

論數學在經濟學發展上扮演的重要角色

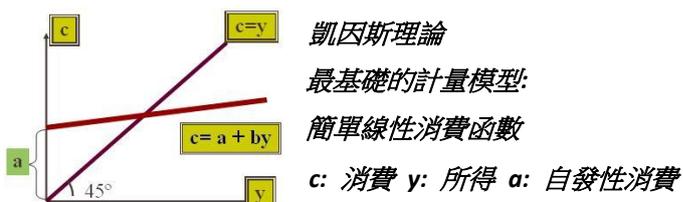
有鑒於單教授分享的數學議題，大多是純數學或是其作為一種溝通的語言，在哲學或藝術上的代表等議題，帶領聽者跳脫了以往對於數學生硬且遙遠的課本印象。我私心覺得這堂課給我更多的是哲學啟發，而不是數學發展的歷程本身。關於最後一堂課，老師提及的一個哲學提問 - 「數學究竟是發明還是發現？」，就如同老師在後來所言，數字和數學「可能」是種發明，但重要的卻是在那之後，意外發現的許多自然法則。當時老師似乎想表達數和數之間的奇妙規律作為範例，但我以自己親身經歷想到的例子，而且其應用在不同領域上都有很大的貢獻：**中央極限定理**以及**常態分佈**。由法國數學家**隸美弗**「發現」，並大量使用在擲硬幣的正面次數的分布研究上；後來由**拉普拉斯**發表的 *<Théorie Analytique des Probabilité>* 發揚而光大，從此奠定了日後數據科學研究方法的基石，特別是在社會科學中，對於大樣本理論的應用尤其重要。

何謂中央極限定理？簡言之，最 Naïve 的定義為，在相互獨立的實驗中做隨機抽樣，當樣本數足夠大的情況下，其樣本平均或樣本和（一種函數型式）會近似於常態分佈。這個是發現是何其偉大呀！尤其當你

看到常態分佈的機率函數 $f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x \in \Theta$ ，跟老師前幾堂的平面數有強烈的連結，透過極座標轉換（變數代換 + 亞可比法）後可得： $\iint f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$ ，就發現了有趣的事實，極座標轉換後的上下界都是可代入的常數，直觀意義是，以無窮大的圓形底面積去近似無窮大的矩形底面積（舉例），計算出之同高立體範圍體積在無窮大會相等。從幾何的角度去想像，原本難以理解的符號一切都合理了，原來數學的意義，不是把難以解釋的自然法則，用更難以理解的符號表達出來，而是類比到我們人類最直觀的直覺上，以這樣的角度去看待數學式子，那麼我相信數學確實是一種藝術、哲學的表達方式，甚或為一種啟示。

回到經濟學上的發展，從**亞當斯密**發表 *<國富論>* 後，開啟了人類社會對於政治經濟的研究與辯論。嚴格來說以前的經濟學，都是個體經濟學（所以到現在任何經濟理論都有古典學派的影子），那時的經濟理論，都是簡單的單位轉換概念，大多都是當時的社會菁英為了要推翻過去皇權遺留下來的中央政府文化脈絡，看不見的手為的是解釋政府無需干預市場，價格機能會自動使得供需達成均衡，進而產生了自由市場的概念等等。然而當時經濟學先祖們的理論在數學上，完全沒有任何**個體基礎 (Microfoundations)**，以後見之明來回顧過去經濟理論的發展，個人認為跟神學沒有甚麼兩樣，因為理論大多都是當時的社會菁英為了政治需求而定義的，考慮到當時的利益結構關係，我不認為那時候的經濟學是科學，反而代表著社會仕紳的信仰和為了推動改革而發表的出師表；如同**馬克思**的 *<資本論>* 一樣，考慮理論生成的政治利益背景下，討論其在科學檢驗上正不正確，似乎沒有任何意義。

人類社會就在這樣「信仰選擇」下度過了一百五十年，直到二次世界大戰前的大蕭條 (**Great Depression**)，被古典學派視為金律的**賽伊法則**，供給創造需求等經濟聖旨已經不再能解釋當前經濟的大崩潰，總體經濟學在這樣的時空背景下誕生了，**凱因斯** 1936 年發表 *<就業、利息與貨幣的一般理論>*，此書也沒有任何個體基礎，全部都是心理法則，尤其是在解釋人類在面對投資抉擇時的野獸本能，但乘著世界大戰特快車，人類在科學、應用數學上加速發展。在這樣歷史脈絡下，數學應用的分工化發展使得計量經濟方法論如春筍般冒出，此時的經濟學，正式分道揚鑣。雖然個體經濟學仍然是古典學派的聖經（例如：高中公民課 - 供需理論），然而面對當前世界的制度崩壞，舊的理論（古典學派）似乎不再反應真實世界的樣貌，面臨前所未有的挑戰。人們在**政府決策**上產生了分歧，凱因斯學派如當紅炸子雞般，襲捲了 1930 年代的工業強權，不同於古典學派自由市場、反對政府干預的政策，凱因斯極力推崇利用財政政策，以政府的力量干預不足的有效需求，在 1930 年全球大蕭條確實地刺激了經濟體的復甦，然而卻為 1970 年代的停滯性通貨膨脹埋下了伏筆。



如同上述所提及，凱因斯學派吃香喝辣風光了 30 年，終究碰到了瓶頸，過度依賴計量資料的傳統凱因斯信徒，無法解釋 1970 年代發生的「高失業率、高物價膨脹率」現象，此現象稱為「**停滯性通膨**」Stagflation

缺乏個體基礎的傳統凱因斯理論解釋不了為什麼會同時出現這兩種狀況，因為在計量模型中**失業率**和**物價率**具有抵換關係（也就是傳統凱因斯學派的尚方寶劍 – **Philips Curve 菲利浦曲線**）。自此之後，傳統凱因斯學派被市場完全遺棄，僅存幾位「信徒」之外，也鮮少有人在將其視為一門有「根據」的科學理論，更多的僅是給予人類社會對於經濟上市場、政府派的傾向選擇。

由於停滯性通貨膨脹等問題，又到了經濟學家沒飯吃的時代，當所有學者都在從舊有的計量方程式中，加減限制式試圖挽救這個沒有基礎的理論時，有部份學者決定全部丟棄傳統，回到古典學派**個體基礎**的思考模式，加入了時間這個變數，均衡不再是靜態均衡，而是動態的觀念，從**謬思**提出的**適應性預期**（對於當期需求皆是以上一期的決策乘上一個權重作為預測，存在系統性誤差），雖然還是個充滿瑕疵的理論，但是作為第一個將數學證明和總體經濟理論做完美結合的拓荒者來說，已經突破了以往缺乏個體基礎的短版，日後也啟發了**淡水湖派**學者們（主要代表：芝加哥大學 **Robert Lucas 1995 諾貝爾經濟學獎**）發表了**20 世紀最偉大的經濟理論之一：理性預期 (Rational Expectations)**；簡言之，**理性預期的結論完全符合人類最直覺的反應**：在為**理性人的前提**下以及**市場機制充分發揮**下，人們將會充分利用所有可得或已得之資訊，對未來作出最合理的預測，此時預測結果將**不存在系統性誤差**，也就是說，**平均而言**，人們的預測是正確的。**盧卡斯**把人性、自利的機制以及**時間動態**的觀念融入經濟理論中，同時用數學證明理性預期所言不假，自此之後，古典學派搶回了經濟領域話語權，但不同於以往靜態的分析，而是冠上了「**新興**」一詞作為理性預期架構下的除舊佈新。不同學派都不得不屈服的重量級理論（於是許多傳統凱因斯教徒們「背叛」了傳統，紛紛投向理性預期和古典基礎的門下，成為了「**新興凱因斯**」的學者 直到今天），然而同為理性預期接受者，為何還有分古典和凱因斯呢？因為後者仍然無法認同古典學派對於**市場不存在市場失靈的天真假設**，以及政府的干預仍然存在正當和必要性等等論點，不過那又是另一個龐大又爭議的話題了。

理性預期的簡單數學證明:(運用: 條件變異數分解定理)

假設在時間點 t ，基於**信息集** Ω_t 對下一期隨機變量 x_{t+1} 進行預期。最優性採用最小化 Ω_t 的條件平均最小平方誤差為基準。形式上，如果 x^* 是最優的理性預期的話，必然地已最小化下面的**損失函數**

$$\begin{aligned} & E[(x_{t+1} - x^*)^2 | \Omega_t] \\ &= E[(x_{t+1} - \bar{x}_{t+1} + \bar{x}_{t+1} - x^*)^2 | \Omega_t] \\ &= E[(x_{t+1} - \bar{x}_{t+1})^2 | \Omega_t] + 2(\bar{x}_{t+1} - x^*)E[(x_{t+1} - \bar{x}_{t+1}) | \Omega_t] + E[(\bar{x}_{t+1} - x^*)^2 | \Omega_t] \\ &= E[(x_{t+1} - \bar{x}_{t+1})^2 | \Omega_t] + (\bar{x}_{t+1} - x^*)^2 \end{aligned}$$

該式子的左邊被 x^* 最小化，等號右邊也必然被其最小化。

由於第一項與預期 x^* 無關，因此，第二項被最小化的充分必要條件是等於零，這意味著

$$\bar{x}_{t+1} = x^*$$

由此，所謂理性預期，即給定模型的變量等於其條件期待。

這裡假設了僅對下一期 $t+1$ 的預期，事實上，這對 $t+j \forall j \in \mathbb{N}$ 都成立。

一個直觀且偉大的經濟理論，短短幾行數學式子已不言而喻

資料參考：[凱因斯 簡單消費模型](#)、自己的腦子、些許專有名詞取自維基百科