數學科教材教法

95年10月11日第二節・王韻詞紀錄

● $\sqrt{2}$ 、π 是無限小數，但可用有限小數來逼近

$\sqrt{2}$ 大約等於 1.414，其實就是 $x^2 = 2$ 的一個根，我們很容易判斷 x 是在 1 跟 2 之間。所謂 1.4，是說 x 大約介於 1.4 跟 1.5 之間，也就是在 1 跟 2 之間要等份十段，然後看在哪一段裡面，在 1.4 跟 1.5 之間，所以它的小數點第一位是 4；那小數點第二位是把 1.4 跟 1.5 再等份十段，你就會發現它應該是在 1.41 到 1.42 這個百分之一的範圍裡面，所以小數點第二位是 1，以此類推。那照這樣下去，爲什麼一個有理數一定是有限小數，一定可以拿來逼近呢？如果我們知道他在 1.4142 跟 1.4143 之間，那我們可以取左端點，說 x 大約等於 1.4142，因爲在這之間，最壞的情況下也就是它比較靠近右邊，所以我們就知道 1.4142 跟真正的 $\sqrt{2}$ ，絕對在萬分之一的誤差範圍之內。我們還可以把它的中間取一半，也就是 1.41425，照這樣做下去。所以用這個方法，你可以知道，我們可以用有限小數來逼近一個無理數到任意的實數，看你想要準確到第幾位，都是可以辦得到的。這都是有理數稠密性跟有理數逼近實數的一個概念。

π 很不容意解釋，因爲 π 並沒有一個簡單的方程式可以寫出來，$\sqrt{2}$ 可以寫 $x^2 - 2 = 0$ 求根，但是 π 怎麼求根，這是非常困難的事情。π 的原始意義是什麼？圓周跟直徑的比，這個重點又是個比例關係，圓周長跟直徑成一個正比的關係，只要有正比關係，中間一個比例常數，在圓周長跟直徑的正比之間，那個比例常數叫它 π 。

● 直式開方法：很難背的，而且沒什麼用。如果我今天要教學生開方法做一個平方數的估計的話，我寧願教他背另一個公式，那個東西來自牛頓法，就是求解 $x^2 - n$ ，如果我們要估計 $\sqrt{n}$ ，n 是個正整數，那也就是要求解 $x^2 - n$ 。牛頓法就是說 $x^{n+1} = x^n - \dfrac{f(x)}{f^{'}(x)}$ ，這是一個很容易背的式子，這條式子讓我們可以開根號做加減，而且要多準

就有多準。事實上，$\sqrt{17}$ 靠近 4，$\sqrt{30}$ 靠近 5，它靠近哪一個整數你總是算的出來，所以 x_0 就帶靠近的整數，你只要帶下去以後，我的經驗是四遍就會準到小數點下第十二位以上，可能準更多。而這個計算的過程，只要開始的 x_0 是一個整數或有理數，這個計算過程的每一個 x_n 都是有理數；因為這個計算是有理數的計算，只要 a 是有理數，只要 x_0 是有理數，則後面的所有 x_n 都是有理數；而它會收斂到無理數 $\sqrt{a}$ ，如果它的 a 不是完全平方式的話，這又是另外一個例子；有理數可以任意的靠近無理數，那這個東西又是怎麼來的，當然沒有微積分的時候是相當難做解釋的，但是你如果有辦法跟學生講的話，這個方法比直式開分法要好多了，它有一個知識的架構在後面，靠那個知識就可以把這條公式導出來。

● 根式的運算：這其實是國中生的程度，這是要再做熟練一點就是了，根式計算有一個很基本的小數情形。最後一列，$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ 可以化簡成 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 。

I.1.2 數線上的幾何：

I.1.2.1 數線上兩點距離與分點公式

如能算出介於 a、b 之間且與 a、b 距離之比為 2：3 的點 x。這是要算出來的，令 x 等於與 a、b 有關的一條式子，寫出來就知道它是在 a 跟 b 之間的一個分點，且那個分點造成 2:3，寫成一個代數式子就好。

I.1.2.2 含絕對值的一次方程式與不等式

● 如：$|x-3|<2$，這可能是為後面更複雜的不等式 (特別是有平方關係)在鋪路，總是要有絕對值展開，一直到學微積分都是很重要的一個操作。在這裡我們打算把集合引進來，因為我們已經沒有辦法獨立開一個

章節，叫作幾何論或是集合的符號；過去這樣做，我們也認爲太數學型式化，當你什麼都不談，只說集合的交集聯集，其實沒有太多的意義；所以導致這個綱要的一個小理念，仍然跟暫時綱要一樣，把邏輯跟集合刪除，其他沒有一個獨立的章節。但是他的精神卻要在適當的時候放在整個課程裡面，因爲學數學是不可能會不知道集合的符號，而能夠學下去的。

所以什麼叫 x 大於 1 小於 2， x 大於 1 就是說由 x 大於 1 的實數所成的集合，小於 2 是另外一個集合，而 x 大於 1 且小於 2 這樣一個數學式子，說的是那兩個集合的交集，在這種時候把集合交集聯集說出來。所以 $|x-3|<2$ 這個不等式要求解，就要展開絕對值，得到小於 2 大於-2，然後做一些移項，你會得到這樣一個交集；但是如果是 $|x-3|>2$ 就不一樣，拿開絕對值變成大於 2 或小於-2，這時候是兩個集合的聯集，那麼交集是空集合，在這裡就要把集合的符號弄出來。

還有將來在線性規劃，是幾條直線方程式的不等式。一條直線把這個平面分成兩部份，那這個不等式的解就會是兩部分的其中一部份，不管有沒有包括那條直線，一定會有三條直線形成三個半平面，然後你就要求它的交集或是解區間。所以交集聯集在這個時候，要拉進來放到這個脈絡裡面去跟學生說，而不是獨立一個章節跟他說交集聯集。

I.1.3 能進行文字、符號的形式操作

譬如說對 3、 $\sqrt{2}$ 、 π 這些文字跟符號，你會做加減乘除，也希望把這些變成 a、b、c、d、x、y、z 的時候，你也能夠做加減乘除的符號操作。

I.1.3.1 乘法公式

乘法公式還是國中的範圍，但多了三次方，在國中裡面不談三次方的乘法展開，但我猜想大部份老師都會講，學生大概也會背。還有基本的展開，像 a^3+b^3 、 a^3-b^3 做展開的因式分解，這種基本式子都要會。

I.1.3.2 因式分解

這些東西基本上還是國中範圍，但是加了立方和(a^3+b^3)、立方差(a^3-b^3)這兩條公式進去的因式分解，還有同類項合併的眼光。

例：x^2y-xy^2能夠提出一個 xy，這應該是熟練一點的國中生就可以辦得到。

I.1.3.3 分式的運算與化簡

在講用符號的形式，寫出分式的加減乘除。

- 分式的形式操作：$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
- 能化簡繁分式，如：$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{a+3}{a-1}}$。

I.1.4 方程式及其應用

I.1.4.1 二次方程式、不等式及其應用

根與係數的關係就是希望學生能夠知道ax^2+bx+c，亦即把二次方程式的係數全部用符號寫出來；根要能夠用符號的方式把它乘開，然後就知道三個係數和根之間有什麼關係，寫在綱要裡面的目的就是要了解符號操作。

- 不等式的例子：$x^2-2x-3<0$，這個很顯然就是要用到因式分解，因爲要小於 0，所以又有集合的觀念出來，特別是交集和聯集的想法。

I.1.4.2 分式方程式及其應用

這邊特別希望事情不要變得太難，所以說分子、分母次數不超過二次。

- 如：$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{6}$、$\frac{x+2}{x^2+x+1}=1$，其實就是寫成多項式以後的約分或者通分。

I.2 直線

實數線是一條直線，一旦要談直線大概就要到 xy 坐標，所以第二個坐標軸在這個地方就要出來。透過代數形式的操作解決幾何問題，譬如一個最標準的例子：給你一個三角形，問這個三角形的重心在哪裡，這就是一個幾何問題。沒有坐標的時候你用紙繪作圖把她畫出來。或者再難一點，給你一個三角形要你畫出他的

外接圓或內切圓，這都是幾何問題，用紙繪作圖辦得到，但是如果給你一個三角形的三邊長度、角度，你要用代數來解決那個問題，譬如說你要找他的外接圓、內切圓的方程式，這些問題就可以把一個坐標套過去。

在應用上，直角坐標系可以幫助了解兩量關係（ 函數關係 ），如時間跟速度的關係、價值和供應量的關係。線性規劃將直線與具體世界做連結，可以使學生體認到數學的普遍性。

I.2.1 直角座標系

I.2.1.1 點座標、分點公式、三角形面積的行列式公式、距離公式

- 分點公式：$\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，三角形的重心。
- 三角面積的行列式公式

  給你一個△OAB，它的面積可以怎麼算呢？先算△OBD 的面積=$\frac{1}{2}cd$，然後算梯形 ABDC 的面積，大家都知道是底乘高除以二，整個做完後再扣掉△OAC 的面積=$\frac{1}{2}ab$，則得到行列式公式=$\frac{1}{2}(ad-bc)$。

I.2.2 直線方程式

I.2.2.1 斜率、點斜式、斜截式、兩點式、截距式

我覺得最基本的就只有點斜式。

I.2.2.2 兩線關係與聯立方程式

兩線關係特別要談的是從一條線，畫出另外一個特殊線的直線方程式，亦即垂直、平行；解聯立方程式就是在算兩線相交的交點。再來它說主要是談幾何意涵，如平行、垂直、相交、共點等。應用上面就是過直線外一點與該直線平行或垂直線的方程式、三角形的外心、三線共點。

I.2.2.3 點與直線距離

I.2.2.4 線性對應的關係與應用實例

可能做什麼等速運動線性對立的關係，還有交替代數的常數合併，華氏和

攝氏溫度的　，我想這種關係很多

I.2.3 線性規劃

I.2.3.1 二元一次不等式

I.2.3.2 線性規劃

學生了解平行直線系 $ax+by=k$ ，這裡看到五個符號 x、y、a、b、k，卻有三種不同的東西。x、y 是變數，你也可以說 x 是自變量，y 是應變量，a 跟 b 是參數，稱為係數，而 k 也是一個自由參數，意思就是說這個 k 可以變，變給你一個直線解或者這邊寫直線器。然後在線性規劃中的目標函數限為一次式，也就是說真的只做直線解。

I.3 二次曲線

從二次曲線的定義 (介紹二次曲線的焦點跟準線)，推得二次曲線的標準式，(如：橢圓就是到兩個焦點距離的和是這個常數、拋物線就是到焦點跟到準線的距離相等)，只談對稱軸或漸近線是 X、Y 軸的二次曲線，就是對雙曲而言，X、Y 軸是它的漸近線；對拋物線而言，拋物線有個對稱軸，這個對稱軸不是 X 軸，就是 Y 軸；對橢圓而已，就是那個長半徑跟短半徑，一定要在 X 軸跟 Y 軸上，換句話說就是標準式。那此處目的是讓學生熟悉根式的操作與配方法，同時透過平移跟伸縮讓學生認識一般二次曲線都可以化簡成標準式。一個是把 $f(x)$ 換成 $f(x-a)$ 這叫平移，那把 $f(x)$ 換成 $f(ax)$ 這叫伸縮，然後二次曲線與直線的關係不談，留到多變量微積分的時候處理。

I.3.1 拋物線

I.3.1.1 拋物線的標準式

I.3.1.2 二次函數、極值問題

I.3.2 圓

圓是最對稱的幾何圖形。由坐標幾何切入處理圓與直線的關係，在幾何上學習相切、相割、直線與圓的距離等幾何性質，這跟傳統的教材應該是沒

有太大的差別。在代數方面則學習兩變元的配方法、二元一次與二元二次聯立方程式之求解。所謂碰到求解的問題，就是圓跟直線相割時候的焦點，或兩個圓的焦點，要求解的聯立方程式。

I.3.2.1 圓的標準式： $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

I.3.2.2 圓與直線關係：相割、相切、不相交

I.3.3 橢圓、雙曲

I.3.3.1 橢圓、雙曲之標準式

橢圓跟雙曲擺一起它的標準式只差一個號，相加的是橢圓，相減的是雙曲。然後介紹雙曲線的漸近線與共軛雙曲線，介紹漸近線為 X、Y 軸的雙曲線。

I.3.4 坐標變換

I.3.4.1 平移

把圓錐曲線移來移去，讓整個曲線的圖形沒有改變，但是它的方程式改變了。由兩個觀點看這件事，第一個觀點：前頭在講直線的時候就先說了，直線或圓或橢圓都一樣，它是個幾何物件，那這個幾何物件在一個沒有座標平面上是可以表示的，一旦我們要把它附加一個座標的話，目的就是要寫出它的方程式，反過來，這個觀點相當於圖不變，座標挪來挪去；那另一個觀點：尺已經擺好了，而尺在不準變的時候，你的函數可以做平移或伸縮，此情況相當於是尺不變，而圖形在坐標平面上移來移去。這兩件事情是互相相反的動作，那坐標變換就在講圖形的平移。

I.3.4.2 二次曲線的標準化

透過配方法，把一個一般的二元二次多項式，配成一個橢圓，或配成一個標準式，不一定是橢圓，那伸縮就是把 x 換成 ax ， y 換成 ay 。