

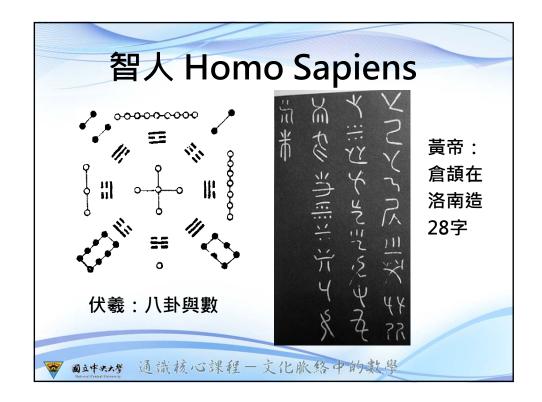


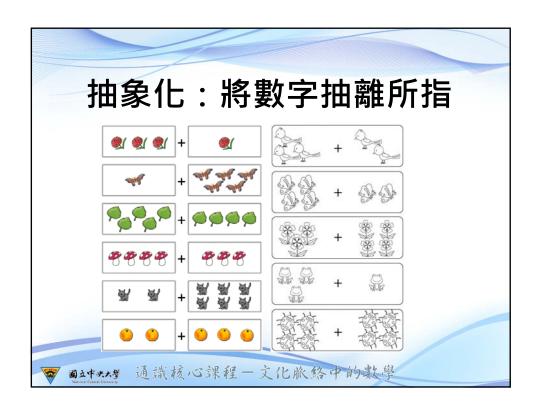
Electronic Computer

電子計算機的發明,並非1940年代靈光一閃的成果,而是人們五千年來挑戰計算問題一脈相承的 創造性成就。今天我們所知的進步加速狀況,其 實從很久以前就起步了。



▼ ■立中头楼 通識核心課程一文化脈絡中的數學









第一代計算方法:對位記數

自然數在觀念上是無上界的,落實到語言裡需要無窮多組語音符號。漢語從 11 開始使用重複的語音, 英語從 13 開始,但是 13~19 之間的規則異於 21 以上的規則。

■立中*大學 通識核心課程一文化脈絡中的數學

十進制:滿十進位的記數法

須要十個獨立符號,分別代表零和小於十的正整數。每一位只放一個符號,每一位滿十就歸零而 在其上位進一。

 $-= \equiv \equiv X \cap +)(?$

每一位有其位名:個、十、百、千、萬 ...。

TO TO

國立中央大學 通識核心課程一文化脈絡中的數學

記數卻未必對位

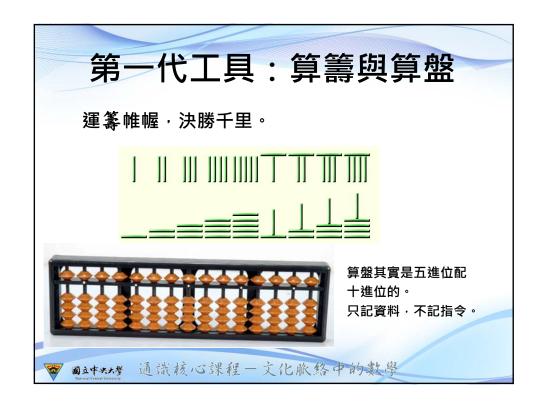
羅馬數字僅為記數,不對應語言,也不用來計算。 例如羅馬數字 1 ~ 20 如下

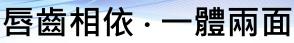
羅馬數字隱含五進制 \cdot 例如 \vee 表示 $5 \cdot L$ 表示 50; 可見 LV = 55。



國立中共學 通識核心課程一文化脈絡中的數學



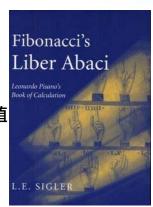




筆算的先決條件 方便書寫的紙筆

(紙、鉛筆、橡皮擦)

· 印度--阿拉伯數字的真正價值 筆算的算法 (直式)

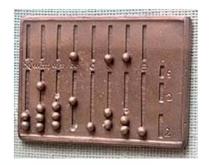


費波那契《算術書》1202

■ ■立中** 通識核心課程一文化脈絡中的數學

羅馬算盤

也是五進位搭配十進位。只記資料,不記指令。



小石子: Calculi



Calculate (v)

Calculus (n)

人們根據協定 (protocol) 解讀算盤上的物質擺設。



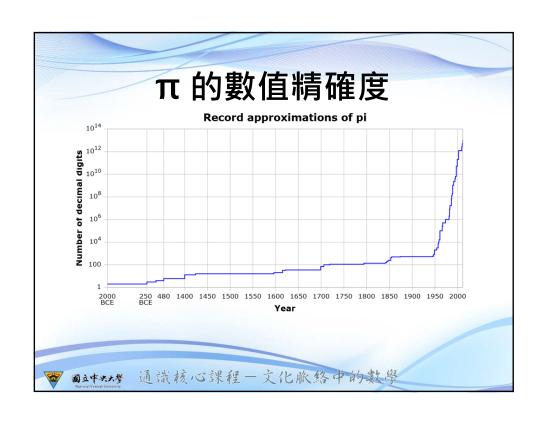
國立中共學 通識核心課程一文化脈絡中的數學

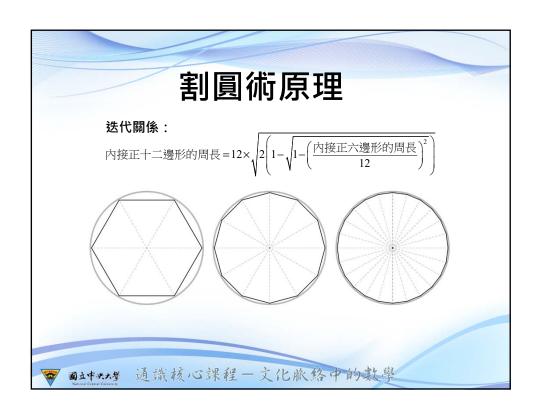


第一代的成就

- ◆ 以計算圓周率為例:圓皆相似,周長對直徑之比值為定數,記作 π。
- ◆ 是故 P=2πr 為定義而非公式; 猶如 F=ma 為定義而非公式。
- ◆ 估計其數值——割圓術一途。

■立中央大學 通識核心課程一文化脈絡中的數學







割之彌細,所失彌少

阿基米得(西元前 250 年・秦始皇)

100 多邊,但有內接與外切

 $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$

劉徽(西元 250 年,三國魏司馬懿)

200 多邊,設徑長一百萬

 $\pi \approx 314,1866$

祖沖之(西元 470 年・南朝宋齊兩代)

10000 多邊, 設徑長一千萬

355 113

周長在 3141,5926 和 3141,5927 之間

(世界記錄一千年)

國立中共考 通識核心課程一文化脈終中的數學





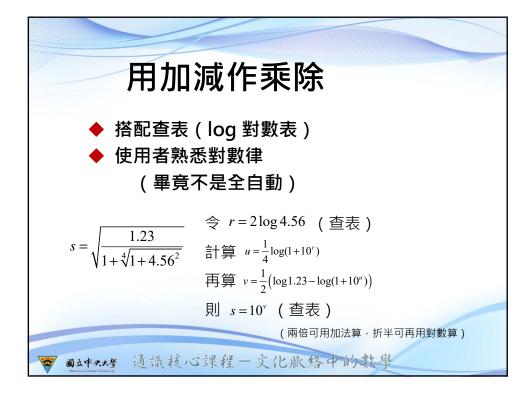




内含加、減算法

- ◆ 機械構造
- ◆ 固定程式 (non-programmable)
- ◆ 內建加減算法,使用者只要學會輸入
- ◆ 人的功能:提供動力

₩ 國立中共大學 通識核心課程一文化脈絡中的數學





計算方法需要跟進一步

- ◆ 數學家不易養成
- ◆ 加法器不能用來做對數表與三角表
- ◆ 可操作計算機的技術人員難以習得複雜問題所需的數學
- ◆ 單獨的工具進步,對文明貢獻有限
- ◆ 亟需進步的計算方法 ...

■ ■立中共考 通識核心課程一文化脈絡中的數學



計算方法的躍進: Calculus

- ◆ 讓機器自動執行的算法,成為可能: 簡單而需大量重複執行的計算步驟
- ◆ 發掘了無窮的秘密,發現了 依循簡單規則而無窮重複 即可無限精準的計算公式



可能交給機器的計算方法

例如估計圓周率的簡單規則:

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right)$$

(需要計算機進步到可以作乘除)



簡單而大量重複的計算方法

例如估計正弦的簡單規則:

若 θ 是一個銳角, $0 = \theta \pi / 180$, 則

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

(其他廣義角三角比都可以從銳角正弦算得)



■ ■立中共學 通識核心課程一文化脈絡中的數學

觀察簡單的規律性

例如常用對數 \log 可以藉由以下 $\ln x$ 得到:

$$\ln x = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \frac{s^5}{5} - \dots \qquad \sharp \Leftrightarrow s = x - 1$$

(細節略)



四立中共學 通識核心課程一文化脈絡中的數學

算之彌多,所失彌少

- ◆ 社會分工更有效率 (以前幫不上忙,現在可有貢獻)
- ◆ 如果想作牛,不怕沒犁拖

例如用前面方法計算 sin 90° 已知應為 1.00000000... 計算 3 項得 1.00452485

計算 5 項得 1.00000354



■ ■立中** 通識核心課程一文化脈絡中的數學

第二代方法初試身手

▶梅欽公式一舉突破百位(1706)

$$\pi = 4\left(4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}\right)$$

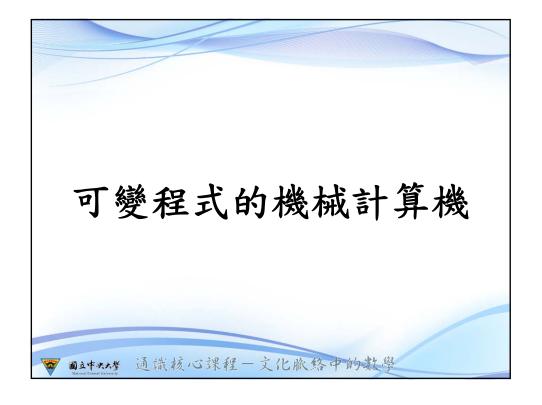
其中
$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

雇人 (computer) 用筆算



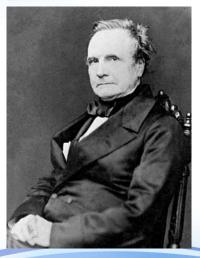
國立中共學 通識核心課程一文化脈絡中的數學





Babbage · 1791—1871

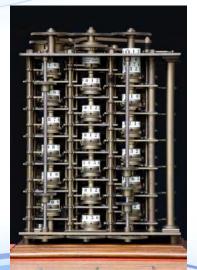
改弦易轍另起爐灶。



二十二歲從劍橋獲得數學博士學位,當時被認為是很具潛力的年輕數學家 1822 年獲得英國皇家學院的資助,應用當時新的數學知識,著手設計並製造功能更廣但仍固定程式(non-programmable)的機械型計算機:差分機(Difference Engine)。十年後,從一部來自巴黎的織布機獲得領悟,放棄了即將完成的作品,

■並中共考 通識核心課程一文化脈絡中的數學

改弦易轍,可變程式

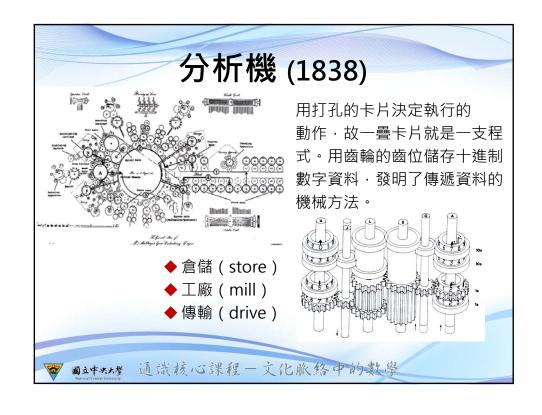


十年努力,可付實用的差分機 尚未誕生,從一部來自巴黎的 織布機獲得領悟,忍心放棄即 將完成的作品,改弦易轍,另 起爐灶。開始設計可變程式 (programmable)的 分析機(Analytical Engine)。

(第二代差分機的現代複製品)

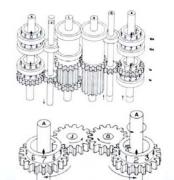
國立中共學 通識核心課程一文化脈絡中的數學





當年的材料和製造技術不及

留下設計圖 300 多張,筆記 6000 多頁,許多半成品



- ◆ 倉儲 (store)
 - → 記憶體 (memory)
- ◆工廠(mill)
 - → 算術邏輯單元 (ALU)
- ▶ 傳輸 (drive)
 - → 匯流排 (bus)

國立中共2 通識核心課程一文化脈絡中的數學

Ada Byron · 1815—52



艾達是英國詩人拜倫之女,能詩善畫, 從笛摩根 (de Morgan) 習數學, 是著名才女,後為伯爵夫人。

認識 Babbage 之後,看見分析機的 半成品說它是『偉大而美麗的發明』 投入程式設計的想像。

父女終生未見一面,死後與父親同葬; 兩人皆得年卅六歲。

程-文化脈絡中的數學

編織代數的花紋



甲卡織機創造花紋的打孔卡片

"We may say most aptly that the Analytical Engine weave algebraic patterns just as the Jacquard-loom weaves flowers and leaves."

—Ada Byron

■立中头楼 通識核心課程一文化脈絡中的數學

程式設計的核心技術在『重複』 Babbage and Ada, 1840

自動計算機的真正重要之處,在於它可以重複執行一套給定的程序。其重複次數可以在計算前確定,也可以依計算結果而臨時決定。

"(The real importance of an automatic computer) lies in the possibility of using a given sequence of instructions repeatedly, the number of times being either pre-assigned or dependent upon the results of the computation."

■ ■立中*** 通識核心課程一文化脈絡中的數學







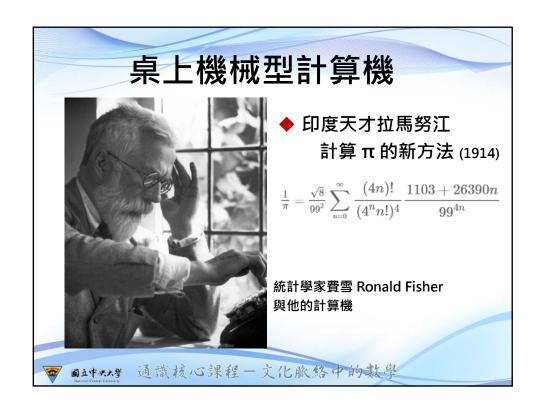


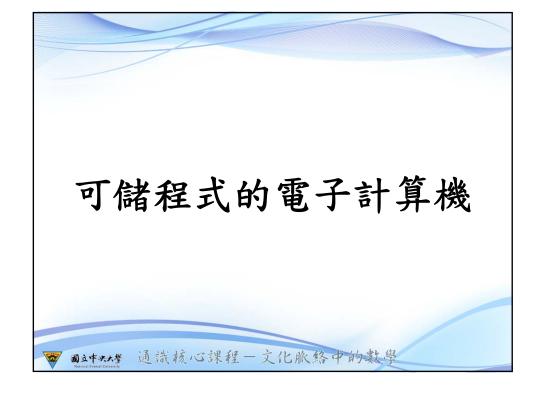




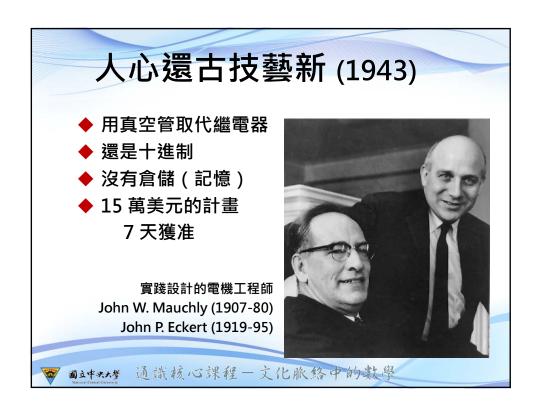


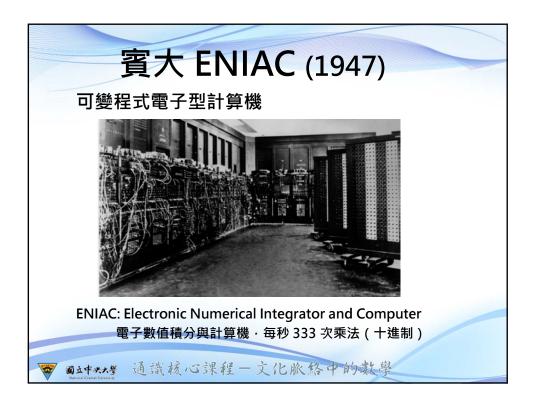


















2023/4/27 **數·計算與文明

John von Neumann (1903—57)



原籍匈牙利、躲避納粹成為美 國人,廿世紀最傳奇的數學人 物。學術工作涵蓋當時所有的 數學,還獨自開創了好幾種全 新的分枝。心念速度之快與記 憶力之強,在世之年沒有計算 機趕得過他。

1944 年夏末,認識了 ENIAC 計畫中的數學家,獲准加入, 深入了解之後提出創見。

■ ■立中共學 通識核心課程一文化脈絡中的數學

馮諾以曼的 3 項藍圖

電子元件自然可分兩種狀態:有電、沒電,所以電子 計算機應該要模擬一進制數字,才是最簡單的設計。 為了讓計算機能夠方便地執行不同程式,指令和資料 都要儲存在計算機裡面。這就衍生了一個新的技術問 題:如何讓電流停留?於是產生了**記憶體**。

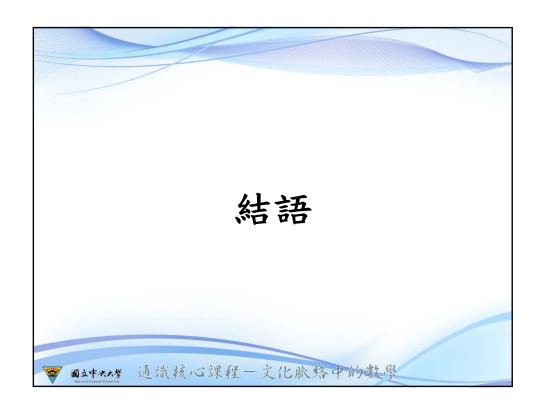
- 1. 採用二進制數字。
- 2. 指令和資料都儲存在機器內。
- 3. 序列式執行,每單位時間執行一個動作。

國立中共學 通識核心課程一文化脈絡中的數學









在那(1952)之後...

電子計算機當初只是一個快速而自動執行數字計算的工具;如今演變成一種集「資訊儲存、處理與傳播功能」於一身的媒體,這個現象重新詮釋了計算的意義,而「電腦」也就呈現了計算的不同面貌。

TO TO

國立中央大學 通識核心課程一文化脈絡中的數學

久遠的加速現象

3000年:文字之初→對位記數與原始工具

1000年:籌→ 算盤之類的進步工具

600年: 算盤 → Pascal 加法器

200年:自動計算機械 → Babbage 分析機

100年:可變程式機械 → 可儲存程式電子

30年: ENIAC → 個人電腦、網際網路

國立中共學 通識核心課程一文化脈絡中的數學



