

1.  $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ ，所有正因數包含：1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220，  
除自己外其他因數總和為 284。(在這裡暫時記為  $220 \rightarrow 284$ ，表示 220 的“下一項”為 284)  
 $284 = 2^2 \times 71$ ，所有正因數包含：1, 2, 4, 71, 142, 284，  
除自己外其他因數總和為 220。(在這裡暫時記為  $284 \rightarrow 220$ )

經由計算符合「友誼數」(Amicable numbers)的定義：依上述記法，也可以記為  $220 \leftrightarrow 284$ ，就是彼此經由計算出來的結果，都等於對方。

2. 「完全數」(Perfect numbers)就是依照上題計算方式求出的結果，會等於自己本身。  
在  $10^8$  以下的正整數中，只存在前 5 個完全數：6, 28, 496, 8128, 33550336。  
而第 10 個完全數的位數便已高達 55 位，可見此類數字是非常罕見的。

根據《中文維基百科》「完全數」一條目，「完全數」還有以下性質：(僅列出部分內容)

(1) 所有正因數的倒數和，對於完全數而言都會是 2。

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{31} + \frac{1}{62} + \frac{1}{124} + \frac{1}{248} + \frac{1}{496} = 2$$

(2)  $6 = 1+2+3$  ;  $28 = 1+2+3+4+5+6+7$  ;  $496 = 1+2+3+\dots+30+31$  (都可以寫成  $1+2+\dots+n$  的連續整數和)

(3)  $(6)_{10} = (110)_2$  ;  $(28)_{10} = (11100)_2$  ;  $(496)_{10} = (111110000)_2$

(寫成二進位時，1 都在前面，0 都在後面，而且 1 的個數都恰好比 0 多一個)

**關於第 1, 2 題的延伸發現，列於第 3 頁。**

3. 以下數學等式即是數學界公認「最美的等式」：

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

根據文本，這一個數學式因為符合以下數點，因此使得大多數學家對於這條式子印象深刻：

(1) 將 5 個數學的基本要素全部列出：

- \* 1 是自然數最基本的單位，在任何有數字的文明中，1 就是最先接觸的。
- \* 0 代表「無」，自從阿拉伯將印度的 0 傳至西方之後，造成人類文明史的重大突破，而間接造成數百年後的現代化。
- \*  $\pi$  是圓周率的單位，歷史上人們不斷求得更加精確的估計值，也終於產生了微積分，因此人們的科技開始突飛猛進。
- \*  $i$  是虛數的單位  $\sqrt{-1}$ ， $e$  是自然對數的底數(約 2.71828)，在微積分學中都扮演重要的角色。

[接下一頁...]

- (2) 同時使用數學中的 3 個最基本的運算：相加、相乘、次方。
- (3) 擁有等式中的「等號」，是數學中最根本的核心觀念。

4. 由於《維基百科》「小川洋子」的相關條目，中文版本仍未存在(或許已被刪除)，而英文版本似乎也未提及該作家對於「數學教育」的看法，至於其他語言的機器式翻譯可能導致語意不通或錯誤理解，也沒有參考價值；又礙於其他各類網頁搜尋上的困難度、來源可信度與課業時間考量等種種因素，因此實際情況目前不得而知，而以下將是我個人對於文本摘要中的理解，純屬個人想法。

從文本對於《博士熱愛的算式》的摘要中，透露出「真正的」數學，不一定需要真正的數學知識才能欣賞。對於本題關於「數學教育」而言，我認為「**數學**」的領域範圍非常廣，絕對不僅限於理工上嚴謹的專業知識，而是泛指從生活中一切需要以智慧解決的繁雜問題，演變而成的一門學問。

其實，無論是就整個人文歷史脈絡(ex: 本課程「文化脈絡中的數學」)而言，或者現今各種應用如文學(ex: 《博士熱愛的算式》)、藝術(ex: 視覺藝術的顏料調色、透視、大小、近十幾年來出現的 Plot 藝術；還有音樂的平均律、樂器調音、五線譜...等)、設計(ex: 公共景觀、室內設計等相關行業)、經濟(ex: 各種理財的學問)、遊戲(ex: 桌遊、電玩等計算輸贏的規則、機率...)、法律(ex: 民主上的投票) ..... 等無法列盡的項目，全部也都與「數學」息息相關。

既然所謂「數學」範圍如此廣大，我個人認為在「數學教育」上，首要應該培養的目標，便是「**解決問題的能力**」，但絕不能淪為「只吃“公式”的機器」，而是應該要**落實在生活上**！

5. 我認為「美」應該有一種定義：

如果一個事物**目前或曾經**能夠使一個人欣賞、享受、從中獲得深刻的體悟，**對那個人而言**，這就是一種「美」。

這個「美」雖然隨著不同的人、不同時間點而有不同的喜好與感受，但是有一個共通點：「美」至少從某一方面而言，是一種印象，具有一定的意義；倘若某人自認為是「沒有意義」的事物，「同一時間」他也不會覺得是「美」。

因此，我認為「美」存在片面的客觀定義，即是目前或曾經對於某人而言，具有一定意義的事物。然而，這樣的定義與一般的理論定義不同的是，「美」的感受是**相對於自己的**，而且每個人的感覺都是獨特的，即使同一個人，想法隨著時間的變化也是無法預知的，因此「美」**無法客觀地相互比較、分析**；而文本中提及「最美的公式」，乃至公認「世界七大奇景」的評定，也都是「僅供參考」用的。

[補充：關於第 1.2.題的額外延伸]

前面第 1 題中，我設立一個“ $a \rightarrow b$ ”的表示方法，用以表示  $a$  除自己外的其他因數總和為  $b$ 。

「完全數」符合  $a \rightarrow a$  (自己本身，亦即“1 個數的循環”)，

「友誼數」則是  $a \rightarrow b \rightarrow a$  (自己本身，亦即“2 個數的循環”)。

我非常好奇，是否也存在如  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$  (3 個數的循環)，或者  $n$  個數的循環。

因此我最近寫了一個 Java 程式，從 1 跑到 1,000,000 (因篇幅與時間有限，原始碼在此省略)，除了得到 4 個「完全數」以及多對「友誼數」(由於「友誼數」不是我想知道的重點，因此不列出其數量) 之外，還得到了兩個驚人的結果：(但是事後才發現《中文維基百科》已將完全雷同的定義列於「相親數列」中)

(1) 12496  $\rightarrow$  14288  $\rightarrow$  15472  $\rightarrow$  14536  $\rightarrow$  14264  $\rightarrow$  12496 (5 個數的循環)

(2) 28 個數的循環如下：

366556  $\rightarrow$  274924  $\rightarrow$  275444  $\rightarrow$  243760  $\rightarrow$  376736  $\rightarrow$  381028  $\rightarrow$  285778  $\rightarrow$   
 152990  $\rightarrow$  122410  $\rightarrow$  97946  $\rightarrow$  48976  $\rightarrow$  45946  $\rightarrow$  22976  $\rightarrow$  22744  $\rightarrow$   
 19916  $\rightarrow$  17716  $\rightarrow$  14316  $\rightarrow$  19116  $\rightarrow$  31704  $\rightarrow$  47616  $\rightarrow$  83328  $\rightarrow$   
 177792  $\rightarrow$  295488  $\rightarrow$  629072  $\rightarrow$  589786  $\rightarrow$  294896  $\rightarrow$  358336  $\rightarrow$  418904  $\rightarrow$   
 366556

[NOTE: 我認為(2)是前所未有神奇的巧合，主要有以下兩點原因：]

A. 就目前所發現，除 28 本身外，沒有其他任何正整數，會依上述的方式而得到 28。

B. 就目前所發現，「28 個數的循環」就只有這 1 組，而且是所有「循環」中最多數字的。

以上兩點，首先是我在程式執行到  $10^6$  的結果中符合，而後來查閱《維基百科》亦是如此。

然而，人們始終都還未發現「3 個數的循環」。

## 作業十一

991003509 法文二陳昱彤

1.請依定義，做計算確認 220 和 284 是一對友誼數。

220 的真因數有: 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110→相加總和為 284

284 的真因數有: 1,2,4,71,142→相加總和為 220

真因數之和等於對方，即為友誼數。

2.什麼是「完全數」或「完美數」的定義？請舉一個例子。

如果有一數  $k$ ，其真因數的總和恰好也為  $k$ ，數學上稱之為完美數，亦稱完全數。

例如:28 的真因數有 1,2,4,7,14，加總後恰好為 28

3.請寫下「數學中最美的等式」，並根據文本或簡報，說明它為什麼被認為是數學中最美的等式？

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

這個算式裡包含了「數學中最重要的五個常數」： $1, 0, \pi, i, e$ ，「最基本的三個計算」：加法、乘法和次方，「最核心的一個觀念」：等於，通過近代數學中最基礎最深刻的概念：微積分，用再簡單不過的方式寫在一起。比它簡單的沒它深刻，比它深刻的沒它簡單，所以它最美。

4.請上網查「小川洋子」關於「數學教育」有何言論或看法？

本身為文壇作家的小川洋子，就像我們大部分的人一樣，習得的是最基本的數學。她將數論方面的數學知識巧妙地融入故事情節中，數學不再繁複難解，也不那麼令人卻步了。使我們(尤其是不擅長數學的人)輕輕鬆鬆得進入數學的世界。作者藉小說展現了數學的美及數學價值與意義。

(小川洋子曾與數學家藤原正彥就曾對談數學美如何欣賞，合著一本《舉世最美的數學》，但沒有查到詳細內文。)

5.文本認為「美」並沒有客觀的定義。請闡述你附和或不苟同的看法。



一次大戰間，西方藝術出現了一個重要流派「達達主義」，最令人印象深刻的作品之一就是杜象的「噴泉」(如左圖)。世界大戰的慘烈，使許多藝術家開始質疑藝術本身的意義，所謂的噴泉，其實是杜象買了個小便桶，將它反轉 90 度並簽上「R. Mutt 1917」(R.馬特，1917 年作)。他把作品提交給藝術協會

準備參展，然而這項備受爭議的作品最後並沒有展出。達達藝術嘗試顛覆人們對於藝術的意義，也間接引發人們去思考什麼是藝術，所謂的美醜又要如何去評論...。我認為「美」是很主觀的，每個人的想法不一樣，看事情以及內心的感受也大不相同，美是出於內心的感受，通常那些能讓我們感到愉快的事物，都是「美」的一部分吧。