

矩陣

1. 有一矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ ，試算出下列各題答案

(1) $A + B =$

(2) $A \times B =$

(3) 如果 $C = \begin{bmatrix} x+y & z+t \\ z+2t & x-2y \end{bmatrix} = A$ ，求 x, y, z, t

(4) 一個 2 階矩陣 $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的反矩陣可表示為 $D^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ，試判斷 A 矩陣與 B 矩陣是否有反矩陣？如果有請求出其反矩陣

(5) 試問 AB 與 BA 是否相等？為什麼？

2. 請選出下列選項中正確的選項_____

(A) 如果 A, B 為兩 n 階方陣且 $AB = 0$ ，則 A, B 皆為零矩陣

(B) A, B, C 為三矩陣，已知 $AB = AC$ ，則 $B = C$

(C) A 為一 $m \times n$ 矩陣，則 $I_m A = A = A I_n$ ，其中 I_m, I_n 分別為 m 階、 n 階單位矩陣

(D) A, B 為兩 n 階方陣，則 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(E) $(I_n)^{-1} = I_n$

3. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 2 & a & 3 \\ 2 & -1 & a \end{bmatrix}$ 為一不可逆矩陣，試求 a 的值

4. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，若 $A^3 - 2A^2 + 5I_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ，則 $(a, b, c) =$ _____

5. (特殊矩陣) 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $A^{20} =$ _____

矩陣

解答：

1. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -22 & 44 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ (3) $x=1, y=1, z=3, t=2$

(4) A 矩陣有反矩陣，因為 $2(-1) - 5 \times 7 = -37 \neq 0$ ， $A^{-1} = -\frac{1}{37} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

B 矩陣沒有反矩陣，因為 $-1 \times 8 - 2 \times (-4) = 0$

(5) 否， $AB = \begin{bmatrix} -22 & 44 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 48 & -28 \end{bmatrix}$

2. C、E

3. $a = -7, 5$

4. (5, 2, 14)

5. $A^{20} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$