2 \cdot \frac{\log a}{\log 2}} = \left(10^{\log 2}\right)^{\frac{\log a}{\log 2}} = 2^{\frac{\log a}{\log 2}}$$

- ◆ 把  $\frac{\log a}{\log 2}$  簡記為  $\log_2 a$
- ◆ 是觀念上的簡記，非計算上的需要
- ◆ 目前天下人只用三種底 ...

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/07

9

## $y = 2^x$ 就是 $x = \log_2 y$

- ◆ 函數與方程式的形式互換
- ◆ 「沿著」 $y$  軸畫圖（確實練習）
- ◆ 往前連結  $x = -y + 1$
- ◆ 往後連結  $x = 4y^2$
- ◆ 連結 10 年級「坐標算法」

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/07

10

## 11A vs 11B

- ◆ 11A（內容）比較接近現在的高二
- ◆ 11B 全新設計的課程

單維彰 · 108進階研習 · 11AB · 2019/4/17

11

## 附件 2. 數學領域課程手冊 附錄四

單維彰 · 108進階研習 · 高一上 · 2019/4/10

12

## 11 年級 A 類課程

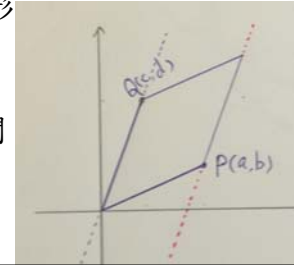
- ◆ 自然科學與社會科學 (含商管)
- ◆ 專業化的數學教育準備
- ◆ 預期在 12 年級選修數甲或數乙

13

單維彰 · 108 數學進階研習 · 11AB · 2019/4/17

## 兩點「決定」的平行四邊形

- ◆ 給定兩點  $P(a,b)$   $Q(c,d)$
- ◆ 用  $\overline{OP}$   $\overline{OQ}$  作為兩邊的平行四邊形
- ◆ 國中的平行四邊形性質
- ◆ 「高」：平行線間的距離

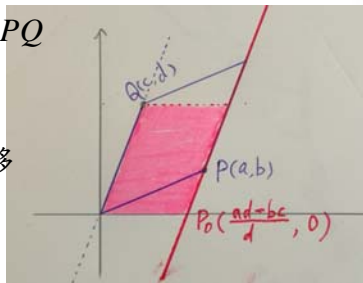


14

單維彰 · 11 年級分類課程 · 2019/4/17

## 平行四邊形面積的坐標算法

- ◆  $|ad - bc|$  簡記為  $|P, Q|$   
口訣「交叉相減」
- ◆ 自動推論  $\triangle OPQ$  的面積
- ◆ 自然就會平移



15

單維彰 · 11 年級分類課程 · 2019/4/17

## 數學「成熟度」

- ◆  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$  的方向性 vs  $\left\| \begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix} \right\|$
- ◆ 可推論  $d(P, L)$  可理解但  
記不起來也不愛用  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- ◆ 難負荷甚至不會代入

16

單維彰 · 11 年級分類課程 · 2019/4/17

## 三角是從坐標到向量擺渡

- ◆ sin 差角公式 (面積思維)

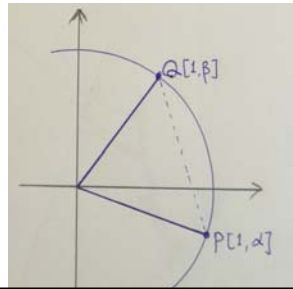
$$\Delta OPQ = \frac{1}{2} \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} [P, Q]$$

- ◆ 教法：

把有向廣義角

對應到數線上

(三角函數圖形前置經驗)



單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/07

17

## 一點數學史

- ◆ 平行四邊形 (三角形) 面積的  
坐標算法與直角坐標系一同誕生  
求兩直線交點 (約 1637-1659)
- ◆ Leibniz 在 1672 年從 Huygens 學  
導出三元一次方程的「克拉瑪公式」
- ◆ 克拉瑪 1750 發表論文, 附錄中用  
「公式」解五元一次方程

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/07

18

## 「純」數學的行列式定義

- ◆ 骨子裡就是平行四邊形面積

$$[e_1, e_2, \dots, e_n] = 1$$

$$\text{若 } u_j = u_k \text{ 則 } [\dots u_j \dots u_k \dots] = 0$$

$$[\dots cu_k \dots] = c [\dots u_k \dots]$$

$$[\dots u_k + v_k \dots] = [\dots u_k \dots] + [\dots v_k \dots]$$

- ◆ 可推論  $[\dots u_j \dots u_k \dots] = -[\dots u_k \dots u_j \dots]$

- ◆ 可推論降階公式、展開公式

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/07

19

## 一點數學思維

- ◆ 行列式就是 Measure of Simplex
- ◆ 方向性是本質
- ◆ 降階和展開演算法是必要的  
而不是設計的

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/07

20

## 識：11年級何需二元方程組？

- ◆ 發展新概念：線性組合
- ◆ 引進新符號（直式）

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}y = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

- ◆ 從線性組合到線性變換（方程到方程式）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

21

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/07

## 識：矩陣何需相乘？

- ◆ 作為線性組合的記號
- ◆ 作為線性變換的記號
- ◆ 作為資料表格的物件  
（離散數學、科學與統計計算）
  - ◆ 克拉瑪公式沒有發展價值
  - ◆ 反方陣可有可無（不用來求解）
  - ◆ 矩陣本身的代數不是高中階段教學目標

22

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/07

## 識：機率何需拆兩段？

- ◆ 古典機率 vs 主觀、頻率機率
- ◆ 機率詮釋：Frequentist vs Bayesian
- ◆ 「不確定性」思維的教育
- ◆ 「數據素養」的教育

23

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/07

## 附件 3. 數學領域課程手冊 D-11A-1,2,3

24

單維彰 · 08進修研習 · 高一上 · 2019/4/10

## 11 年級 B 類課程

- ◆ 文史哲藝健體
- ◆ 生涯最後一年的數學教育
- ◆ 若有足夠的成熟度與動機  
可銜接數乙

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

25

## 專門設計的新課程

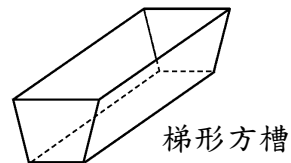
- ◆ 不是「減法」或「弱化」的課程
- ◆ 需要「必修」的教育態度
  - ◆ (文化人的) 數學素養
  - ◆ 終身學習的數學語言
  - ◆ 數學內容與思維的基本認識
  - ◆ 視為文化底蘊的數學

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

26

## 空間概念：三視圖、展開圖

連結(複習)展開圖，認識(直)圓錐、無蓋長方盒、無蓋圓柱盒的展開圖、三視圖，並適度練習繪製。可進一步推廣到方槽或圓槽(trough)的展開圖與三視圖。



單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

27

## 空間概念：削切正多面體

藉由「削切」正多面體，認識(部分)阿基米德多面體(半正規多面體)，連結截面概念，認識截面與半正規多面體之面的平面幾何圖形。

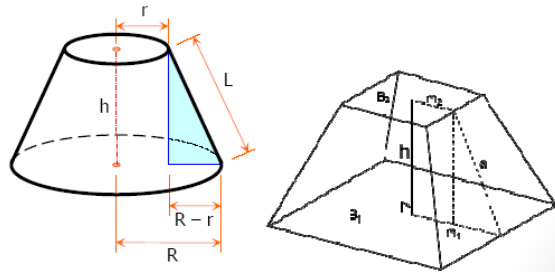


單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

28

## 空間概念：削錐成臺

將錐體上方的尖端截掉之後，成為臺（frustum）。



單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

29

## 空間坐標系

- ◆ 連結 9、10 年級長方體
- ◆ 跨領域連結地理，球形的地球模型
- ◆ 經線與緯線

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

30

## 比例：再訪實用數學

- ◆ 統整複習幾何知識，以及使用「比例」解決問題的意識和能力
- ◆ 藉由平面幾何的比例認知，增進其藝術設計方面的欣賞與應用能力
- ◆ 平面幾何包含生活經驗範圍內的空間中的平面幾何
- ◆ 比例，包括百分比、比例式、三角比

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

31

## 比例：羅馬圓拱

羅馬拱（Roman arch）的前視圖是同心的半圓環，正中央最高處的石塊稱為合頂石（keystone）。假設合頂石的圓心角為  $\theta$ ，左右對稱且由下至上用體積 9:7:5:5 的楔形石塊組成。



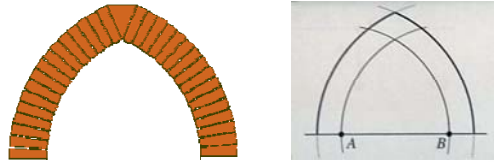
單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

32



## 比例：哥德尖拱

哥德式 (Gothic) 大教堂之所以可以建得那麼高大，而且開出面積很大的彩繪窗，關鍵原因就是建築的骨架從圓拱結構改為尖拱結構。原本只能做在正三角形上。

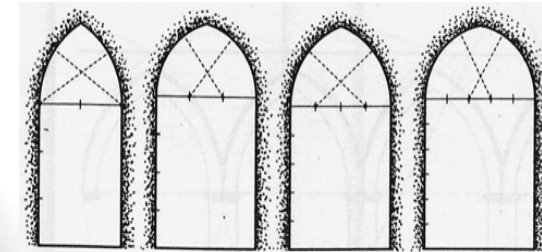


33

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

## 比例：哥德三分拱

掌握比例原則之後，建築師可以更多元地設計各式哥德式尖拱門窗造型。兩弧相交處的切線夾角，稱為尖拱之頂角，可以用解析幾何或平面向量來推算。

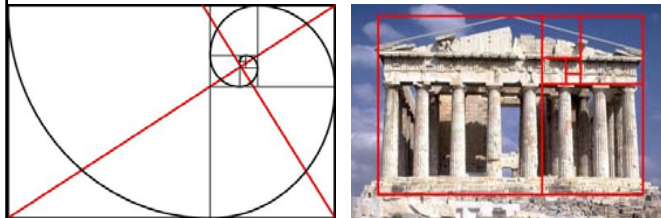


34

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

## 比例：黃金比

不宜「宣告」黃金比就是「美」。美的觀念是先驗的，不能被數學公式定義。很多設計師認為黃金比是美的或和諧的，而採用此特殊比例。可能是因為比較容易在一份設計裡（例如帕德嫩神殿的前視圖），安置不同尺度但全都彼此相似的長方形，而那些長方形又都伴隨著正方形，帶來莊重穩定的感覺，但不會像直接使用正方形那樣的呆板。

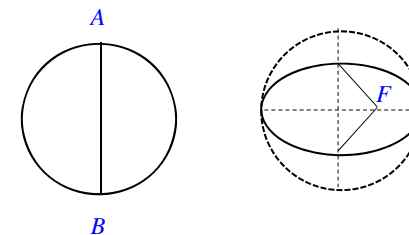


35

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

## 橢圓：側看的圓

投影觀念下的圓。「壓扁」的圓，「拉長」的圓。口語的「橢圓」其實是「卵形」(Oval)。




36

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB - 2019/4/17

### 橢圓：圓柱上的截痕

在斜面屋頂上安裝直立式圓頂天窗，是常見於高緯地區的建築式樣。

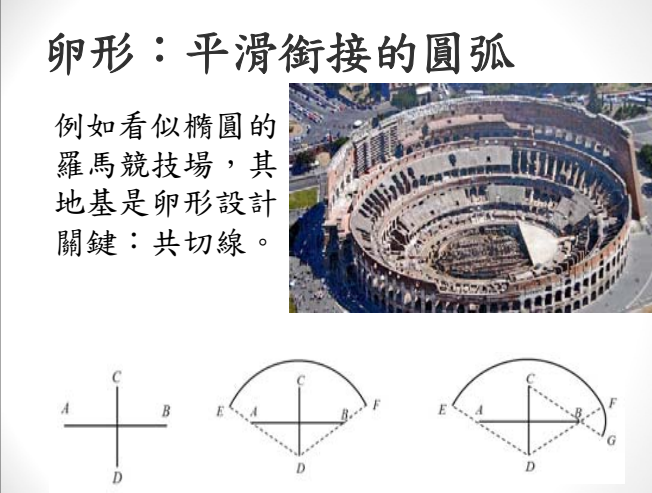


單維彰 - 108 數學進階研習 - 11AB 2019/4/17

37

### 卵形：平滑銜接的圓弧

例如看似橢圓的羅馬競技場，其地基是卵形設計關鍵：共切線。



單維彰 - 108 數學進階研習 - 11AB 2019/4/17

38

### 圓錐模型：點光源

圓錐是點光源照亮區域的數學模型，而當它照著一堵牆，則牆就是圓錐的截平面。

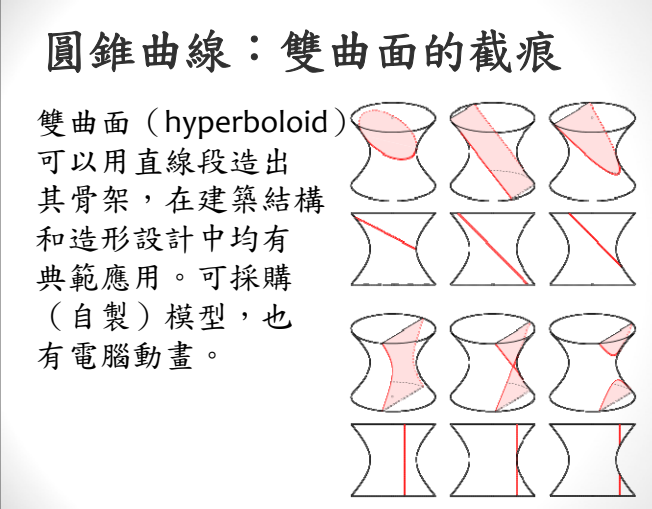


單維彰 - 108 數學進階研習 - 11AB 2019/4/17

39

### 圓錐曲線：雙曲面的截痕

雙曲面 (hyperboloid) 可以用直線段造出其骨架，在建築結構和造形設計中均有典範應用。可採購 (自製) 模型，也有電腦動畫。

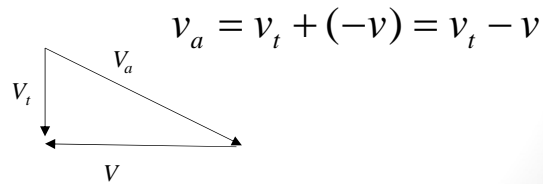


單維彰 - 108 數學進階研習 - 11AB 2019/4/17

40

## 平面向量：真風 vs 感受風

海上航行者，或者風浪板的運動員，在行進間有真風 ( $v_t$ : True Wind) 和感受風 ( $v_a$ : Apparent Wind)。運動員的行進速度為  $v$ 。



41

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB 2019/4/17

## 平面向量：力的合成分解

羅馬圓拱合頂石之重量，必須由其左右兩側的石塊支撐起來。整個半圓拱的重量，依此原理往下和往外（兩側）傳遞和累加。許多圓拱並列時，水平分力並不疊加，而等於一式圓拱產生的側向力。



42

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB 2019/4/17

## 平面向量：內積與辨識

向量內積可應用在圖形相似度。首先根據臉部特徵建構一個特徵圖形，以後要辨識時以鼻樑為起點，各臉部特徵點為終點，形成許多特徵向量，再計算各向量內積值的差異。



43

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB 2019/4/17

## 平面向量：帆船的傾斜

帆船或風浪板的推動力來自風帆，風帆產生推力 (push)，但是因為舵 (rudder) 控制了行進方向，船隻只能朝著特定方向前進。推力分解成互相垂直的分量，其中一項對船體產生側向力，造成船身傾斜。



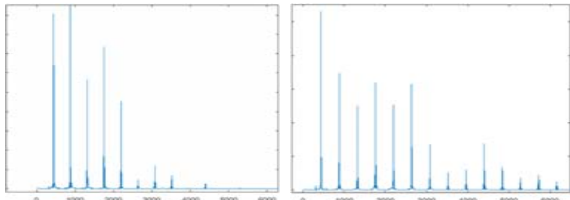
44

單維彰 - 108 數學研習 - 11AB 2019/4/17



### 數據分布：音色 vs 泛音

生物或樂器很不發純音，而是在一個基礎頻率之上，同時發出其他附帶頻率的聲波，稱為泛音（overtone）。各泛音強度的組合，讓我們聽到它的音色（timbre）。



長笛的泛音分布      雙簧管的泛音分布

[ 49 ]

單維彰 · 108 數學研習 · 11AB · 2019/4/17

### 機率：風險與決策

- ◆ 強調主觀機率與機率推論的併用，幫助在社會生活的情境中評估風險，做理性的決策。
- ◆ 著重於「列聯表」的工具性運用。

	G 過	G 否
T 過		
T 否		

	G 過	G 否
T 過	15	20
T 否		
	25	35

	G 過	G 否	
T 過	15	5	20
T 否	10	5	15
	25	10	35

[ 50 ]

單維彰 · 108 數學研習 · 11AB · 2019/4/17

## 附件 4.

## 數學領域課程手冊

### D-11B-2

[ 51 ]

單維彰 · 108 數學研習 · 高一上 · 2019/4/10

## 請提出討論

The End

[ 52 ]

單維彰 · 108 數學研習 · 高一上 · 2019/4/10