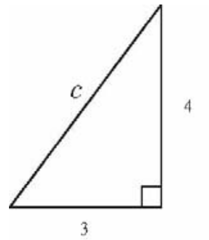
952201010　數碩二　吳蕙稜　P48~P65

2-1 畢氏定理

畢氏定理一方面可以用幾何圖形呈現，一方面用代數形式推導。
我們能夠討論各種圖形性質的數學稱為幾何學；像丈量土地，度量星空都是需要測量的。這也就是商高定理、畢氏定理最初的動機來源。

例一，說明三角形三邊長比 3:4:5。
右圖為一直角三角形，兩股長各為 3 和 4，求斜邊長。
由畢氏定理知，$c^2=3^2+4^2=25$，所以 $c=5$。
同時，隨堂練習也做了 5:12:13。其中，『3:4:5』為連比，所以如果有三個數連比等於 3:4:5，那此三數也滿足畢氏定理，如 6:8:10。因為 6:8:10=3:4:5，所以可得

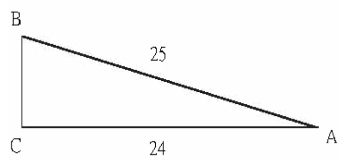


$$6^2+8^2=(3\times 2)^2+(4\times 2)^2=3^2\times 2^2+4^2\times 2^2=(3^2+4^2)\times 2^2=5^2\times 2^2=(5\times 2)^2=10^2$$

在這裡由連比的數符合畢氏定理，需要使用到指數律、分配律，我們可以當成複習來學習。

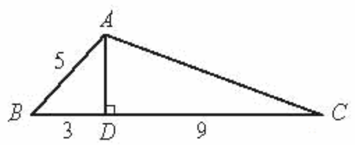
例二，一直角三角形的兩股長各為 21 和 28，求斜邊長。
我們可以觀察出 21:28=3:4，可利用 3:4:5=21:28:35 來求得。我們在第二冊學的連比，可以用在此，幫助學習。隨堂練習，同樣使用連比觀念 9:12=3:4，可利用 3:4:5=9:12:15 來求得。

例三，一直角三角形 ABC，已知一股 $\overline{AC}=24$，斜邊 $\overline{AB}=25$，可得另一股 $\overline{BC}$=7，邊長比也就是 7:24:25。



隨堂練習，一直角三角形 ABC，已知一股 $\overline{BC}=15$，斜邊 $\overline{AB}=39$，可得三邊長關係比為 15:36:39。

2-1 自我評量
1.（5）若一直角三角形兩股長為 3、3，則斜邊長小於 3。
=>　　此題為錯，由於 $3^2+3^2=18>3^2=9$。
1.（6）一個等腰直角三角形的邊長連比為 1:1:2。
=>　　此題為錯，對於目前的學生來說，我們只能夠計算出 $1^2+1^2=2$，所以只能知道邊長比不為 1:1:2。
4. 如右圖，求三角形 ABC 的面積。我們要求面積必須要先求高，所以必須利用到其中一直角三角形 ABD 的邊長比為 3:4:5，所以高為 4。



2-2 平方根與近似值

當利用畢氏定理計算直角三角形的一斜邊或一股的時候，我們一直遇到一個問題:『給定一個正數 a，什麼數的平方會等於 a？』

這類問題常常在處理面積的時候遇到，我們可以從正方形著手。『邊長 1 的正方形，面積為 1』、『邊長 2 的正方形，面積為 4』…，如果我想要面積為 2 的正方形邊長、面積為 3 的正方形邊長? 這類的問題如何去著手，這就引導出了平方根的問題。我們可以由這類的面積問題，引導學生了解正方形的對角線長度，也就是由正方形邊長做兩股長的等腰直角三角形的斜邊長。

如果一個數a大於零，$b^2 = a$，我們就說b為a的平方根。如果$b > 0$，則稱b為a的正平方根，如果$b < 0$，則稱b為a的負平方根。一開始就要讓學生根深蒂固有一個觀念，平方根有正有負。

我們細數學生上國中數學的新數學物件，第一為負數，第二為多項式，第三為根號，也就是給一正數a，a的平方根記為$\sqrt{a}$，讀做『根號a』或『a開根號』，例如我們可以知道$\sqrt{1} = 1$、$\sqrt{4} = 2$、$\sqrt{9} = 3$、$\sqrt{16} = 4$、…。至於$\sqrt{0}$，因為只有 0 的平方才會等於 0，所以$\sqrt{0} = 0$。

給一正數a（表示為面積），如何計算$\sqrt{a}$（表示為邊長）呢？根據上面討論，如果可以將a寫成某一數的平方，就能算出$\sqrt{a}$。

例如，$225 = 3\times3\times5\times5 = 3^2\times5^2 = (3\times5)^2 = 15^2$，所以得$\sqrt{225} = 15$。

例一，求下列各數開根號的值：1）$\sqrt{441}$　2）$\sqrt{\frac{9}{4}}$　3）$\sqrt{0.01}$

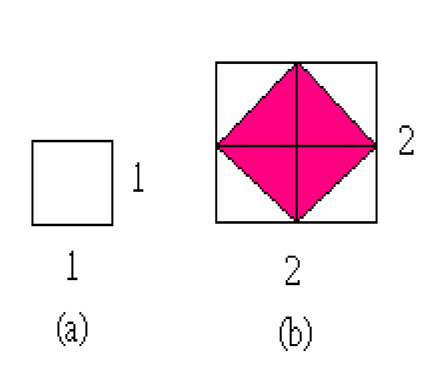
前面都只提到整數，在這裡也提到了分數與小數，分數與小數也可以有平方數。至於隨堂練習，我們可以用因數分解計算 1225，幫助分解找平方根。

例二，也就是用因式分解去計算 11025，可利用指數律得
$11025 = 3^2\cdot5^2\cdot7^2 = (3\cdot5\cdot7)^2 = 105^2$。
所以$\sqrt{11025} = 105$。

隨堂練習，一等腰直角三角形的面積為 242，求一股長。同樣可以使用例二的想法，但不一樣的是此時若一股長為a，那a^2為面積相當於 484（＝242×2）。

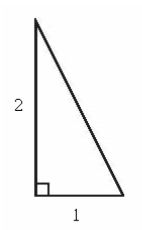
認識$\sqrt{2}$

我們好奇到底有沒有面積為 2 的正方形？如右圖，我們可以取 4 個邊長為 1 的正方形（如圖 a），拼成邊長為 2 的大正方形（如圖 b），顯然粉紅色的部份是一個正方形，並且是大正方形的一半，也就是面積為 2，所以邊長即為$\sqrt{2}$。



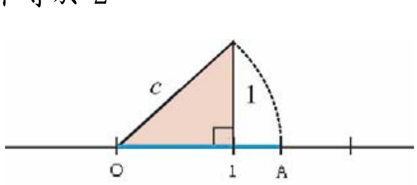
在這裡可以看到兩股斜邊為 1 的直角三角形，斜邊即為$\sqrt{2}$，粉紅色正方形的邊長。所以我們可以知道$(\sqrt{2})^2=2$，相當於粉紅色正方形的面積。

隨堂練習，請利用右邊三角形畫出一個面積為 5 的正方形。
由於斜邊為$\sqrt{5}$，所以用斜邊劃出來的正方形面積為 5。



底下用兩種方式來理解$\sqrt{2}$是多少？（應該說$\sqrt{2}$大約是多少）

第一種方式用數線。如下圖，首先，先在數線上畫一點 O，必須使用圓規，用圓規張開來 0 到 1 的長度，取一點 1，在 1 上做一直角取長度 1，即可做出一等腰直角三角形。用圓規以斜邊長為半徑畫弧，以 O 為圓心畫弧，交數線於 A 點，$\overline{OA}$即為$\sqrt{2}$。老師在現場教學時，最好是用圓規以及直角板輔助。學生可以嘗試用尺量量看，並且可以發現$\sqrt{2}$約在 1.4 與 1.5 之間，如果學生畫圖不精確，很可能會說$\sqrt{2}$為 1.4，此時可以請學生驗算，如$1.4^2=1.96$，因為$\sqrt{2}$的意思就是$(\sqrt{2})^2=2$，所以可以發現1.4^2不等於 2。



第二種理解$\sqrt{2}$的方式為利用正方形邊長以及面積的關係。因為此關係保序，也就是說在 a、b 兩數在 x 軸上開根號後，會保持原本的大小順序；也就是說，正方形的面積越大當然邊長越長。所以假如 a、b 為兩正方形的面積，$a>b$相當於$\sqrt{a}>\sqrt{b}$，$a=b$相當於$\sqrt{a}=\sqrt{b}$，$a<b$相當於$\sqrt{a}<\sqrt{b}$。因為$1<2<4$，所以$1=\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}=2$。

緊接著動動腦利用了『直角三角形斜邊長為最長邊』和『三角形兩邊和大於第三邊』，說明了$1<\sqrt{2}<2$。

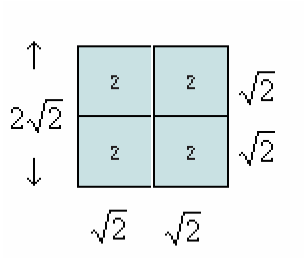
由上面討論，我們可以知道$\sqrt{2}$不為正整數，但有可能是小數或分數嗎？先看$\sqrt{2}$是不是為小數，若問$\sqrt{2}$是不是為 1.4142，直接的作法就是為算算看，即可發現$1.4142^2=1.999396$，因為這裡談的小數是有限小數，我們可以發現沒有一個數的平方為 2，單純看最後一位數平方後不可能為零，所以我們就可以知道$\sqrt{2}$不可能為小數。

對於$\sqrt{2}$不為分數的理由，學生要到高中才會學習到。也就是假設$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$，m、n互質，$n>m$（因為$\sqrt{2}>1$），平方之後為$2=\dfrac{n^2}{m^2}$，所以$n^2=2\cdot m^2$，因為m、n互質，可以讓學生嘗試一些例子，所以$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$是不可能的，也就是$\sqrt{2}$不為分數。

所以我們發現了一個新的數，這個數不是小數，也不是分數。接下來開始做一些根數的計算。

如$2\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}$，所以$(2\sqrt{2})^2=2\cdot\sqrt{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}=(2\cdot2)\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=4\cdot2=8$

如右圖，可以用面積來說明$(2\sqrt{2})^2=8$。



接著就討論，像$\sqrt{2}$這類的數，想開根號卻開不出來，像『$\sqrt{6}$』就會是數線上的某一點。

$\sqrt{a}$的比大小

為什麼$\sqrt{a}$可以比大小，因為$\sqrt{a}$在數線上，只有在數線上的東西有三一律，不管分數也好，根數也好，因為都在數線上，一定有大小關係，一左一右，左的就是小，右的就是大。