

投票
民主的技術與意義
單維彰 · 2020年5月4日

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

民主是什麼？

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

Democracy

- ◆ 英文 ← 拉丁文 ← 希臘文
- ◆ 歐戰 (WWI) 之後 · 美國行銷
- ◆ 民國 8 年 (1919 年) 五四運動：德先生
- ◆ 煽動宣傳詞：「民主—人民當家作主」

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

本文沒有答案

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

選舉程序

- ◆ 投票：一群人做共同決定的方法之一
- ◆ 選舉程序：投票規則與計票規定
- ◆ 法律條文
- ◆ 徒法不足：更高層次的共識與自制
「道德」或「潛規則」

民主程序的形上程序

民主只是一套程序

- ◆ 管理與決定公眾事務的一套程序

你有你的真知灼見

我有我的真知灼見

誰的真知灼見

該成為社會的定見？

民主只是一套程序

- ◆ 管理與決定公眾事務的一套程序
- ◆ 不是承諾與應許
不能保證內容與產出
- ◆ 不是唯一的程序
西方逐漸選擇它是因為...看來較少痛苦
- ◆ 非原生的觀念
我們是因為...「西化」

「爾愛其羊·我愛其禮」

- ◆ 羊：成本
- ◆ 禮：程序
- ◆ 民主的本質：不求有功，但求無過
別怪民主導致平庸
- ◆ 民主的代價：犧牲效率
耐心是美德，美德無法用法律規範

民主程序的形上程序

- ◆ 每個人都能免於恐懼地表達意見
- ◆ 緘默是另一種表達方式
- ◆ 每個人都能免於恐懼地保持緘默

民主程序的形上程序

- ◆ 每個人都能免於恐懼地表達意見或保持緘默
- ◆ 不做事實以外的煽動與臆測
- ◆ 言者與聽者都能分辨：
 - 意見
 - 事實
- ◆ 民主 ← 知識 ← 教育
- ◆ 任何人不該自詡為正義的一方

民主程序的形上程序

- ◆ 每個人都能免於恐懼地表達意見或保持緘默
- ◆ 就事論事地發表意見或陳述事實
- ◆ 無人得以凌駕「當時的」法律
民主程序理應可以在程序內
修訂或制訂法律

民主程序的形上程序

- ◆ 每個人都能免於恐懼地表達意見或保持緘默
- ◆ 就事論事地發表意見或陳述事實
- ◆ 每個人都須遵守經程序的約定（法律）
- ◆ 相關意見均已充分表達
- ◆ 接受此程序產生的結果

同樂會二籌

共同決定一種冷飲

- 15 名籌備委員。
三種飲料投票擇一。
- T. 冰紅茶
 - B. 啤酒
 - C. 雞尾酒

一人一票相對多數決

$T > B > C$
6 5 4

- 『我最討厭紅茶...』
- 『少數服從多數嘛...』
- 『要有風度啊...』

二輪投票決勝負

$$\begin{matrix} \mathbf{B} > \mathbf{T} \\ 9 & 6 \end{matrix}$$

(對立 / 瞪~~)
(沈默...)

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

「科學」計分制

$$\begin{matrix} \mathbf{C} > \mathbf{B} > \mathbf{T} \\ 19 & 14 & 12 \end{matrix}$$

『我不玩了...』
(叛徒 / 瞄~~)
(唬爛...)

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

15 位同學不理性嗎？
民主素養不足嗎？
主席的陰謀嗎？
棄保和聯盟的策略嗎？

很可能 以 上 皆 非

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

選舉理論

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

選舉程序

- ◆ 根據選民表達的意願，將候選對象排序的規則
- ◆ 數學函數：輸入選民卷宗，輸出候選對象的排序
- ◆ 選民卷宗：選民對候選對象之排序定見

若有 N 位選民， K 個候選對象，則卷宗內有 N 個 K 維向量，每個向量表示 K 個對象在一位選民心中的排序。

以「二籌」為例

卷宗內有 15 個三維向量；共應有 $3!=6$ 種向量，但實際上只有 3 種不同排序，統計如下表。

人數	心中的定見
6	$T > C > B$
5	$B > C > T$
4	$C > B > T$

15 位委員都 「理性」且「誠實」地投票

人數	心中的定見
6	$T > C > B$
5	$B > C > T$
4	$C > B > T$

第一回：選心中最優先
T6、B5、C4
第二回：在T與B之間擇較優者
T6、B9
第三回：依序給 2、1、0 分
T12、B14、C19

「二籌」投票案並無陰謀

- ◆ 全是選舉程序造成的
- ◆ 第一回選出「最多人最不喜歡的對象」

「誠實」與「理性」

- ◆ 誠實：依照定見與規則投票
否則稱為「有策略」
- ◆ 理性：其定見符合遞移律
若 $A > B$ 且 $B > C$ ，則必須 $A > C$
- ◆ 理性 vs 人性：選舉當下的定見

選舉程序的數學理論

只要 $K > 2$ ，存在特殊的卷宗，
使得以設計 K 種不同程序，
針對同一組卷宗，讓每個候選對象
在（誠實且理性的）選舉中各獲勝一次。

有沒有「最公道」的選舉程序？

如果因規就習奉某種程序為主臬，
聽其主宰我們的生活，
豈不荒唐而可悲？

但問「公道」何物？

鞏多瑟和波達

Condorcet 開創選舉理論


Essai sur l'application de l'analyse a la probabilité des decisions rendues a la pluralite des voix, 1785.
論數學分析應用於多數決之機率問題 (1785)

Condorcet 作為數學家

16 歲發表第一篇數學論文，25 歲因積分學的研究獲選法國科學院士。

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

Condorcet, 1743—94



鞏多瑟被譽為法國最後一位啟蒙哲學家。他在法國大革命中扮演的角色幾乎就是美國獨立運動中的傑佛遜。作為一名關心平民的貴族知識份子，他起草憲法、鼓吹宗教自由、擘畫教育、反對蓄奴、提倡女權。然而，法國大革命後來失控，他一夜之間變成通緝犯，入獄後第三天暴斃於地板上，未經審判、死因不明。

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

鞏多瑟程序

- ◆ 公道：在所有捉對選舉中獲勝次數最多
- ◆ 成本太高
若有 K 個候選對象，要舉辦 C_2^K 場選舉
- ◆ 「二籌」之例，須辦三場選舉

T : C = 6 : 9 → C 贏

T : B = 6 : 9 → B 贏

B : C = 5 : 10 → C 贏

總獲勝次數 C : B : T = 2 : 1 : 0

人數	心中的定見
6	T > C > B
5	B > C > T
4	C > B > T

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

鞏多瑟程序

- ◆ 致命傷：可能發生不理性的結論
- ◆ 若 15 名選民的卷宗如右

人數	心中的定見
5	T > C > B
5	B > T > C
5	C > B > T

T : C = 10 : 5 → T > C
B : C = 5 : 10 → C > B
T : B = 5 : 10 → B > T

總獲勝次數 C : B : T = 1 : 1 : 1
更糟的是產生不理性的結果 T > C > B > T

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

波達計票法 (Borda Count)

- ◆ 公道：累計得分最高
- ◆ 每位選民必須將候選對象嚴格排序
- ◆ 在選票上依序給 $K-1$ 分、 $K-2$ 分、...、0 分
- ◆ 「二籌」的第三回選舉程序
- ◆ 投票操作較複雜，廢票的定義嚴格

常見的變形：在選票填寫 1, 2, ..., K 之序，
得分總計由低到高排序。



喻以早曾發明鞏多瑟程序



尼閣老也曾批評喻以而提出波達計票法

Borda (1733—99)



波達有貴族背景，在 20 歲提出一份幾何學方面的論文，22 歲在軍中獲得數學家職位；他的生涯一直是學術與軍旅並行。在 1776~78 年間，他還擔任艦長，帶著法國海軍越洋幫美國人打了獨立戰爭。

波達影響我們最深的一件事，是他定義了「公尺」：地球沿經線從北極到赤道的一千萬分之一。

巴黎經線



法國人曾經主張以「巴黎經線」—通過巴黎聖母院尖塔的經線—為基準子午線（現在的世界標準是格林威治經線）。該線的連續陸地線段北起敦克爾克，南迄西班牙境內的巴塞隆納。



複讀儀：法國科學院想爭取預算用它執行測量。
法國大革命差點革了科學院的命，拿破崙救了它。

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

鞏多瑟程序成為「公道」基準

悖離鞏多瑟程序的機率最高者：
一人一票相對多數決

早期研究法的共通問題：
沒有「公道」的定義

所以沒有批判選舉程序的客觀標準。

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

雅樂不可能定理

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

Kenneth Arrow (1921—2007)



1951 年博士論文
Social Choice and Individual Values
1971 年諾貝爾經濟學獎
普遍可能性定理
普遍被稱為
雅樂不可能定理

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

Arrow 的洞見

「公道」不能被其他更基本的觀念定義，所以採取歐幾里德處理平面幾何的方法：建立公理，訴諸於社會的同意與共識。

公理可受檢視彼此的獨立性與一致性，本身並無對錯。公理的接納與否，就是社會選擇。

Arrow 的 5 條「公道」公理

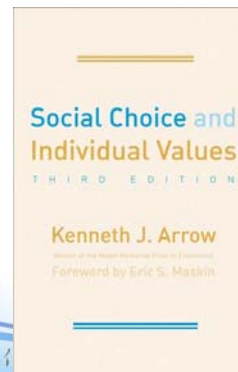
1. 每一個選民的影響力都一樣。
2. 除了不能不理性的之外，對選民的排序沒有任何限制。
3. 如果所有選民都認為 $A > B$ ，則選舉結果也要 $A > B$ 。
4. 選舉結果關於 A 和 B 的排序，應該只由卷宗內 A 和 B 的相對順序決定，與任何第三者無關。
5. 如果所有選民都是理性且誠實投票，則選舉的結果也要顯示理性的排序。

1. 每一個選民的影響力都一樣

- ◆ 無獨裁者。
- ◆ 無所謂「德高望重」。
- ◆ 每個選民可獨立思考（有足夠知識）。
- ◆ 不因人廢言，不因言廢人。

雅樂不可能定理

如果候選對象 $K > 2$ ，則不存在「公道」的選舉程序。



當 $K = 2$

- ◆ 一人一票相對多數決是「公道」的。
- ◆ 其他（常見的）選舉程序得到的結果同上。
- ◆ 都一樣是「公道」的。
- ◆ 鞏多瑟程序有其道理。

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

數學的「不可能」

- ◆ 不是經驗法則。
- ◆ 不是努力不足。
- ◆ 不是智力不逮。
- ◆ 就是「不可能」。

例如不可能找到正整數 $m、n$
使得 $m^2 = 2n^2$

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

鞏多瑟違背 5、波達違背 4

- ◆ 起初三種飲料，卷宗如上。

人數	心中的定見
5	$T > C > B$
6	$B > C > T$
4	$C > B > T$

波達計票應為
 $C : B : T = 19 : 16 : 10$

- ◆ 若加入冰咖啡 K ，卷宗如下。

人數	心中的定見
5	$T > K > C > B$
6	$B > K > C > T$
4	$C > B > T > K$

$B : C : K : T = 26 : 23 : 22 : 19$
冰咖啡自己沒贏
卻對掉了原來的的前兩名。

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

多數決非常容易違背 4

- ◆ 選舉理論很少探討

「一人一票相對多數決」

- 不提供排序
- 容易選出「最多人最不喜歡」的優勝
- 特別容易違背公理 4

以「二籌」為例，只要最喜歡 T 的 6 人中，有兩人改成最喜歡 K ，其他人的「最喜歡」沒變，不論 K 排在第幾順位，皆使得優勝由 T 變成 B 。

人數	心中的定見
6	$T > C > B$
5	$B > C > T$
4	$C > B > T$

人數	心中的定見
2	$K > T > C > B$
4	$T > \dots$
5	$B > \dots$
4	$C > \dots$

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

同意票制 (approval voting)

- ◆ 違背公理 1
 - 全選或全不選，等於棄權
 - 只選一名，或僅不選一名者，相對影響力最大
- ◆ 如果所有選民都僅選一名，則等於「多數決」

雅樂定理的大眾解讀

- ◆ 必須在殘缺的選舉程序和獨裁之間，做一選擇
- ◆ 但「公理」並不唯一，可以有另一套競爭的公理

薩伊的修訂理論

Donald Saari (b. 1940)



1967年普度大學數學博士，
現為 UC Irvine 的
Distinguished Prof of
Mathematics and
Economics

認為 Arrow 的定義內含矛盾
修訂後則可行。

薩伊的思想關鍵

- ◆ 選舉程序應設計得「容易檢定選民的理性」
- ◆ 按此觀點，雅樂公理 4 反而限制了上述功能
- ◆ 順便一提：
「多數決」最不能檢定選民是否理性

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

Saari 的修訂：公理 4'

只要將 Arrow 的「公道」公設加上三個字（一個觀念），就存在滿足（新）公道條件的選舉程序了。

4' 選舉結果關於 A 和 B 的排序，應該只由卷宗內 A 和 B 的相對順序和距離決定，與任何第三者無關。

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

卷宗內的「距離」

- ◆ 在 $B > C > T$ 中，B-C 距離為 $|1-2|=1$ ，B-T 距離為 $|1-3|=2$
- ◆ 若加入冰咖啡 K 之後，B、C 雖順序未變，但距離改變，則公理 4' 允許選舉結果改變。
- ◆ 新卷宗的 $B > K > C > T$ 中，B-C 距離改變為 $|1-3|=2$

人數	心中的定見
5	$T > C > B$
6	$B > C > T$
4	$C > B > T$

人數	心中的定見
5	$T > K > C > B$
6	$B > K > C > T$
4	$C > B > T > K$

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

得獎的是...

國立中央大學 通識核心課程—文化脈絡中的數學

薩伊的修訂與波達的救贖

- ◆ 波達計票法並未違背公理 4'
- ◆ 波達計票法符合薩伊的「公道」公理
- ◆ 波達計票法是「公道」的選舉程序
- ◆ 其他（討論過的）程序都「不公道」

數學能幫忙的是...

- ◆ 證明波達計票法是「公道」的
- ◆ 舉例說明「多數決」很糟糕

數學幫不上忙的是...

- ◆ 要不要接受薩伊修訂的「公道」公理？
- ◆ 要不要繼續使用「多數決」？

結語（民主不是應許）

公眾抉擇程序

- ◆ 兩票制？
- ◆ 容許平分排序（例如 $T > B = C$ ）？
- ◆ 抑制「策略」的選舉程序
- ◆ 商業、經濟、社會福利
- ◆ 決策理論（decision theory）

(勿) 把民主當信仰

- ◆ 美國民主黨當初主張蓄奴
- ◆ 希特勒經選舉與議會取得權力
- ◆ 邏輯大師 Gödel 發現美國憲法容許合法產生希特勒
- ◆ 民主政體不見得減少人命死傷



民主與教育

- ◆ 民主政體特別需要教育的普及
- ◆ 每個人都能參與決策
 - 每個人都要負起責任
- ◆ 有知識、能思辯、資訊透明才有意義

The End