數學科教材教法

95 年 10 月 11 日第三節・范雲雁紀錄

好，那我們剛才講到第二冊，

第二冊第一個單元講到多項式和多項函數，

那多項式函數他特別關心的是單項函數的圖形，單項函數就是 x^n ，n 是正整數的這種情況，還沒有講到有理多項式，還沒有談到複數的時候，當然，他也講到平移，所以 x^n 或是 $(x+a)^n$ 或是習慣寫成 $(x-a)^n$ ，然後等比級數 $1+x+x^2+\ldots$ 那我們都曉得，這個等比級數的和有一個簡單的公式 $\frac{1}{1-x}$ ，通通乘 x ，然後把他相減，這是多項式的一個形式操作，然後插值多項式，等一下我們會講到他。

第四，泰勒多項式，泰勒多項式就是推廣我們現在多項式的形式，現在多項式就可以當做是相對於零那一點做參考點所做出來的多項式，那泰勒多項式就是把那一個參考點從零換到任何一個點，所以呢，什麼形式的多項式，就是用 1，$(x-a)$，$(x-a)^2$ ，$(x-a)^3$，做基底所寫出來的多項式，這就叫泰勒多項式。

那什麼是牛頓多項式，牛頓多項式，就是假如你先知道這個多項式要通過某些點，比如說你知道他在 x=1 的時候在那一點，x=2 的時候在那一點，那你用的基底是什麼呢，就是 1，我們現在通過三個點，只能夠決定一個二次多項式，假如這三個點的座標是 1,2,3 好了，那牛頓多項式的基底就是 1，$(x-1)$，$(x-1)(x-2)$這三個，那這三個基底形成一個二次多項式的基底，那 1，$(x-1)$，$(x-1)(x-2)$是一個二次多項式空間的一組基底，那他有什麼好處，就是用這個基底的時候，這個係數很容易求。

然後拉格朗日多項式，一般在數值分析才會講，我們等一下到那邊再說，內容上，多項式乘法以 $(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots a^{n-1})=x^n-a^n$ 以及 $(x+a)^n$ 的展開最爲重要。此公式在第一冊會出來，但在一年級的上學期沒出來，在一年級下學期的時候就出來了，所以， x^n-y^n 的分解，這個東西要學會，再來是 $(x+y)^n$ 的展開，這個展開一般好像是把他放到排列組合才說，但是你只要是做多項式乘法，就自然會發現這個展開什麼意思，

他的這個展開的係數是什麼，先做一次方，這當然是沒有問題，然後平方，係數是 1、2、1，然後三次方，就是再乘上$(x+y)$，shift 一位，然後相加，得到答案 1、3、3、1，若是還要做四次方的，又要再乘上$(x+y)$，所以又是 1、3、3、1，向左 shift 一位再相加，得到 1、4、6、4、1，然後，這個寫了幾項以後就可以告訴學生，這其實有一個撇步，就是這個巴斯卡三角形，每一項的下面的這一項都會是前面相鄰兩項的合，那爲什麼是相鄰兩項的合，就從這個乘法看出來的，因爲你要 shift 一位相加，所以就是等於相鄰兩項加在一起，那就可以在這裡導出一個遞迴等式，這個等式在後來馬上又要用到，就是我們說的那個巴斯卡三角形的那個遞迴等式，那這裡就可以展開$(x+y)$，二項展開在這裡就可以說了，所以到了排列組合的時候，其實是拿二項展開來印證排列組合裡面的那個組合數的一個組合的意義。

其實在這個課程規畫裡面，可以說是這樣子想的，先從比較具體的操作，從多項式的操作，可以看出來所謂的巴斯卡三角形。

然後單項式的圖形，就是$y=x^n$，n 是正整數的時候，他的函數圖形，這裡要特別注意的是，n 跟 m 的比較，二次方跟三次方這兩個圖形的比較，他的相對關係，這個相對關係，在+-1 之間，跟在 1 以外是相反的，我們應該了解，絕對值小於 1 時，那個次方越大，值越小，x 絕對值大於 1 時，那個次方越大，函數值越大，這在後來學微積分，特別是學到$\left(\frac{1}{x}\right)^n$，這可不可以積分，希望能看到函數就能想到他基本的圖形。

再來從這個基本的圖形來介紹奇偶性，這個 x 的奇數次方的時候，函數是奇函數，x 的偶數次方的時候，函數是偶函數，那偶函數是什麼意思，對稱的一些關係，單調性，只有漸增，沒有漸減，這就是單調，或者是有漸增有漸減的時候，然後凹凸性，凹凸性的一致就是說，在這個圖形上，隨便找兩個點，這就是割線，這個割線假如在起線的上面，就叫做向上凹，如果這個割線在起線的下面，就叫做向下凹，凹跟凸其實怎麼分，向上彎的叫做凸啊，向下彎的叫做凹，教科書不曉得會不會這樣說。

還有x^2跟x^3有一個最基本不同的我們一定要知道，我們在學微積分的時候會知道，x 平方在頂點的地方會有一個水平切線，這個地方是一個轉彎的點，這個轉彎的點同時也是這個函數的極小值或是極大值，但是$y=x^3$在 0 那個地方也有一個轉彎，但這個轉彎不造成極大或極小，他只是扭曲了，在這個x^3的圖形，在 0 的左邊，他是向下凹的，換到 0 的右邊，他是向上凹的，所以他的凹凸性，一邊是凹，一邊是凸啊，凹凸性改變了，但是x^2呢，凹凸性卻沒有改變，所以這些事情都是用微積分可以解釋的，但是在這裡，有平方跟三次方這簡單的情形先給一些概念。

然後能畫出 $y=c(x-h)^n+k$ 的圖形，其實意思就是說，x^n 要知道，x 換成 $x-h$ 的話，整個圖形向右邊 shift h 個單位，加上個 k，表示向上 shift k 個單位，乘上 c 只不過是開口大一點小一點。

然後，多項式的四則運算，最重要的就是那個 x^n-a^n 這個形式，還有 $(x+a)^n$ 的展開，利用 n=1、2、3 來發現係數的規律，再來是多項式的除法，在這裡後我們希望除式是一次式或二次式就好了，不用做太複雜的式子，再來，就是幾種特殊多項式要讓學生知道。

第一個：泰勒多項式，當 a 是 0 的時候，他就是一般的多項式，當 a 不是 0 時，我們就稱他爲用 a 做參考點的或是用 a 做中心點的多項式，我們將來的泰勒級數是這樣子寫，但在這邊完全沒有必要談泰勒級數，這邊要提到泰勒多項式，是爲了說，多項式是可以換參考點，那講這個東西是爲了讓多項式的除法，可以有一個有意義的應用，就是換參考點，但換參考點是有意義的，爲什麼我們多項式會想要換參考點，這就要設計一些題目出來，讓學生發現，就好像一個幾何圖形，放在一張白紙上被畫出來，參考坐標放在不同的地方時，那個圖形的方程式可能簡單也可能繁雜，坐標放的好，問題就變簡單，多項式也是一樣，若是參考點放的好，這個多項式就變簡單了，那就必需要設計一些題目讓學生發現，換參考點其實可以簡化一個問題，但是應用上就是要做多項式的除法。

譬如說 $2x^3-5x^2+6x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$ 是以 1 爲參考點展開的式子，這裡其實在告訴你什麼事情，10 進位換成 16 進位怎麼做，2 進位換成 8 進位怎麼做，其實，我們可以告訴你在這個課綱裡的一個精神，多項式在很多很多地方都非常有用，當你選擇一個多項式，你把這個 x 想成是 10，a、b、c、d 那些係數想成 0～9，這就是十進位的系統，就是一個整數用十進位系統寫出來的那個樣子，那你換參考點其實就好像你要換底，就是同樣一個整數，你用十進位可以說他，用二進位也可以表示他，或用八進位，十六進位也都可以表示，這就叫換個底來說，那這邊你要把一個用 0 做參考點的多項式，換成一個用 1 做參考點多項式，要換多項式的時候，係數要改變，就好像同一個整數，從十進位要換成二進位的時候係數要改變，其實做法都一樣，就是除，像這條式子就是把左邊的式子除以 $(x-1)$，他的餘式就是 a，商是一個二次多項式，再除以 $(x-1)$，那個餘式就是 b，商爲一個一次多項式，然後再除以 $(x-1)$，那個餘數就是 c，最後的那個商，其實是零次多項式，就是一個常數，他就是 d，若能了解這件事情，那很快的就能夠了解十進位換到二進位，或是任何一個 k 進位換到十進位是怎麼做的，這是一個對應的關係，那多項式跟實數系之間在整數或是小數的表現法上面就有一個非常漂亮的對應關係，你了解實數就能做出多項式，但你多項式不能了解時，就先回頭看看實數怎麼做，就知道多項式怎麼做，多項式的加減乘除，就跟整數的加減乘除，完全一樣，只是那個形式稍微複雜了一點點，但概念是完全一樣的。

再來還有一個很重要的理念，我們在講有理數的時候就說，任意一個實數，都可以用有理數來任意的逼近，前面挑一個實數，例如是$\sqrt{2}$或π，你可以用有理數來逼近這個實數，而且要多靠近都可以，多項式其實在整個函數裡面，他的角色就是有理數，那些超越函數的角色就像是實數，像指數函數，對數函數等等，就是那些不能寫成多項式，像$\sin(x)$，他在以前是沒有一個簡單算法的，但學了微積分以後，知道利用泰勒展開，而泰勒展開，沒有人會算到無窮多項，只會算到有限多項多項式在函數裡面的角色，就好像有理數在實數裡面的角色是一樣的，他是拿來逼近用，因爲有理數很好算，多項式也很好算。

在後面他馬上就要講插值多項式，給我們一個超越函數，在平面上給我們幾個固定的點，後過這個點的函數是什麼，我們根本不知道，我們能夠做的最簡單的一個方式，通過這幾個點的函數，就是內插多項式，給你 n 個點，你可以做一個唯一 n+1 次多項式，通過那 n 個點，這就是多項式的用處，通過這 n 個點的是一個超越函數，是一個我們不知道的東西，但我們可以用多項式去逼近他，所以學泰勒多項式的目的在這邊，在這裡可以跟之前學的綜合除法做一個結合，當然，若學生夠強，你可以在這裡教也微分，微了以後除以階乘數，就是將他做泰勒展開就對了，最重要的概念就是泰勒多項式是同一多項式在換參考點可以有不同的表示方式，就好像將坐標軸換掉，那爲什麼要換底了，若你想要做$f(1.01)$的小數逼近，若換底到$(x-1)$的話，那就比較簡單，他的估計會是$a+0.01\times b$，這是換底的其中一個用處，教科書應該會有別的做法，好的教科書要很會舉例子，舉的例子讓學生覺得這是很有用的。

再來插值多項式就是在平面上給定 n+1 個點，可以求一個唯一的多項式，可以通過這 n+1 個點，可以透過因式定理來證明插值多項式是唯一的，有兩種插值的方法，一個是牛頓的方法，一個是拉格朗日的方法，牛頓多項式的形式剛已說過了，設通過(1,1),(2,3),(3,7)之多項式爲$f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$，a、b、c 很容易就可求出來。當 x 不是插值點時，帶 x=1/2 下去算，很快也可以求出$f\left(\frac{1}{2}\right)$。

再來就是通過(1,a),(2,b),(3,c)之多項式可表示爲
$f(x)=a\left(\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\right)+b\left(\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\right)+c\left(\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\right)$，求$f\left(\frac{3}{2}\right)$的值，就是要突顯一個實用的哲學，多項式很少使用到五、六次以上，整個大環境裡面，沒有人使用高次多項式，高次多項式只有在逼近情況時才需要，而那個時候，沒有人會去解那個多項式，高次多項式都是在泰勒的情況下出現，通常是爲了逼近一個超越函數時才會出現，物理最多使用到二次方，三次方，求根並不是學多項式的目的，而逼近才是利用多項式來逼近一些不好算的東西，這才是學多項式的目的，而高次多項式只有在代數方面才會用到，那等到大三或是碩博士班的學生再去學習，至於對電機或資工，只有在要用到密碼學時，才會利用到高次多項式，群環體這些東西，對數學系以外的人，還並沒有用處，目前這些就啣是純數學，沒有必要讓高中生來學這些再也用不到的學問，最重要的概念就是多項式在函數的角色，就像是有理數在實數的這個角色一樣。

二次方程式的一些特別的根，由 $x^2+1=0$ 導出 i ，和複數的四則運算、共軛複數，先不談幾何性質跟向量的部份，等到複數極式跟向量的章節再來談。其實當初複數的出現是爲了向量的關係，但後來因爲向量發展的完備，複數就不太需要跟向量扯上關係，也沒有必要，但高斯說了複數有必需要存在的理由是爲了三次多項式的公式解，因爲在解三次多項式的公式解時，三個實數根必需靠前兩個共軛複數根才能求出來，這也說明了複數存在的必要性，複數是實在的東西。

多項方程式

整係數多項式有理根的判定，但是我們關心的是實係數多項式，整係數多項式之因式分解不必太過強調，避免學生都會誤會多項式的根都是有理根，再來是勘根定理，傳統的定理，再來是多項不等式，只談簡單的因式分解，或是已經分解好的多項式問題，在這裡又出來了集合的交集聯集的關係。

再來第二章 數列與級數

發現數列的規律性

一階線性遞迴關係，由前項推測後項，由演算法所產生的數列，例如像剛所舉的牛頓法，那像二分逼近法跟輾轉相除法也是，這些方法就是算則，或是在上一章所講的巴斯卡三角，巴斯卡三角在這個地方就寫下他的遞迴公式，再過來是等比數列，在這地方要記得他的公式，再來是數學歸納法，數學歸納法最重要是要在操作的過程中，熟練 Σ 的符號，這裡說明了 Σ 的線性性質，第二個換指標，換指標是數學上的一個基本操作，可以使問題變的簡單，或者變複雜，必需要學著變簡單，例如像在線代中學的轉換，也是爲了將式子變簡單，然後就歸納出 Σk 和 Σk^2 ，$\Sigma\dfrac{1}{k(k+1)}$ 的公式。

然後等比，特別說明不談複數的等比級數。而且這裡談的是有限項，不包括無限項的等比級數。

那再來就要說明指、對數函數，在高中時，都是以 10 做底，但勿亂搞一些換底公式，換底公式的目的只是將一般指數函數換成以 10 爲底的指數函數，只討論 a>0 的，不討論 a<0 的，因爲這時是沒有意義的，在微積分時再說明將底從 10 換成 x 。

指數函數的特徵，一定是漸增或是漸減，一對一，對數函數的定義域只有正數，這非常重要，那對數律只要提重要的就可以了，在這裡也有提了一個換底公式。

在此時當然是最恰當的時候講反函數，但在此時講反函數，還是有學生會搞不清楚，最好利用華氏，攝氏兩種函數關係來幫助說明反函數，這種線性關係，較容易將反函數說明出來。從圖形上可以看出，互爲反函數的兩個圖形，對稱於 45°角線，這是另外一個從圖形上的解釋，然後後面是說，我們只做標準以 10 爲底的指對數函數，在這裡把算幾不等式，取了 log 以後，

又再做了一次，基本上是在說明凹凸性，利用割線是在函數圖形的下方的介紹，但覺得這並不自然，算幾不等式可以在高中有很多玩法。

再來就是科學記號，首尾數等問題，

指數成長的應用問題，希望多寫一些在教程書裡。

三角

在這裡只談直角三角形上面的三角，然後推廣到平面上和圓上，那推廣到圓上時，就會有 0° 到 360°，但這部份只推廣一些，有 -0° 到 -360°，但我們不去談 720° 或是 380° 這些角度的情形，不去讓他轉超過一圈，但在合角公式或二倍角公式會有麻煩，目前尚無結論。

由圓經由極坐標可以切入三角的課題。傳統上廣義角常設爲任意度數，但由極坐標的角度來看，廣義島定義在 $\pm 360^\circ$ 以內既可。可以利用參考角的概念，將廣義角的三角函數求值問題化爲銳角三角函數的求值問題。由此觀點，$180^\circ \pm \theta$ 之三角函數求值問題在此處需要。但 $270^\circ \pm \theta$ 求值的問題在此處並不需要。而其求值問題則留待和角公式時才處理。三角測量含立體測量，但應注意測量的可行性與實用性。

第一節：廣義角與極坐標

極坐標在此時仍無 sin 和 cos，只是利用 r 及 θ 來說明一個點的位置，直角坐標系統，任何一點只有一個唯一的坐標，但進了極坐標以後，一個點可以有無窮多個坐標，若只談 $\pm 360^\circ$，也至少有兩種以上不同的寫法，超過 $\pm 360^\circ$ 的廣義角概念放在弧度的章節裡學習，在第五冊學習這個廣義角的部份，是爲了三角函數的週期性。

直角三角形的邊角關係，只談正弦，餘弦，正切。

廣義角與極坐標，先在第一象限，要發現正餘弦函數恰好是第一象限的圓弧上面的點，然後推廣到一整個圓，所以圓周上的點就是 cos 跟 sin，再利用對稱的方式，對回來第一象限，利用這個方式來求三角函數的值。引進參考角的概念，利用補角關係，將廣義角的三角函數求值化爲銳角三角函數之求值。

直角坐標與極坐標的變換

求 sin、cos 的函數值，特殊角在此處要學會，還有利用查表求值也是在這裡要學會的。三角測量應注意測量的策略及實用性，查表或使用計算器；查表不應該處理線性插值。含立體測量，由平面再到三度空間的角度。

第三冊第二單元 平面向量

複數，平面向量跟極坐標在這裡會有一個很漂亮的方式結合在一起，向量是到高中的數學中的最後一關，操作方式不同於以往所學的，待學生透過坐標幾何熟悉向量的基本操作後，再

抽離坐標系以向量形式操作談平面向量的應用，如三角形兩邊中點連線定理、平行四邊形定理的證明等。先用坐標幫學生過這一關，再將坐標抽離。

平面向量的幾何表示法，在沒有坐標的狀況下，來處理向量加減跟係數積、線性組合。在平面上用這樣子的操作來了解向量操作的基本意義，再將坐標放上去，才會有算術操作的出現。