

美國的高中數學核心課程

單維彰·102 年 10 月 10 日

兩個月前，本欄介紹了美國 K-12 國民教育的《各州共同核心標準》(CCSS: Common Core States Standards)，其中「核心」是指兩大類的核心課程，其中一類就是我們的「數學領域」。我在前一篇闡述了個人對於這份數學課程標準的理解，但僅涵蓋小學一年級至初中 (secondary school) 畢業 (八年級) 的內容，現在接著談高中部分 (九至十二年級)。

因為 K-12 是「國民基本教育」，其數學課程要照顧全體國民的共同需求，所以原則上不能深入特殊專業性的課題。為了讓部分的學生有所選擇，美國以 AP 課程 (大學預修課程) 彌補或銜接國民基本教育課程 (見本欄 97 年 12 月)。在大約 40 門 AP 課程中，選修人數最多的數學領域課程是〈微積分 AB〉；每屆大約有一成的高中生選修。因此，在以下探討 CCSS 的高中數學核心課程時，不可忽略美國的教育現場，還有 AP 課程的選項。

關於〈微積分 AB〉的較詳細介紹，可參閱本欄在 98 年 1 月的報導。而一部 1988 年出品的 (老) 電影，或許更親切地展現了〈微積分 AB〉的教學現場：《為人師表》(Stand and Deliver)。這是一部根據 1982 年發生在洛杉磯落後區的真實故事改編的電影，片中的數學教師在 2010 年過世了。

不像 1-8 年級的數學課程標準是分年描述的，高中階段的標準改以內容分類，以六項範疇描繪高中數學的學習目標。這六項範疇的其中五項是我們熟悉的名詞：數與量、代數、函數、幾何、統計與機率 (注意「統計」寫在前面)，但第六項較為特殊：數學建模 (Modeling)。大家都知道數學建模不是數學的內容而是實踐 (practice)，是一種使用數學的方法，甚至是一種認識數學的看法。所以，它是一項特殊的範疇，用來聯繫其他五項內容的橫向範疇。

CCSS 的數學文件以上述六項範疇為標題，分別描述學習的目標。在高中階段，這些內容並沒有限定前後的順序，也沒有指定教學的年級 (另外提供了兩種課程安排的範例)，但是指定了「必備」和「選修」。列在文件裡的一般條目都是「全體學生為大學與職涯做好準備」的必備課程，標注 (+) 號的條目是選修。但是教師仍然可以將部分選修條目納入共同必修課程。選修條目的設計，是為了進一步銜接微積分、高等統計、和離散數學 (包括線性代數)。

在五項內容範疇的條目之後，如果打了一個星號，例如在「代數」範疇裡的「建立描述數量關係的等式*」，就表示它同時也是「數學建模」的條目。

在「數與量」範疇，「數」就是先引進有理數的指數，然後發展複數、向量、和矩陣等更高維度的類似數的物件，而「量」則從基本單位 (例如公尺、平方公尺、公斤、秒) 發展到衍生單位 (例如加速度、人口密度、人均收入)，這一部份都同時屬於「數學建模」範疇。數列與級數並未出現在條目裡。

在複數方面，從「共軛複數」起的所有課題，包括複數的絕對值、複數平面、極式、和代數基本定理，都列為選修。所有向量與矩陣方面的課題，全部列為選修。向量被用來處理速度之類的真實問題之後，立刻就以「單行矩陣」的角色和方陣一起發展了（平面上的）線性映射。我要特別指出的是，向量並不用來處理幾何問題。

在「代數」範疇，從「元」與「式」出發，學習多項式與有理式。這些式將用來形成方程式、不等式和函數。線性規劃出現在代數與數學建模的共同範疇裡。聯立方程組則以二變數為主，到了三個變數，就要改以（選修）矩陣形式表達，並允許使用計算機。特別要指出的是，求解二元二次與一次的聯立方程式（例如圓與直線關係），屬於必備課程。

限於銳角的 \sin 、 \cos 、 \tan 三角比，放在「幾何」範疇，餘角關係和平方關係是必備的，但是正弦定律與餘弦定律都是選修。美國的幾何課程比較「晚熟」，包括全等、相似、作圖、推理等平面幾何課題，都列於高中。但是坐標幾何也在高中，例如二次曲線：圓與切線、拋物線是必備的，但過圓外一點做切線，以及橢圓和雙曲線是選修。值得注意的是，CCSS 文件指明要用透明片或電腦軟體，讓學生操作平面圖形的旋轉、鏡射、縮放，以及識別立體物件的各種截面。

在「函數」範疇，要學生了解對應關係是函數的精神，例如玩「連連看」或「對對碰」遊戲都有函數觀念。但是，在高中階段的大部分情況下，我們僅能討論以「式」定義的函數。但即使在這樣的限制下，函數還是可以作為許多重要（真實）問題的模型。

有趣的是，CCSS 所指的函數包括離散函數，那也就是數列。而費波那契數列被作為遞迴函數的例子。遞迴函數受到一定程度的重視，因為在數學建模的範疇裡又提起它。指數函數在等比例成長和衰退的情境下導入，而對數函數僅在求解指數方程式的情境下使用，而且僅限以 2 或 10 或 e 為底的對數。為了發展必備的三個三角函數，所有學生都要學習弧度量與廣義角，認識圖形的週期性並用來當作模型。超過此範圍的三角函數都是選修。反函數是選修，包括了 \arcsin 、 \arccos 、 \arctan 以及它們的圖形。

「統計與機率」範疇包含我們常見的一維與二維數據分析，但是不只用線性迴歸作資料的最適函數，二次函數與指數函數都在必備範圍內。隨機實驗、抽樣和統計推論也都是必備的，但是沒有正式的信心水準。條件機率是必備的，但是貝氏定理及其應用是選修。排列組合是選修，而且僅在計算古典機率的脈絡中使用它。隨機變數以及分佈屬於選修，其中分佈是理論給定的或者調查構成的。

在數學建模的標題下，並沒有列學習內容的條目，而是概念性與原則性地闡述數學建模是什麼、不是什麼。文件舉出八個可以用數學模型來處理的真實問題，並以流程圖解釋以數學模型解決問題的一般性程序。

最後，我要提醒讀者，美國的高一是九年級，相當於我們的國中三年級。此外，美國某些州過去自訂的數學課程進度比較快，他們的學生以前在八年級就學到部分 CCSS 的高中內容了。現在的「共同標準」同意這些州繼續他們的傳統。

因此，當我們檢視以上高中數學內容的時候，也要了解，其實有一部份可能在我們的國中二年級就學習了。

在 CCSS 數學標準的最後一頁，有一段特別叮嚀的話：許多重要而且實用的核心內容，其實早在高中選修內容 (+) 之前，在 6-8 年級就學習了。例如比例關係是一個威力強大的數學工具，可以處理非常多真實的問題。換句話說，不要忽略簡單而基本的數學的威力。在高中畢業的總結性評量裡，不要忘了必須涵蓋 6~8 年級的數學。這一番話值得我國設計「素養」評量的師長們留意。