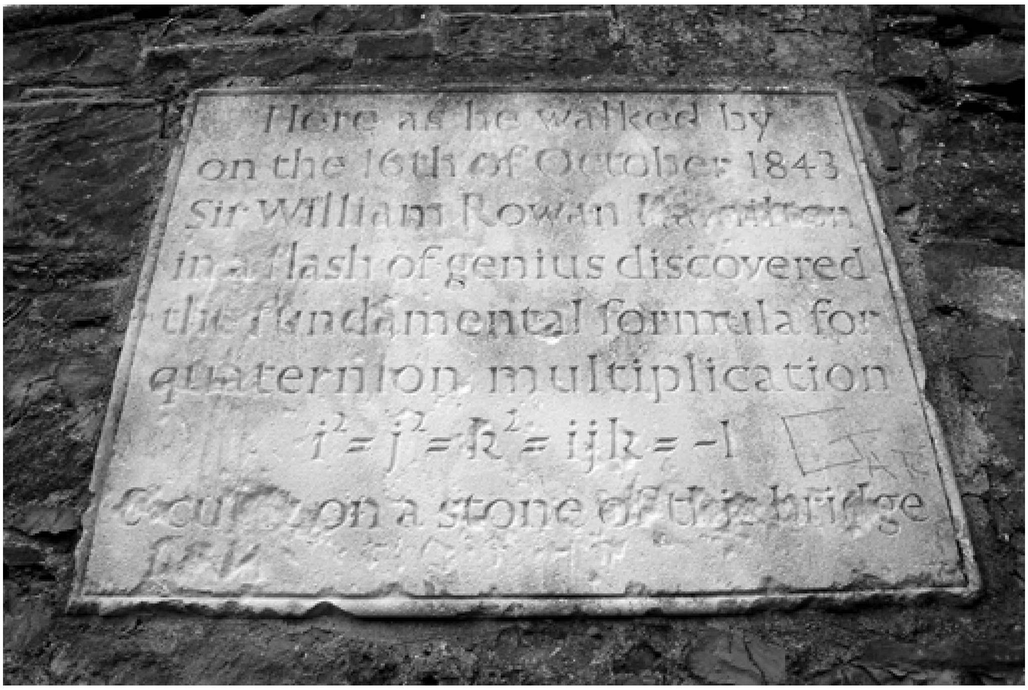
科學月刊【數·生活與學習】專欄 9908

從四元數到空間向量（上）

單維彰·99 年 7 月 19 日

在 1830 年之前，西歐的數學圈已經普遍知道平面上的點坐標 (a,b) 轉化成複數 $a+bi$ 的觀念，複數被認知爲「平面數」，而實數就相對地成爲「直線數」；複數和實數具備同樣運算性質的加減乘除。讀者不難想像，那個時代的數學家不可避免地想要創造「空間數」：將空間中的點坐標 (a,b,c) 轉化成一個可以像實數和複數一樣做加減乘除計算的數。

後人在高斯遺留的手稿中發現他在 1819 年嘗試過 $a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}$ 形式的「空間數」，其中的 $a+b\mathbf{i}$ 就是複數。但是並不成功也就沒有發表。據漢彌爾頓 (William Hamilton, 1805—65) 的自述，這個問題大約從 1828 年起成爲他「智識上的渴望」(an intellectual want)，直到十五年後的 1843 年 10 月 16 日，在一次「觸電似」的神奇經驗中頓悟了三項不夠而需要四項的「空間數」：$u+a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$，稱爲**四元數** (quaternion)，其中 u 稱爲純量部分，$a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ 稱爲向量部分；$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 扮演像複數中的虛數單位 i 那樣的角色，稱爲生成元素，而 u、a、b、c 都是實數。順便一提，1843 年是中英〈南京條約〉生效的第一年，英國佔領香港。



[科學月刊爲此照片添文字解說。這是紀念漢彌爾頓在都柏林附近的 Brougham 橋（現稱 Broom Bridge）上獲得四元數之靈感的碑牌。]

就像複數一樣，兩個四元數 $p=u+a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ 和 $q=v+x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 相等的意義是 $u=v$、$a=x$、$b=y$、$c=z$。四元數的加或減就是對應係數的加或減，也就是 $p\pm q=(u\pm v)+(a\pm x)\,\mathbf{i}+(b\pm y)\,\mathbf{j}+(c\pm z)\,\mathbf{k}$，可見四元數的加法具備實數或複數加法的性

質：結合律與交換律。

至於乘法，漢彌爾頓直接規定四元數的乘法對加法滿足分配律，所以只要規定生成元素之間的乘法規則，就能做四元數的乘法。這些規則是：$\mathbf{i}^2$=-1、$\mathbf{j}^2$=-1、$\mathbf{k}^2$=-1、**ij**=**k**、**jk**=**i**、**ki**=**j**、**ji**=-**k**、**kj**=-**i**、**ik**=-**j**。根據以上遊戲規則，讀者不妨嘗試一個簡單的例子：

$$(3+2\mathbf{i})(7\mathbf{i}-5\mathbf{k})=3(7\mathbf{i}-5\mathbf{k})+2\mathbf{i}(7\mathbf{i}-5\mathbf{k})=21\mathbf{i}-15\mathbf{k}+14\mathbf{i}^2-10\mathbf{ik}=-14+21\mathbf{i}+10\mathbf{j}-15\mathbf{k}$$

一般而言，四元數 p 和 q 相乘的結果如下：

$$\text{pq}=(uv-ax-by-cz)+(ux+va+bz-cy)\,\mathbf{i}+(uy+vb+cx-az)\,\mathbf{j}+(uz+vc+ay-bx)\,\mathbf{k}$$

漢彌爾頓也定義像共軛複數一樣的「共軛」四元數：$\overline{p}=u-a\mathbf{i}-b\mathbf{j}-c\mathbf{k}$，則 $p\overline{p}=u^2+a^2+b^2+c^2=|\text{p}|^2$，因為 $p\overline{p}/(u^2+a^2+b^2+c^2)=1$，於是產生p的倒數 $\frac{1}{p}=\frac{\overline{p}}{|p|^2}$ ，再規定 $q\div p=q(\frac{1}{p})$ 就得到了四元數的除法；當然，除數還是不得為 0，而這樣定義的除法自然滿足乘除互逆的性質。

四元數與實數和複數都「相容」。當 $a=b=c=0$，也就是向量部分為零，則 p 就是實數。當 $b=c=0$，則 p 就是複數。而且，當四元數「退化」成實數或複數的時候，它們的加減乘除計算就像實數或複數一樣。唯一「遺憾」的是：四元數的乘法不具有交換律。這可以從生成元素的乘法規則看出來，例如 **ij**=**k** 但是 **ji**=-**k**。當 $u=v=0$，也就是 p 和 q 都只有向量部分，則

$$\text{pq}=-(ax+by+cz)+(bz-cy)\,\mathbf{i}+(cx-az)\,\mathbf{j}+(ay-bx)\,\mathbf{k}$$

可見 pq 的純量部分是兩向量之內積的相反數，而 pq 的向量部分是兩向量的外積。而外積是不可交換的，它具有「逆交換性」：$\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$。所以，當 p 和 q 都只有向量部分，則 pq 和 qp 互為共軛四元數，通常並不相等；至於 p 和 q 都是一般四元數的時候，pq 和 qp 就只知道純量部分相等了。

如果把向量認知為「有方向的長度量」，則向量相乘就該是「有方向的面積量」。如此看來，四元數的乘法在向量部分等同於外積，就似乎有其不可避免的內在需要。至於放棄了乘法交換律，也似乎是一種非如此不可的「棄保效應」：棄交換律而保住更基礎的結合律(associative law)：若p、q、r是四元數，則(pq)r=p(qr)。如果結合律不成立，就不能有「連乘」計算，因為(pq)r和p(qr)未必相等，所以pqr沒有確切的意義。刻在金雀花橋紀念碑上的一條等式**ijk**=-1 就表現了結合律。因為**ijk**等於(**ij**)**k**，也等於**i**(**jk**)，而前者是$\mathbf{k}^2$=-1，後者是$\mathbf{i}^2$=-1，兩者相等，所以可以簡記為連乘符號**ijk**=-1。

事實上，「結合律」這個名詞就是在漢彌爾頓討論四元數的時候首度出現。在四元數之前，數學家並沒有討論過不滿足結合律或交換律的運算；也就是從四元數開始，數學的「代數」支系有了全新的視野：人們可以在一個全然人造的符號系統中定義加減乘除，並討論其運算性質。

現在，我們應該可以不過份失真地詮釋漢彌爾頓發展四元數的心理狀態：他要找到一種和直線數（實數）與平面數（複數）都相容的空間數。後人評判漢彌

爾頓是英國僅次於牛頓的偉大數學家；而且，也像牛頓一樣，他的物理學家身份可能更勝於數學家。但是，在四元數上，漢彌爾頓是一位道道地地的純數學家：他最關心的是數學內部的一致性，或者說是數學的「美」。

漢彌爾頓雖然也全面地在物理上示範四元數的應用，範圍包括當時所知的流體力學、熱力學和光學（他在這些物理課題上已經聲名卓著），但是這些示範並沒有產生新的物理知識，也沒有簡化原來的理論和計算，事實上可能還爲了一致性的美而付出更高的計算代價。真正可以仰仗四元數而發展的物理觀念，在漢彌爾頓身故 (1865) 之後才發生，那就是麥斯威爾 (James Maxwell, 1831—79) 的電磁理論。