黎曼假設

單維彰

這是黎曼 (Riemann) 在 1859 年發表的一個問題。這個問題本來是起源自數論中質數分佈的研究，後來發現與許許多多的數學問題等價。這些故事都超出了我們的能力範圍，所以在此略過。讀者如果有意在這方面尋求更多的知識，我只能建議您閱讀其他的網頁：Caldwell 的質數專頁 (`www.utm.edu/research/primes`) 中有一段講黎曼假設和質數分佈的文章; Eric 的數學寶櫃中也有一段黎曼假設的說明; 在 1995 年的四月一日 Ekhad 發表了一個「證明」。或者，您應該到數學系選修整數論方面的課程。總之，黎曼假設是目前 (1997) 在數學界最著名的一個尚未證明 (亦無反例) 的問題。底下，我們在微積分的學生所應理解的範圍內，談談有關黎曼假設的話題。

首先，您必須知道什麼叫做無窮級數。然後我們就可以定義所謂的歐拉 zeta 函數:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

其中 n 是大於 1 的正整數。歐拉 (Euler) 早在 1730 年代就研究了這種無窮級數。學過微積分的學生都至少知道，當 $n = 1$ 的時候，此級數發散。也就是 $\zeta(1) = \infty$。也應該知道，當 $n > 1$ 的時候，此無窮級數是收斂的。某些人可能還知道

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

這個等式有很多種不同的證明。其實，歐拉求得了 $n = 2, 4, 6, \cdots, 26$ 的 zeta 函數值。其中

$$\zeta(3) = 1.202056\cdots$$

而

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

1978 年的時候，有人證明了 $\zeta(3)$ 是個無理數。

學過微積分之後，我們應該可以輕易地看出來，前述的歐拉 zeta 函數可以推廣其定義域到 $s > 1$ 的實數:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad s > 1$$

黎曼所談的 zeta 函數，現在稱做「黎曼 zeta 函數」是把其定義域擴展到更大的複數平面。擴展後的 $\zeta(s)$ 對所有的複數 s 都有定義 (除了在 $s = 1$ 的地方有個奇異點之外)。當 s 的實數部分 > 1 的時候，新的 $\zeta(s)$ 的值和舊的歐拉 zeta 函數的值一致 (這就是所謂擴展的意思)。但是當 s 的實數部分 < 1 的時候，新的 $\zeta(s)$ 需要別的定義方式。在這種新的定義之下，有某些 s 使得 $\zeta(s) = 0$。比如說 $\zeta(-2) = 0$。我們稱這些 s 是黎曼 zeta 函數的根。黎曼假設就是說

> 如果 s 的實數部分介於 0 和 1 之間且 s 是黎曼 zeta 函數的根，則 s 的實數部分就是 $\frac{1}{2}$。