

數學作為一種語言
Mathematics as a Language

單維彰 • 2021年1月29日

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

數學是一種語言

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

shann.idv.tw/Teach/liberal/hansheng

廣播節目：漢聲電臺·生活掃描

關於數學的人文話題

■ 節目內容摘要與錄音

為服務聽眾，我將大部分的節目錄音製成 MP3 檔案，並由幾位學生幫忙寫了每一節的內容摘要。從民國 89 年 9 月 25 日起，至 92 年 12 月 15 日止，共 159 份錄音，每份約 50 分鐘。從以上連結進入網頁之後，將有 32 頁錄音摘要，每頁呈現 5 份錄音。

您有三種方法獲得這些錄音：

- 線上收聽
- 在  圖標點一下，打開一張新網頁，可以在那裡線上收聽

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

九年一貫數學領域
課程綱要

教育部 97 年 5 月 23 日
臺國 (二) 字第 0970082874B 號令
(100 學年開始實施)

林長壽、張海潮、李瑩英、翁秉仁、陳昭地
李錦瑩、柯華蕓、張煌熙、陳招池、林淑君

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

(一)基本理念

數學之所以被納入國民教育的基礎課程，有三個重要的原因。

1. 數學是人類最重要的資產之一

(略)

2. 數學是一種語言

簡單的數學語言，融合在人類生活世界的諸多面向，宛如另一種母語。精鍊的數學語句，則是人類理性對話最精確的語言。從科學的發展史來看，數學更是理性與自然界對話時最自然的語言。

3. 數學是人類天賦本能的延伸

(略)

語言是學習的基礎

- ◆ 語言是所有表達、學習甚至思維的媒介。
- ◆ 正因為數學本身就是一種語言，所以和自然語言(例如中文和英文)一樣，是學校課程的「主科」。

數學是...

- ◆ 科學之母？
- ◆ 科學之僕？
- ◆ 科學的語言



語言都是抽象的

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

「愛」、「臭」、「椅子」

- ◆ 人們常說數學抽象，其實自然語言也都是抽象的，只是更普遍地訴諸於日常經驗，因習慣而沒有察覺。
- ◆ 譬如『椅子』這個名詞，是否具體地指稱某一類的物體呢？

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

大家都認識椅子

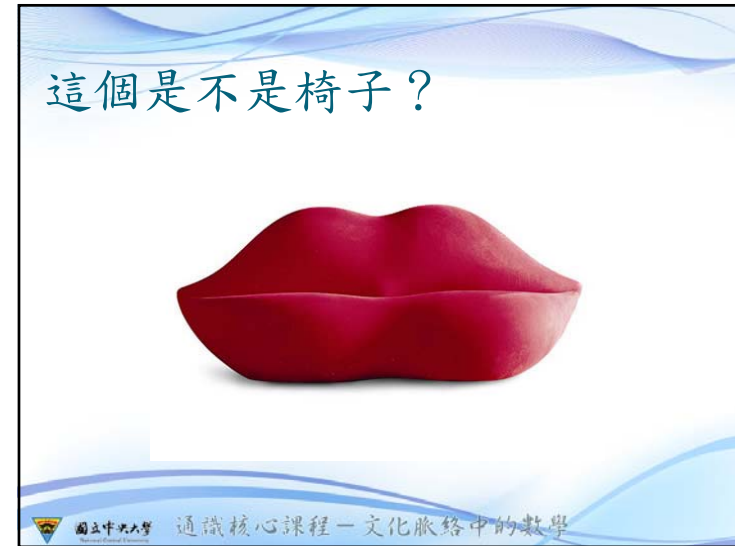


國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

這些是椅子嗎？



國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學



教電腦辨識「椅子」

- ◆ 試想如何寫一份電腦軟體，使得它可以根據一張數位照片判斷那是不是『座椅』？就更能體會這個名詞的抽象性了。
- ◆ 人工智能軟體不採「定義描述」，而採「樣本學習」。

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

自然語言習得

- ◆ 三人成虎：從實例中習得。
- ◆ 有足夠的應用機會。

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

語言都有任意性

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

是馬還是鹿？



國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

1+1 為什麼等於 2？

- ◆ 這個問題之所以困擾著數學教師，是因為它本質上不是數學問題，而是語言問題。
- ◆ 儿、two、zwei、duo
- ◆ 二、貳、II

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

數學命題 vs 科學命題

- ◆ 科學命題的對錯，由外部事物決定。
- ◆ 數學命題的對錯，由內部一致性決定。
- ◆ 如果有人決心要讓 $1+1=10$ 成立，即使固定了 1、0、+、以及 = 的意思，還是可以把數字 10 的定義改成二進制，就能讓 $1+1=10$ 在數學上是對的。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

語言都訴諸直覺

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

語言無法自我定義

- ◆ 數學中有些名詞或關係，不能用更基本的數學詞彙來定義或解釋，所以出現了少數的未定義名詞、公設或設準，必須訴諸於社會化過程中獲得的直覺。
- ◆ 集合論研究集合之間的關係，卻不能定義「集合」。

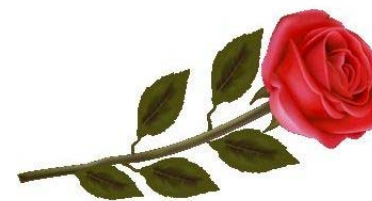
國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

「意義」是什麼意義？

- ◆ 查閱『意義』的文字解釋，將會發現字典要不是刻意遺漏這個詞，就是它的解釋將會繞一圈回到『意義』。追究英文的 *meaning* 也會發現一樣的結果。

Pending a satisfactory explanation of the notion of *meaning*, linguists in the semantic field are in the situation of not knowing what they are talking about.

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學



國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

語言都來源不明

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

上帝創造自然數

- ◆ 自然數是語言的一部份，而語言的理解，幾乎是神秘地內建於我們的大腦。
- ◆ 面對無法考察其源也難以一一釐清的現象，中國文化歸因於「天」，西方文化訴諸於「上帝」，現代科學則說是「基因」。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

數學是人類天賦本能的延伸

- ◆ 每一位同學，都在大約三歲學會了唱數：從一數到十，然後百。
- ◆ 一切數學從此開始。
- ◆ 自然數沒有具體對象，只是音節。重要的不是「數是什麼」，而是用它們來點數。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

點數

- ◆ 「點數」：從自然數到物件的一對一且映成函數。
- ◆ 沿著自然數音節向前數一加，向後數一減。
- ◆ 自始以來，學習數學就是學習語言。直到有一天，孩童被要求把這一切用符號寫下來，然後迅速地發展符號，超出了經驗範圍，才開始了所謂的「數學教育」。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

語言都能編撰為辭典

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

數學家合編一本辭典

古今中外的數學工作者，以他們世代相傳對於證明的標準和堅持，合力編撰一本辭典。在這本辭典裡，他們定義自己的名詞動詞連接詞形容詞和副詞，然後利用這些經過定義的詞彙，寫出一條又一條絕對正確或者絕對錯誤或者絕對無法判定正確或錯誤的敘述句。

數學定理 Theorem

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

數學的用法

- ◆ 使用者為其關心的對象找對對應的數學名詞，查辭典找到關心的敘述句（命題）。
- ◆ 數學上的結論並非真理，它最多只保證了在此語言系統之內正確性。還要再將語言對應回現實，才能考核它的實際意義。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

蘋果 當作 球



- ◆ 只要使用者認為她所面臨的對象可以被視為球，則數學辭典裡所有關於球的句子都可以帶來推論的威力。例如，一個球不可能在其周圍同時碰觸超過 12 個同樣直徑的球。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

數學「真實」的神秘性

- ◆ 數學辭典裡的大多數名詞，譬如點、直線、平面、圓、球、機率、無理數，在物質世界裡根本沒有對應的實例。
- ◆ 數學物件之間的結構全是語言系統之內的想像，為何竟然能夠對應自然界的真實？

語言都須記憶



記憶是為了「流暢地思考」

- ◆ 必須具備基本的英文文法與幾千個字彙，才能流暢地閱讀英文文本，獲得概念或樂趣。
- ◆ 必須具備基本的計算操作能力，才能流暢地閱讀數學文本，獲得概念或樂趣。
- ◆ 熟能生巧：流暢有助於產生創新的想法或作法。

記憶就像金錢

記憶不是萬能
沒有記憶萬萬不能

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

英語（第二語言）習得

字典學習法
VS
脈絡學習法

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

數學的教材與教學

從五年級起傾向於
字典學習法
年級越高越嚴重

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

語言都會被操弄

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

數字不會說謊

但是報數字的人會

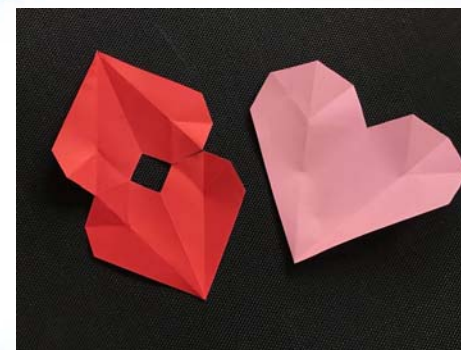
操弄數學的伎倆

- ◆ 引用數學定理時，忽略或隱瞞前提。
 - ◆ 需數學素養搭配常識與科學素養
- ◆ 引導讀者「影射」其結論。
 - ◆ 需數學素養搭配批判思考

數學沒有「標準答案」

- ◆ 數學發展定理，而定理非真理。
- ◆ 語言都有被「操弄」的空間，數學也是。
只要給了足夠的條件，任何數學命題都可以是正確的。（此為誇飾修辭。）
- ◆ 例一（康氏家學）：
將一張正方形色紙剪下一個角，
剩下幾個角？

一刀剪



數學「潛規則」的誤導

- ◆ 例題：
1, 2, 6, 42, 1806, ???
- ◆ 很多人「秒殺」
- ◆ 只要根據前五項「看出」一條規則，所作的第六項都是「對」。

無聊的題目 1, 2, 6, 42, 1806, ?

- ◆ 網路答案： $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_n \times (a_n+1)$
所以 $a_6 = a_5 \times (a_5 + 1) = 1806 \times 1807 = 326,3442$
- ◆ 另一個答案： $a_{n+1} = a_n \times \text{nextprime}(a_n)$
其中 $\text{nextprime}(n)$ = 比 n 大的最小質數
例如 $\text{nextprime}(1)=2$,
 $\text{nextprime}(10)=11$,
所以 $a_6 = a_5 \times \text{nextprime}(a_5)$
 $= 1806 \times 1811 = 327,0666$

其實有無窮多種答案

- ◆ 六點決定 (唯一) 五次多項式：

$$f(x) = \left(\frac{547}{40} - \frac{k}{120}\right)x^5 + \left(-\frac{407}{3} + \frac{k}{8}\right)x^4$$

$$+ \left(\frac{3781}{8} - \frac{17}{24}k\right)x^3 + \left(-\frac{2020}{3} + \frac{15}{8}k\right)x^2 + \left(\frac{3237}{10} - \frac{137}{60}k\right)x + k$$

$$f(1) = a_1 = 1, f(2) = a_2 = 2, \dots, f(5) = a_5 = 1806$$

$$a_6 = f(6) = 1,0302 - k$$

數學「正確性」不假外求

- ◆ 只要給足了條件，任何數學命題都可以是對的。
- ◆ 數學命題不根據自然或社會現象判定。
- ◆ 根據前提而獲得的內部一致結論，就是「正確」的。

數學抗拒語言的流變

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

自然語言會流變

乖

數學辭典維持了 2500 年的
相容性。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

數學是「永續經營」企業

- ◆ 數學的創新都是「非破壞性的」，數學以最高優先維持舊觀念的相容性。
- ◆ $i^2 = -1$ 並未違背數，而是擴充了數的觀念。
- ◆ 複數 $z = a + bi$ 相容於實數 (令 $b = 0$)。

Backward Compatibility.

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

定理 vs 真理

- ◆ 定理 (Theorem) 恆久不變，但僅限於約定的條件前提與定義、公設、公理。
- ◆ 真理 (Truth) 其實隨人的意識形態、經常也隨時代而變。
- ◆ 根據前提而獲得的內部一致結論，就是「正確」的。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

理論、定理、真理

Theory, Theorem, Truth

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

理論 vs 定理

- ◆ 根據有限次數的觀察而獲得一般性的解釋或推論，即為理論 (Theory)。
- ◆ 言談中會說「理論上」 (theoretically)，暗示它可能不靈。
- ◆ 定理以演繹式的「證明」，保證人造觀念與觀念之間的關係。必有前提、所涉觀念皆須定義。
 - ◆ 偶數的平方仍是偶數。
 - ◆ 若 a, b, c 皆為整數且 $a < b$ ，則 $a+c < b+c$ 。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

理論並非僅由歸納

- ◆ 理論也有心智創造的成分。
- ◆ 越不尋常的創造，形成越「偉大」的理論。
 - ◆ 牛頓：力正比於速度的變化率
 - ◆ 愛因斯坦：光速是絕對的，時間和距離反而是相對的

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

理論：定理 = 客體：主體

- ◆ 理論和定理的差異，並不在於歸納與演繹的兩種思考方式，而是在於客體與主體之分。
- ◆ 人作為客體：
 - ◆ 自然科學 (行星的軌跡、人的生老病死)
 - ◆ 社會科學 (時尚的流變、金融的漲跌)
- ◆ 人作為主體：
 - ◆ 藝術 ◆ 語言 ◆ 文學 ◆ 宗教 ◆ 哲學
 - ◆

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

可產生定理的文化領域

- ◆ 兩種可以產生定理的人類創造：
 - ◆ 數學
 - ◆ 電腦或計算機科學
- ◆ 有人揶揄「計算機科學」(computer science) 是矛盾修辭 (oxymoron) 。何「科學」之有？
- ◆ 程式出錯不會責怪硬體，而會責難其設計者。由此可見電腦之內應有「定理」。

客體：主體＝證據：證明

- ◆ 基於客體和主體的差異：
 - ◆ 理論的驗證靠「證據」(evidence)
 - ◆ 定理的成立靠「證明」(proof)

(證明是一種特殊的文體)
- ◆ 這是數學與科學的基本差異。

理論都是暫時的

- ◆ 理論「等著備推翻」。
- ◆ 定理 (在前提條件下) 是絕對正確的。
- ◆ 言談之中，有說「理論上」的必要，卻沒有「定理上」(theoremtically) 的說法；只會說「根據定理」。

定理 vs 真理

- ◆ 定理有前提、依定義，不可影射延伸。
 - ◆ 即使「若 a, b, c 皆為整數且 $a < b$ ，則 $a+c < b+c$ 」已成定理
 - ◆ 不能推論當 a, b, c 為分數且 $a < b$ 時，同樣 $a+c < b+c$
 - ◆ 若認為上述命題成立，需另外證明
- ◆ 言談中的「真理」經常不問前提、不查定義。

再也沒有一種人類的發明
能像「真理」這樣
製造那麼多的仇恨
折磨那麼多的心靈
塗炭那麼多的生命

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

結語

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

很多人(誤)認為
數學是一種科學
有人說數學是哲學
有人說數學是藝術

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

數學可以類比於語言，
但數學又都不是。

國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學


國民中小學與普通高級中學課程綱要各領域對照表

國民中小學九年一貫課程綱要		普通高級中學課程綱要	
語文	本國語文(國語文) 1-9 年級	語文	國文
	本國語文(閩南/客語/原住民)		英文
	英語(3-9 年級)		
數學		數學	
自然與生活科技 (3-9 年級)	生活課程 (1-2 年級)	自然	基礎物理
			基礎化學
生活		基礎生物	
		基礎地球科學	
社會 (3-9 年級)		社會	家政
			生活科技
資訊科技概論			
歷史			
藝術與人文 (3-9 年級)	藝術	地理	
		公民與社會	
健康與體育		健康與體育	
綜合活動 (包含童軍、輔導、家政、團體活動..等)		綜合活動 (依實際需要、安排各項綜合活動、如專題演講、社團活動等)	

65

COMMON CORE STATE STANDARDS FOR


English Language Arts & Literacy in History/Social Studies, Science, and Technical Subjects



國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學


COMMON CORE STATE STANDARDS FOR

Mathematics



國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

所以，
數學畢竟就是...



國立中央大學 通識核心課程－文化脈絡中的數學

