

103 學年度

第二學期

國立中央大學通識教育中心  
優異通識課程學生學習檔案

課程名稱：文化脈絡中的數學

授課教師：單維彰

教學助理：許哲毓、劉柏伸

姓名：于莉平

學號：103503501

系級：通訊工程 學系 一年級

電子信箱：clare3121185@yahoo.com.tw



## 目錄

壹、本學期課程大綱.....	3
貳、我的學習反思日誌（每週上課紀錄）.....	4
參、學期回顧自我評量.....	14
肆、其他（授課教師指定作業或報告）.....	17

# 壹、本學期課程大綱

## 一、教學目標

協助學生從文化、歷史、意義等方面認識數學，並在社會與文明的脈絡中評鑑其價值。所有的內容都放在高中畢業生該有的數學基礎上。期望學生在離開了考試與社會壓力的自在環境中，發現數學原本的內涵，認識數學與我們今天所見的文化與文明之間的關聯，並增進其運用數學知識和思考方法的潛能。這門課以高中數學的內容為基礎，發展足以讓一般人終身受用的「軟數學」能力。

## 二、課程內容

1. 02/24 導入、課程簡介、授課計畫
2. 03/03 第一講：數學是一種語言
3. 03/10 第二講：數學觸發的視覺藝術
4. 03/17 第三講：M. C. Escher 和他的創作
5. 03/24 第四講：Lewis Carroll 和他的創作
6. 03/31 (Spring Break)
7. 04/07 學生報告與分享
8. 04/14 第五講：建築—凝固的數學
9. 04/21 第六講：投票—民主的意義與技術
10. 04/28 第七講：PISA 與西方的數學觀
11. 05/05 第八講：徐光啟與數學最初的教材
12. 05/12 學生報告與分享
13. 05/19 第九講：從複數開始的科技文明
14. 05/26 第十講：數·計算與文明
15. 06/02 第十一講：微積分的意義與價值
16. 06/09 第十二講：一部小說《博士熱愛的算式》
17. 06/16 學生報告與分享
18. 06/23 (期末考週)

## 貳、我的學習反思日誌

### 數學觸發的視覺藝術 3/10 兩天

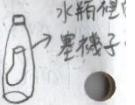
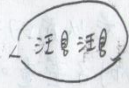
若要轉跑道，就要把大學四年所學的知识帶到藝術中。



- Draw 和 Paint 是以前的畫法，Draw 是拿硬的筆畫線條，Paint 是用刷子畫畫。
- 朗靜山集錦攝影是用古老的照相機照的，大部分都是在打戰時拍的。
- 把很多影像湊成一張圖並不是在電腦發明後才出現的。
- 朗靜山的“寒江獨釣”背景的山是大陸的黃山，而蘆葦是在台灣碧潭的蘆葦。
- Plot 是在坐標平面上作畫，且需根據所儲的資料來作畫，Plot 不是隨心所欲的創作，是數學的創作。
- 3D 變換要在四度空間作畫，可是四度空間看不到，但若能令  $u$  為 0，就會退化成三度空間的一個封閉曲面，看見的四度空間，就會變成一瞬間。
- 空間中任何一個實體物質，都是封閉曲面。
- 數學家認為任何一個東西不管拉多長，只要沒有斷掉，就都是同一種東西。且不可能把其他東西黏在上面，也不可以鑿洞。

- 數學家分辨空間的方法，是看一個物體它有沒有洞。
- 數學家在不撕裂且不黏上其它東西的前提下，已經證明了要如何判斷一個物體屬於哪一個空間，就是看那一個物體有沒有洞。

• 旋轉正方形的包圍曲線：你看的到，但是實際上不存在的線。也是用直線來創造出曲線的感覺。



- 真正結晶的雪花很對稱，在台灣的高山上看不到，只能看到類似鹽的冰晶，但是到日本或韓國就可以看到像狗毛的雪花。
- 如果把肺的肺薄膜撕開，然後鋪開，有一個足球場那麼大。
- 定量描述：說一個多邊形的面積是多少。
- 某一個東西做出來的結果，發現沒有任何一個東西小於它，是無界的，代表此東西是無窮大的，但是無窮大是不存在的。
- 亂數是一串沒有規則的數列。ex: 正弦隨筆
- 物理學家認為沒有一種東西是隨機的。
- 碎形是用複數 ( $i^2 = -1$ ) 畫出來的。
- 定性分析：面積是有限的。

## 艾雪 (M.C. Escher) 和他的創作

3/1 晴天

以版畫為主，生涯代表作：Waterfall (1961)

3大類作品：1. Image impossible 2. 特殊的變形或週期性；尺度的相似性 3. 漸變 (Morphing)

艾雪在58歲才開始走上他的路途。引發 Penrose 創造 Penrose 三角形的是 - 一幅艾雪的畫，畫中的人有3個不同方向的地心引力，其中中間的樓梯形成的三角形，使 Penrose 想到是否有一個圖形在平面上可以畫的出來，但是在空間上不存在的。



艾雪利用“錯覺”來創造出一堆不可思議、日常生活中不會發生的事，而他也影響了 Penrose 父子，也因此出現了 Penrose 三角形和 Penrose 階梯。而我因為特別喜欢看電影，所以啊~對平面啟動裡面那一直無限循環的樓梯印象超深刻，也對這種東西感到好奇，雖然在空間中可能不存在，但是現在科技如此發達，用相機從不同角度拍攝，就能拍出來。可以拍出 Penrose 三角形、階梯。

一個顏色到另一個顏色的慢慢變化，不過呢~艾雪的畫我想也可以被稱為漸層吧~雖然艾雪大部分都是一個東西或物品或風景慢慢變成另外一個別的物件，但是要從一個東西變成別的東西，顏色也一定會漸層，所以艾雪的“漸變”也可以算是“漸層”。

艾雪常幫船公司免費做廣告，而換取船票。

母老師在給我們看艾雪第2大類的作品時，本來剛開始覺得沒有什麼，可是一看到動畫之後，就頓時了解每幅畫中的秘密，每一次窺探，每一次就發現同一幅畫一直在重複，雖然剛開始看到很驚奇，但是看久了，頭还是很暈，哈哈~



漸變：從一個形慢慢變成另一個形。

而 Day and night 是艾雪有生之年賣的最好的一幅畫，且因為供不應求，又在重新印~。

這幅 Day and night 是所謂的“奇對稱”，右邊背景黑鳥是白；左邊背景白，鳥是黑。上下、左右、內外、前後背景。艾雪晚年還曾說過一句話：“想要顛覆左右對稱”。

天鵝之歌是艾雪的最後一幅，也是用漸變為主題。

艾雪的畫常出現“菱形”。

母漸變和一種畫法“漸層”很類似，只不過漸層是

## (1832~1894) 卡洛及他的創作

3/4 陰

• 校學 5 重要常數 = 1, 0,  $\pi$ ,  $i$ , e。

• 世界上的重要河流，出海口的流域和長度比值大約是  $\pi$ 。

• 卡洛寫過一本童話：愛麗絲夢遊仙境，和發明很多校學遊戲，還是第一代攝影師。

母以前就有呼說英國有一條大街是充滿了一堆愛麗絲夢遊仙境裡的人物，感覺應該就會有很多兔子跟香菇，上次去很可惜沒有排到那裡的景美，但是我卻去了我最崇拜的偶像福爾摩斯的故居（貝克街 221 號 B）還有杜莎夫人蠟像館。



- 摩比屋世代是在一个平面上，筆不離開，然後紙一直轉，就会形成一个曲面 Mobius strip
- Klein Bottle 是在空間中的，但是沒有裡面 - 沒有外面的瓶子，是做 2 次摩比屋世代。
- 用 2 張方手帕縫成一個沒有裡面也沒有外面的口袋，這樣可以說裡面就是外面，而外面就包圍整個宇宙，所以說 ● 是手帕中的宇宙。

✧ 我覺得藏頭詩是一種很特別的藝術，如果藏的好，不但發現的人有種恍然大悟的感覺，連作者也可以藉由一篇文章，偷偷抒發他的不滿或是真性情，而且藏字詩，不只是有藏頭而已，還可以自己創造順序，像是老師今天給我們看「大回天電門事件」的一份文稿，他藏字的順序就是從下面科考讀到上面，而藏字詩我印象最深刻的就是周星馳演的「唐伯虎點秋香」最後面，他解出了他的賣身契藏了「我為秋香」的秘密，這一切可以算是我最早接觸到的藏頭詩。☺

9527

### 學生報告與分享

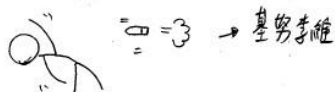
9/ (注)

· 科技拜科學所賜 → 科學拜技術所賜

其實在分享的同学提出一個很重要的問題：為什麼中國會被稱為「東亞病夫」呢？而我也深深思考了一會兒，我想歐洲會漸漸富強，不外乎，最大的功勞就是「啟蒙運動」跟「工業革命」，因為此兩者，以前人認為的「魔法」而慢慢可以被人類所解釋，甚至應用，進而發明出有利於國家利益 - 戰爭的東西。然而此時的中國不但面臨內憂外患，而且还故步自封、堅持自我的信仰，不願接受改變，另外也因為爭權奪利，而將「進步」的機會排擠在外，因此其他國家在進步，中國還停留在原地，如此便只能被他國欺辱，也造成了中國被其他國家嘲笑成「東亞病夫」。

· 「經典」都是後世之明。

· 駭客任務：I hope you don't suppose those are the real tears?

 → 基努李維

· It takes all the running you can do, to keep in the same place.

● ⇒ 「你必須跑得越快，才會停在原地。」

### 音樂與數字

我其實對音樂不太懂，甚至連五線譜都看不太懂，因此當分享的同学說畢達哥拉斯只是踏過一家店覺得裡面的人演奏的音樂十分美妙，就發現了琴弦律 (①音高取決於弦長 ②當弦長為簡單整數比 → 合諧)

● 我感到十分不可思議，因為如果是我，叫音樂應該就覺得很好听而已，不會去多想什麼，所以我想可能數學家的思維都不太一樣，或是对任何事物的敏感度都很高，其實不只是數學家，其他職業的人都有可能把生活中的藝術、語言、音樂，滲入他們的職業想法中。☺

### 欺騙眼睛的藝術

以前就看過很多類似視覺藝術的畫作，所以也知道這些都是大腦還沒反應過來或是眼睛的影像還停留在某一瞬間，也因此對這些畫作不太陌生。

## 看郵票說文字的大歷史

新蘇美

蘇美·巴比倫(美索不達米亞): 用泥板、蘆筆桿寫出可能  
是最早的文字, 加上氣候乾燥, 所以較容易保存。

考古學家大部分都相信最早的文字幾乎是用來“記帳”和  
“占卜”, 而記帳需要用到數字, 因此“文字”和“數字”是同時發明的 ⇒ 最早的書寫就是會計師。

蘇美的泥板是由南非境內的 Venda 發行。

古埃及的萊因紙草卷上寫著畢氏三數 ( $a^2+b^2=c^2$ ), 可能是訓練書記官算帳的教材。(德意志民主共和國)

古埃及計算書記有現在計概編輯的痕跡。  
(大阿拉伯聯合公國)

中國可能因為比較重視倫理道德、和文字的奧妙、以及政治的干攬, 因此漸漸將中國累積幾千年的文化集結成“經史子集”, 然而西方其他古文明都是將其日常生活累積的文化集結成了“數學”因此西方文化, 幾乎都和“數學”、“記帳”脫不了關係

### 中國第一次接觸

利瑪竇 } ⇒ 幾何原本  
徐光啟

西方真正的崛起: 牛頓, 才開始超越希臘。

### 希臘:

在歷史中真正有證據證明存在的是歐幾里德, 然而畢達哥拉斯卻不一定是存在的。

孫中山: “沒有天賦人權這回事, 人權是爭來的。”

然而擁有永遠不會有感覺失去了才會珍惜是有道理的。

● 擁有權利去濫用權利、有水資源便不會珍惜, 可能水會開到最大, 總是一直讓它流著, 也不會有什麼感覺, 但是到缺水的國家, 一滴水都要非常珍貴, 甚至像以色列想出許多充分利用每一滴水的方式。

### 阿拉伯崛起:

突厥人分布從俄羅斯東方到現在的土耳其。

歐洲的甦醒是從十字軍東征開始, 見識到東方文明的先進, 因此在教皇 Sylvester 二世的推廣下,

● 歐洲人開始閱讀阿拉伯文的書籍, 阿拉伯數字也取代了羅馬數字。

### 投票: 民主的意義與技術

· 民主只是一套程序:

1. 非原生的觀念

● 中國在 17-18 世紀一直被外國侵擾, 但是鴉片戰爭、英法戰爭、甚至八國聯軍, 中國人都沒在怕的, 然而最令中國人覺得羞辱的莫過於甲午戰爭, 因為以前被中國瞧不起的日本, 居然打贏了中國, 就只是日本比中國早學習西方三十年。

· 因為人會喜歡辯論, 但是有些辯論必須提出證據, 而提出的證據越多, 就需要用科學、數學的方式整理, 慢慢就衍生出了投票的形式。

· 選舉程序的理論:

● 只要  $k > 2$ , 可以設計  $k$  種不同程序, 針對同一組選民, 可以有  $k$  次選舉方式, 使得每一  $k$  都可以獲勝一次。

Condorcet: 被稱為法國最後一位啟蒙哲學家, 他在法國大革命扮演的角色跟傑弗遜在美國獨立的角色是一樣的, 都是一位十分關心平民的貴族, 但是卻被通緝, 最後死在獄中。

Borda = 他一生的貢獻在數學和幾何是最大的, 不在 20 歲時提出了幾何學的論文, 在 22 歲時還獲得了數學家職位, 他最重要的貢獻就是定義了「公尺」和地球赤道的長度。

Arrow = 1971 得諾貝爾經濟學獎

1. 每位選民的影響力都一樣, 無獨裁者。
2. 除了不能不理性的外, 對選民的排序沒有任何限制。
3. 如果所有選民認為  $A > B$ , 則選舉結果也要  $A > B$ 。
4. 選舉結果關於  $A$  和  $B$  排序, 應該只由卷內  $A$  和  $B$  的相對順序決定, 和任何第三者無關。
5. 如果所有選民是理性、誠實投票, 則選舉結果也要顯示理性的排序。

#### PISA 與西方的教學觀

- PISA 是經濟合作與發展組織, 是從 1997 年開始執行的國際學生評量計畫, 近幾年考數學和科學, 而且重視思考方面, 比如說給一篇木蘭詩, 會問為什麼作者要寫這篇文章, 作者有什麼涵意, 作者有沒有在影射什麼, 但是卻不會問這首詩是什麼年代, 作者是誰, 或是要默寫出整首詩。
- 另外 PISA 因為是要給世界各地的 15 歲學生考的題目, 所以會在好幾年前就先將題目出好, 等到某些國家來報名, 再把題目從原文翻譯成那些國家的母語, 因此題目都會是白話文。
- PISA 測驗的目的並不是在於某些學生考的特別好、特別高, 而是重視整體受測驗的對象他們的「整體表現」, 這樣才能看出這了國家的教育政策是否對於教育年輕人是有用的、是適用的。

20 世紀三大「不」定理:

1. Arrow 不可能定理
2. 海森堡測不準原理
3. 不一定定理

• 民主:

- ① 尊重每個人的意見
- ② 接受投票的結果

PISA 和台灣大型考試特別不同的就是, PISA 可以帶「計算機」, 但是老師在給我們看的 PISA 例題, 都不是計算機可以算出來的, 或是不用計算機就可以算出的題目, 那為什麼 PISA 又說可以帶計算機呢? 原因可能是: 世界上其他國家在 15 歲時, 受的數學教育程度跟台灣相比, 有一些小落差, 因此為了達到這了測驗的公平性, PISA 就規定「應該」帶計算機。

在 2006 年台灣超越了芬蘭, 數學部分的「平均」成績是世界最高, 然而標準差卻遠遠超越芬蘭, 這說明了台灣的学生數學好的非常好, 數學差的, 卻也不太好, 數學的教育成了兩極化 (以字型), 造成此結果的原因有很多, 但我認為, 跟一个人的學習環境有很大的關係, 地區偏遠、資源不足、受教育的可能, 當然也就比較低, 而資源充足、師



資良好的地區, 相對的, 受教育的机会就更大, 努力不懈的加強不學地方, 教學成績就會上升。

徐光啟與數學最初的教材

5/6 兩天

· 歐幾里德: 希臘托勒密一世時代 (B.C. 323~285)

{ 辭源: 孔子, 稱了大部數學者入門書: 《Element》  
歐幾里德: 孟子

· 《Element》: <1-6> 平面幾何, \* 命題: proposition.

母卷1: (命題32) 平面三角形之內角和等於平角

母卷1: (命題47) 畢氏定理; (命題48) 逆命題

● 母卷2: (命題4) 平方公式  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

母卷3: 圓與弦

<7-9> 正整數與(初論)與方程式

母卷7: (命題2) 辗转相除法, 西方稱之「歐幾里德演算法」

<10> 平方根

<11> 空間中的直線與平面

<12> 面積與體積

<13> 五種正多邊形

· 高斯(1777年出生), 在17歲時, 用沒有刻度的直尺和圓規畫了

● 一個正17邊形, 解開了1700年都沒有能解開的問題。

· 阿基米德發現了球體體積的算法, 並且請別人刻在他的墓碑上。

· 畢達哥拉斯認為所有的數都是有理數, 所以當有人提出 $\sqrt{2}$ 是無理數時, 他就被暗殺了。

· 利馬竇:

· 西元1552年出生於義大利境內天主教皇直轄的一小城邦。

· 19歲加入耶穌會 { 因亞馬丁路德宗教改革之聲而成立的天主教修會  
特別重視科學教育  
遠赴世界各地傳教, 設有湯若望、南懷仁、  
龐參寧。

· 30歲到中國(明萬曆11年), 一生於此, 58歲逝於北京, 北京還找到他的墓。

· 徐光啟(1562-1633):

· 比利馬竇小10歲

· 上海故居地, 現在稱之徐家匯

· 41歲受洗成為天主教徒, 改名保羅, 次年考上進士, 任職翰林院, 出版《毛詩》講義4卷。

· 從《幾何原本》開始, 終身著述譯介西方數學和工程技術, 含測量、水利、農耕、天文、曆法、火器與兵學, 共16部書。

● 我以前常常去上海, 也曾在那邊住過2個月, 沒事就搭著地鐵到處跑, 上海地鐵的徐家匯站就像台北捷運的台北車站是一個轉車的大站, 徐家匯站附近還有一個百貨公司, 非常繁華, 但是很難想像3、40年前, 徐光啟竟是在此翻譯《幾何原本》。



中國五行的相生相剋和西方的正多邊形一樣有相生、剋的關係。

· 利馬竇與徐光啟

● 相會於北京, 時年54歲、44歲

· 利馬竇來華20年, 學得中國文人的書畫, 華語歷已流利, 徐光啟因天主教知道一些拉丁文和西方文明

· 利馬竇講解拉丁文版《Element》由其師克拉維增補校訂 → 其修訂「陽曆」, 制訂閏年規則, 沿用至今。

· 徐光啟學生推薦此書:

1. 「幾何原本者, 度數之宗, 所以窮方圓平直之情, 畫規矩準繩之用也。」 → 理論和實用

● 2. 「學理者, 祛其浮氣, 鍊其精心, 學事者, 資其定法, 發其巧思, 故舉世無一人不嘗學, 能精此書者, 無一學不可精。知學此書者, 無一書不可學。」 → 數學的基礎教育原理

3. 「人具上質而志理疏莽, 即上質無用, 人具中材而心思頓鈍, 即中材有用, 能通幾何之學, 則頓思甚矣, 故平天下之人而歸於實用者, 是或其所由之道也。」 → 提升國民競爭力

4. 當年「習者蓋寡」, 寄望「竊意百年之後, 必人人習之。」 → 350年之後

法蘭契斯卡 - 文藝復興時期

- ⇒ 寫實、人文主義
- ⇒ 影響拉斐爾、達文西
- ⇒ 被人們遺忘了 400 年
- ⇒ 文藝復興的先驅
- ⇒ 瓦薩里：「法蘭契斯卡關於幾何學和透視法的論述使他足以和其當代的大學家相提並論。」
- ⇒ 畫中呈現數學般完整的型式和空間感，不受時空限制的獨立畫風
- ⇒ 畫中安排是照著《幾何原本》
- ⇒ 法蘭契斯卡對《布羅拉祭壇圖》分析，是元量 -  $\sqrt{2}$  ...

從複數開始的科技文明 5/9

實數是直線上的數，而複數是平面上的數，因此在 19 世紀的前葉，許多人開始思考是否有數可以表示「空間中」的數，其中數學界中的王子：高斯，也同樣在思考這了問題，然而他卻失敗了，其實後人發現在高斯的筆記本中，都有許多令人出乎意料的發現，只是高斯的標準太高，認為自己失敗，而不敢公諸於世，所以當時的人只看到高斯完美的成功，不過雖然高斯失敗了，但卻有一個人成功了——就是漢彌爾頓，他發現原本高斯所提的  $a + bi + ck$  是有缺陷的，所以他改良為  $u + ai + bj + ck$ ，加了一個數量，創造了「四元數」。而複數裡也包含了內積和外積，也因此可以做出投影公式與面積公式。

黃金比例 - 阿爾布雷希特·丟勒

橡膠藝術 - 魯本·繁複

黃金比例：畢達哥拉斯研究過正五邊形和正十邊形 (1.0618)

⇒ 金字塔已經有應用到，米諾的維納斯·海神雕像。

大衛雕像

⇒ 帕德嫩神廟是黃金比例最著名的建築應用

幾何畫家 - 蒙德里安：

⇒ 荷蘭畫家，和艾雪一樣，共同處都是用數學元素作畫

⇒ 只用直線，不用曲線，受畢卡索影響向大

⇒ 父親、叔叔都是畫家

⇒ 對建築、工業設計影響大

⇒ 李特維德《紅藍椅》

⇒ 只用 13 條木棒，構成 A 的立方版。

四元數 (Quaternion)  $\Rightarrow u + ai + bj + ck$

① 兩數相等：對應項相等

② 向下相容： $\begin{cases} \text{若 } a \cdot b \cdot c \text{ 是 } 0, \text{ 則降為實數} \\ \text{若 } b \cdot c \text{ 是 } 0, \text{ 則降為複數} \end{cases}$

③ 加減： $p \pm q = (a \pm u) + (a \pm x)i + (b \pm y)j + (c \pm z)k$

四元數相乘：生成元素規則

$\Rightarrow i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$

四元數相除：(乘以倒數)

① 共軛四元數： $p' = a - ai - bj - ck$

② 四元數的絕對值  $\Rightarrow pp' = a^2 + a^2 + b^2 + c^2 = |p|^2$

③ 四元數的倒數： $\frac{1}{p} = \frac{p'}{|p|^2}$

馬克士威 (Maxwell)：

1861~1862 年發表了「電和磁交互關係」，他用了 16 條數學公式，可是有數學家發現如果用漢彌爾頓的「四元數」去解電磁感應的問題，或

許能夠簡化那16條數學公式，而且搞不好還可以去推廣更多有關於電磁方面的知識與應用。

• 吉布斯(美國人)

①發明了一部連續型的類比計算機，他丟在一張方格紙上畫一條曲線，然後他會用類比計算機去計算曲線的值。

②他在耶魯大學教授電磁學時，就自己將漢彌爾頓的「四元數」簡化，認為把四元數用在電磁學上是殺雞用牛刀，他把向量和純量的部分分開，只用向量的部分( $ai + bj + ck$ )來解決有關電磁感应的問題，而他的學生Wilson覺得這是一個廣世解法，便幫吉布斯特其筆記整理出來出書。

④不美總比不好好：

- ① 不相等於「實數」
- ② 不成代數體系 (內積非向量)
- ③ 不滿足結合律
- ④ 沒有消去律 (外積不保持非零)

⑤ 向量形式的Maxwell方程組：

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{dB}{dt}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

### 數 · 計算與文明

(圓天) 5/6

• 第一代計算工具：文字

⇒ 創造文字的動機：為了記帳古代文件幾乎全是占、象文和帳本。

• 第一代計算方法：對位記帳

⇒ 自然數現象是無限的，落實到語言裡須要無窮多組符號。

• 十進制：滿十進位的記帳法

⇒ 須要十個獨立符號，分別代表零和少於十的正整數。

• 唇齒相依 · 一體兩面

⇒ 紙、鉛筆、橡皮擦：直式算法

• 第一代的成就：以圓周率為例：圓管相似 · 周

長對直徑的比值為定數：π

阿基米德： $\frac{22}{7}$

劉徽： $\frac{22}{7}$

祖沖之： $\frac{355}{113}$

• 計算方法的躍進：Calculus

⇒ 發現了「無窮」的秘密，發現了依循簡單規則而無窮重複即可無限精準的計算公式，ex：

$$\pi = 4 \times \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

• 程式設計的核心技術在「重複」

⇒ 自動計算機的真正重要之處，在於它可以重複執行一套給定的程序，其重複次數可以在計算前確定，也可以依計算結果而臨時決定。

• 織布機：

We may say most aptly that the Analytical Engine weaves algebraic patterns just as the Jacquard

loom weaves flowers and leaves.

• von Neumann的3項生圖：

1. 採用二進制數字
2. 指令和資料都儲存在機器內
3. 序列式執行，每單位時間執行一個動作

## 變遷的加速現象

- 3000年: 文字之初  $\Rightarrow$  對位記號和原始工具
- 1000年: 算  $\Rightarrow$  算盤
- 600年: 算盤  $\Rightarrow$  Pascal 加法器
- 200年: 自動計算機械  $\Rightarrow$  Babbage 分析機
- 100年: 可程式化機械  $\Rightarrow$  可儲存程式電子
- 30年: ENIAC  $\Rightarrow$  個人電腦. 國際網路

## 母微分: 從特例發現通則

- ① 令  $f(x)$  是各項式函數, 餘式定理  
 $\Rightarrow f(x) = g(x)(x-a) + f(a)$
  - ② 所以  $f(x) - f(a)$  必被  $(x-a)$  整除, 真商為  $g(x)$
  - ③  $a \leq x \leq b$  的平均速度是從  $a$  到  $b$  的割線斜率  
 $\Rightarrow g(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
  - ④ 在這「一瞬」的速度定義為  $g(a) = f'(a)$
  - ⑤ 其他函數也都用這辨法:  
 先定義  $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$   
 再「設法」計算  $f'(a) = g(a)$
- 科學一旦產生出令「了」比他更有價值的科學, ex: 物理. 統計. 計數, 都會跟他切斷關係, 再把所有財產都贈科學們。

## 微積分的意義與價值

※

- 一哲學 (自然哲學)
  - ① 一量不但可以加另一量成正比 (等速運動的位移和時間關係)
  - ② 一量可以跟它自己的變化率成正比 (高溫物体的降溫速率正比於它和環境的溫差)
  - ③  $\Rightarrow$  牛頓冷卻定律  $\Rightarrow T = \ominus k(T - T_0)$   
 降溫
  - 第二哲學:
  - ① 力的作用現象, 是速度的改變
  - ② 力正比於速度的變化率, or 位移的二次變化率  
 $\Rightarrow F = ma = m(\ddot{x})$
  - ③ 重振虎克定律 (彈簧的恢復力正比於變形的長度)  $\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$
  - 第三哲學
  - ① 兩物不必相觸也可以有「力」的作用
  - ② 萬有引力  $\Rightarrow \ddot{r} = -GM \frac{1}{r^2} \hat{r} \rightarrow$  向量
  - ③ 自由落體  $\Rightarrow \ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g$
- 母積分: 一合理的假設
- ① 令  $x = x(t)$  是在  $a \leq t \leq b$  的位置, 如果速度是  $c$  (等速運動), 則總位移是「曲線下面積」 $\Rightarrow c(b-a)$
  - ② 如果在每個「一滴滴」時間此內以等速度  $x$  運動, 則一小段位移是:  $x \Delta t$
  - ③ 對每一個從  $a$  到  $b$  的  $t$ , 把全部的  $x \Delta t$  加起來,  $\Rightarrow \int_a^b x \Delta t \Rightarrow$  也是曲線下的面積。
- 母微積分基本定理:
- ① 位移  $\Rightarrow$  「結束時的位置」和「開始時的位置」之差  
 $\Rightarrow \int_a^b x \Delta t = x(b) - x(a)$
  - ② 若將  $(0,0)$  設為開始的位置,  $\therefore$  每個結束時的位置就是  $x$  在那個時間的位置  $\Rightarrow \int_0^t x \Delta t = x(t)$
  - ③ 因此積分可以用來求「和自己的變化率成正比的等式 (微分方程)  
 $\Rightarrow T = -k(T - T_0) \Rightarrow$  成比例下降的指數函數  
 $\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow$  簡諧運動的三角函數

⇒  $\ddot{x}=0, \ddot{y}=-g$  ⇒ 自由落体和自由抛射体的所有问题

⇒  $\ddot{r} = -GM \frac{1}{r^2}$  ⇒ 算出地球绕日的椭圆轨。

※ 「天体的运行, 星星的陨落, 乃至海水的涨落;

皆因其近乎神圣的心灵而首次展现。」

※ 平面的秘密

⇒ 平面, 点 P, 直角坐标  $P(x, y)$ , 复数平面  $x+yi = re^{i\theta}$

平面向量  $\vec{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

· 令  $e^{i\alpha} = a+bi$  和  $e^{i\beta} = c+di$  为单位圆上的复数

则  $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = e^{i(\alpha-\beta)}$

$= \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$

⇒ 揭開向量的原型, 坐標不再只是被动地記錄其的位置, 釋放了坐標本身的威力, 就像物理學家解開了原子的秘密一樣, 威力巨大而影響深遠。

※ 友誼數: Amicable Numbers

① 真因數之和等於對方的 2 个数

② 三位數只有一对友誼數: 220 和 284

③ 四位數只有四对; 友誼很難得

④ 「自我友誼」的數稱為完美數: 6, 28, 496, 8128

※  $e^{i\pi} + 1 = 0$  為什麼最美

① 簡潔

② 基本

③ 深刻

④ 幽默

記憶著愛情的數學等式

※ %

《博士熱愛的算式》

※ 可能是生涯登峰之作

① 書籍暢銷: 日本讀賣文學獎、日本書本大賞

② 改編電影

③ 代言數學教育

● 數學中最美的等式  $\Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

· 美的跟直線一樣, 無法用更基本的觀念定義

α: ① 2007 香港小姐

② 最美的偶函數

③ 「不美總比不妙好」

※ 開場白:

· 博士叫我兒子「根號」。

● 莫伯的數學梗

① 女管字電話號碼: 576-1455

② 一億以下, 共有 5761455 个質數

③ 不到一億的最大質數是 100000000-11。

④ 超過一億的最小質數是 100000000+7。

## 參、期末回顧自我評量

自我評量者：于莉平	填寫日期：2015/6/18
目前為止課堂上發生了哪些讓我印象深刻的事情？（至少列舉五項）	
<ol style="list-style-type: none"><li>1. 老師在上「數學觸發的視覺藝術」時，曾經說過他到中原大學演講，就看過他們的學生用鋼絲、熱熔膠、和釣魚線，做出包覆曲線的立體版。</li><li>2. 老師給我們看艾雪動畫版的「畫廊」，很驚奇地發現畫中的畫一直無限的循環。</li><li>3. 當老師在講解有關於 PISA 的考試，我很驚訝地看到，PISA 是可以帶計算機進去考場計算的。</li><li>4. 現在在打程式時，常說要 debug，而這個「bug」的來源讓我覺得非常有趣，原來真的是因為當初有一隻 bug，害電腦當機，才會沿用至今。</li><li>5. 老師曾經說過，數學家要分辨一個東西是屬於哪一空間的，就是看它有幾個洞，這是我聽過還蠻新奇的說法。</li></ol>	

目前為止哪些討論的問題讓我最印象深刻：（至少列舉五項）

在這課堂中，我印象最深刻的是卡洛的「字梯遊戲」和「藏頭詩」，尤其是字梯的部份，因為老師在功課中也出了一題字梯的題目，而我也花了很多時間，去不停地查詢，很多英文單字、甚至是組織的縮寫，才成功完成作業；以及艾雪的「Day and Night」這幅作品；和旋轉正方形的立體「包覆曲線」；還有老師「看郵票說數學的大歷史」的這個主題，因為我也有集郵的嗜好。

我在本門課中目前為止有哪些優異的表現？原因為何？

我想我在這門課中的優異表現，除了每次上課都有認真抄寫筆記、和作業都有用心查詢資料再寫外，還有準備投影片向大家分享，我自己對數學有興趣的小主題。

我在本門課中學到了哪些東西？

一開始認為這門課應該都是說與數學有關的事物，但是卻也有跟藝術、文字、電影相關的題材，因此我學到了更多數學延伸出來的東西，像是艾雪的創作、和一些小國家數學郵票的歷史、以及卡洛的英文字梯遊戲，雖然這些看起來跟數學並沒有關聯，但是卻和數學有密不可分的關係。

到目前為止我為這門課付出了哪些努力？

每次老師交代的回家作業，都有認真去查詢上課文本或簡報、以及網路上的資料，並且在抒發自己心得時，將自己的想法寫出。此外，也製作了簡報，向同學介紹，自己對數學和藝術有興趣的部分。

對此課程我還有哪些需要努力的地方？為什麼？

我認為我還需要往對上課的心得感想方面努力，因為在抄寫上課筆記時，我大部分都是將老師的投影片或是老師說的話記錄下來而已，並不時常寫下自己的心得，因此我覺得我需要往可以抒發自己上課時，對當下的感想這個方面加強。

我對此門課的期初目標是什麼？目前為止達成了哪些部分？

我一開始對這門課的目標只是想單純上課認真抄筆記、作業好好寫、絕不早退外，還從未想過會上台報告。雖然我是老師點到要上台報告的，但是我也想給自己一個機會，在超過 100 個人的台上，練習自己的口條、與表達方式，因此便毫不猶豫地接受這項工作。

而我目前為止對自己一開始的目標都有達成，還另外得到了可以上台報告的機會。



## 肆、其他（授課教師指定作業或報告）

# 幾何畫家-蒙德里安

通訊一 103503501 于莉平



## 主題

- 艾雪的創作
- 日常生活中的艾雪
- 艾雪和蒙德里安的關係
- 蒙德里安的創作
- 蒙德里安的影響

## 艾雪的創作



### 畫廊 (1956)

→看畫的人一直週而復始的循環

## 日常生活中的艾雪



女四舍四樓廁所  
→鏡子裡一直有  
鏡子

## 漸變↔規律



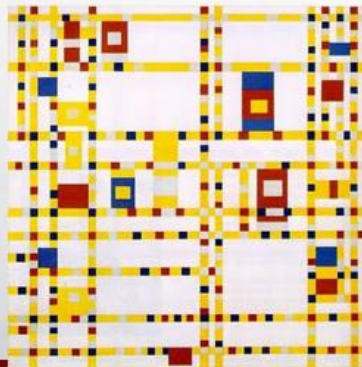
**Day And Night**

艾雪其中一類作品-漸變

- 1.對稱
- 2.規律

規律???

## 規律→蒙德里安



百老匯街的爵士樂 (1943)

- 蒙德里安生平最後的畫作
  - 靈感來自 **1.紐約曼哈頓城市規劃整齊的方格** 和 **2.節奏輕快的爵士樂**
- 感受:歡樂中帶一點憂傷

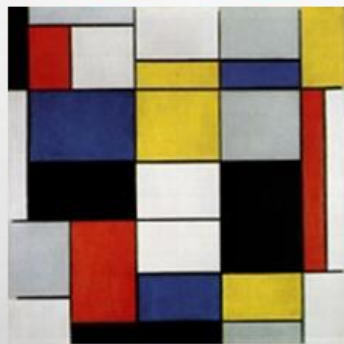
## 艾雪和蒙德里安的關係

- 共同：
  - 荷蘭人
  - 幾何元素
- 不同：
  - 曲線↔直線
  - 歐洲↔美洲

## 蒙德里安

- 比特·科內利斯·蒙德里安（**PIET CORNELIUS MONDRIAN**，**1872年—1944年**）
- 荷蘭畫家
- 新造型主義，又稱幾何形體派
- 作品大多用垂直和平行線構成，反對用曲線
- 對建築、工業設計影響大

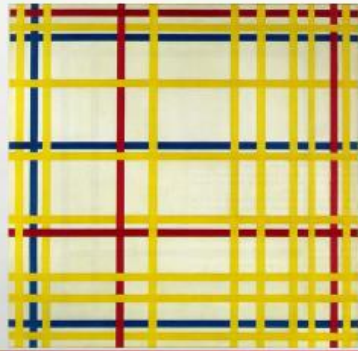
## 蒙德里安的創作



### 構成A (1920)

- 只用垂直線和水平線
- 只用色彩三原色與黑白
- 影響著名建築設計師——李特維德

## 蒙德里安的創作



### 紐約市 (1941~1942)

- 沒有戰爭紛擾，所以色彩更為明亮
- 線條構成的畫面具有音樂性

## 蒙德里安的影響



建築



鞋子



時裝

## 蒙德里安的影響



### 紅藍椅 (1917) --- 李特維德

- 由**13**條木棒相互垂直而構成
- 用螺絲固定，以防結構損壞
- 蒙德里安畫作的立體版
- 影響後來對工業美學的詮釋 和家具設計的多元性