

國立中央大學

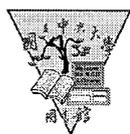
數學研究所  
碩士論文

台灣與新加坡三角函數課程之教科書比較

研究生：張琇涵

指導教授：單維彰博士

中華民國九十五年六月



# 國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(93年5月最新修正版)

本授權書所授權之論文全文電子檔，為本人於國立中央大學，撰寫之碩/博士學位論文。(以下請擇一勾選)

同意 (立即開放)

同意 (一年後開放)，原因是：\_\_\_\_\_

同意 (二年後開放)，原因是：\_\_\_\_\_

不同意，原因是：\_\_\_\_\_

以非專屬、無償授權國立中央大學圖書館與國家圖書館，基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、公開陳列、與發行，或再授權他人以各種方法重製與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名： 張琇涵

論文名稱：台灣與新加坡三角函數課程之教科書比較

指導教授姓名：單維彰

系所：數學研究所 博士 碩士班

學號：93221021

日期：民國 95 年 7 月 3 日

備註：

1. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
2. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應依著作權法相關規定辦理。

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

數學 學系/研究所 張琇涵 研究生

所提之論文

台灣與新加坡三角函數課程之教科書比較

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 單維新 (簽章)

95年6月5日

國立中央大學碩士班研究生  
論文口試委員審定書

數學 學系/研究所 張琇涵 研究生

所提之論文

台灣與新加坡三角函數課程之教科書比較

經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人  
委 員

黃 麗

袁 媛

單 維 彰

中華民國 95 年 6 月 20 日

## 論文摘要

本論文研究目的在於：針對三角函數之相關課題及先備知識，評估由國小至高中數學領域教科書的連貫性與合宜性，並與新加坡教科書作跨國比較，以作為九十八學年度高中課程綱要修訂之學理依據。

本文採用內容分析研究法與比較教育研究法，將台灣與新加坡教科書依照描述、並列與比較等階段進行探討與分析。依據兩國之數學教學目標、一到十年級的教材、佈題背景與問題情境，歸納出兩國教科書突顯的特色，並列出值得台灣參考與學習之項目。研究結果建議台灣 (1) 拉長三角函數的教學時程 (2) 改進教材的佈題背景 (3) 落實資訊與數學之結合。期盼本研究對於我國未來教科書之撰寫與數學綱要之修訂提供有益之參考。

## 關鍵字

數學領域教材比較、數學教科書、三角函數、新加坡。

## Abstract

This is a thesis which mainly focuses on: correlative topics and advance knowledge of Trigonometry, evaluating coherence and appositeness from elementary to high school in textbooks within mathematics filed. We also have compared with Singapore's textbooks in order to make the theoretical basis for modifying future mathematics textbooks of senior high school in Taiwan in 2009.

This thesis adopted both Content Analysis Method and Comparative Method by researching and analyzing with delineation, juxtaposition and comparison from Taiwan and Singapore's textbooks. In terms of the purposes of mathematics teaching, teaching materials from 1<sup>st</sup> to 10<sup>th</sup> grades, teaching background setting and the question conditions, the key features between two countries' textbooks can be generalized. We give conclusions and suggestions with references to the development of the textbooks in Taiwan. The results of the research suggest Taiwan (1) Extension on Trigonometry teaching hours; (2) Improvement in teaching material's background setting; (3) Insure the integration of information and mathematics. It is our hope that these conclusions and suggestions can make some beneficial contributions to the future mathematics textbooks of senior high school in Taiwan.

**Keywords:** comparative mathematics education, mathematics textbook, trigonometric function, Singapore.

## 致 謝

~~謝謝你們，使我的生命更加豐富精彩~~

研究所的日子，是我學會獨立的時光。首先，我要感謝我的指導教授 單維彰老師，謝謝您時時給我指導，豐富了我對學術的視野，在一路的論文進行中，常使我豁然開朗，也感謝黃霍老師和袁媛老師，細心研讀我的論文，提供寶貴的意見並給予論文肯定；同時，也要感謝于振華老師以及系上所有的老師，在研究所中給予我的教導與栽培，讓我有不斷成長與學習的動力。

再來，謝謝我的師兄，在研究所給我很大的鼓勵和支持，也謝謝一同參與討論的伙伴們，給了我很大的協助。感謝318寢貼心又瘋狂的親密室友們，妳們帶給我兩年愉快的同居生活；感謝303-1的同學們，有你們的陪伴及學習上的幫助，使我受益良多；謝謝208的學弟妹們，因為你們讓我研究所更顯得精彩；謝謝系上的學長姊，對我生活及學業上的建議與照顧，以及感謝所有在我需要時給予我幫助的人，因為有你們，我的論文才能順利完成。

最後，我要感謝最關心我的父母親，您們對我的愛，讓我有勇氣面對生命中的一切，謝謝您們從小到大一直給我勇氣與包容，我所有的成就都是因為有您們的支持，我也要謝謝我最親愛的姊姊，妳的善良教會我用快樂的心看待世界，總之，謝謝您們一直是我背後最大的支柱，在此將這份喜悅與成就與您們一同分享。

研究的路有你們的陪伴，讓我一點也不孤單，我的心中只有滿滿的感動！

張琇涵 謹誌於 中央

中華民國九十五年六月

# 目 錄

中文摘要 .....	I
英文摘要 .....	II
致謝 .....	III
目錄 .....	IV
表目 .....	VII
<b>第 1 章 緒論</b> .....	<b>1</b>
1.1 研究動機 .....	1
1.2 研究背景 .....	2
1.3 研究目的與問題 .....	3
1.4 名詞釋義 .....	4
1.5 研究限制與範圍 .....	5
<b>第 2 章 文獻探討</b> .....	<b>6</b>
2.1 數學課程設計理念與發展 .....	6
2.1.1 台灣與新加坡之數學課程綱要發展 .....	7
2.1.2 數學課程的延續與變革 .....	9
2.1.3 三角函數課程之發展 .....	10
2.1.4 對本研究的啟示 .....	12
2.2 台灣與新加坡三角函數相關課題與先備知識之教材發展 .....	12
2.2.1 台灣數學教科書發展 .....	12
2.2.2 新加坡教科書發展 .....	13
2.2.3 對本研究的啟示 .....	14
2.3 三角函數相關研究 .....	15
2.3.1 數學相關概念及運算錯誤類型研究 .....	17
2.3.2 三角函數概念及錯誤類型研究 .....	18
2.3.3 三角函數學習困難之相關原因 .....	20
2.3.4 國內外相關研究 .....	20
2.3.5 對本研究的啟示 .....	21

<b>第 3 章 研究方法與實施步驟</b> .....	<b>22</b>
3.1 研究方法.....	22
3.1.1 內容分析研究法.....	22
3.1.2 比較教育研究法.....	24
3.2 研究對象 .....	25
3.2.1 台灣南一版數學教科書.....	25
3.2.2 新加坡數學教科書.....	25
3.3 實施步驟.....	26
<b>第 4 章 台灣與新加坡數學教科書之比較與評析</b> .....	<b>27</b>
4.1 台灣與新加坡教學目標之描述與比較.....	27
4.1.1 台灣數學課程之三角函數教學目標.....	27
4.1.2 新加坡數學課程之三角函數教學目標.....	30
4.1.3 兩國三角函數教學目標之比較.....	31
4.2 台灣與新加坡數學教科書之描述與比較.....	31
4.2.1 台灣與新加坡一到三年級教材分析.....	31
4.2.2 台灣與新加坡四、五年級教材分析.....	36
4.2.3 台灣與新加坡六、七年級教材分析.....	43
4.2.4 台灣與新加坡八、九年級教材分析.....	48
4.2.5 台灣與新加坡十年級教材分析.....	57
4.3 教材鋪成及概念設計之評析.....	75
4.4 佈題背景與問題情境之評析.....	81
4.4.1 佈題背景.....	81
4.4.2 問題情境.....	82
<b>第 5 章 結論與建議</b> .....	<b>85</b>
5.1 兩國教材特色之發現.....	85
5.2 兩國教材的結論與建議.....	86
5.2.1 結論.....	86
5.2.2 建議.....	87

## 參考書目

中文部分 .....	89
英文部分 .....	91

## 附錄

附錄一 Trends in Mathematics and Science Study .....	92
附錄二 三角函數的基本概念 .....	93
附錄三 三角函數的性質與應用 .....	94

## 表 目

表 2-1 國中三角函數課題變革.....	11
表 2-3 國內三角函數相關文獻.....	15
表 3-3 研究流程.....	26
表 4-2-1 一到三年級教材內容並列表.....	33
表 4-2-2 四、五年級教材內容並列表.....	38
表 4-2-3 六、七年級教材內容並列表.....	44
表 4-2-4 八、九年級教材內容並列表.....	50
表 4-2-5 十年級教材內容並列表.....	58

# 第 1 章 緒論

本章節將對本研究之研究動機、研究背景、研究目的與問題、名詞釋義及研究範圍與限制作一通盤描述，共分為五小節，分述如下：

## 1.1 研究動機

為因應時代的演進與社會的需要，課程改革成了勢在必行的教改重點之一。觀看台灣近三十年來的課程變動，國小數學課程發展共歷經四次的修訂，分別是民國 64 年公布、67 學年度實施的國小數學課程標準，民國 82 年公布、85 學年度實施的國小數學新課程，民國 87 年公布、90 學年度實施的九年一貫數學課程暫行綱要及民國 92 年公布、94 學年度正式實施的九年一貫數學課程綱要。國中數學課程的發展也歷經民國 74 年、83 年、87 年的九年一貫數學課程暫行綱要及民國 92 年公布、94 學年度正式施行的九年一貫數學課程綱要之四次修訂。高中數學課程也歷經民國 73 年、84 年及最近一次 94 年修訂即將於 95 學年度實施的高中數學課程暫行綱要。

隨著課程的變動，我國教科書也隨之進行大幅度的修訂。以數學領域而言，民國 82 年國小與 83 年國中課程標準之修訂傾向中間偏易，民國 89 年頒布的暫行綱要與之前的綱要相比，再度朝簡易的趨勢發展，經過這兩次的修訂後，中小學數學課程產生極大變化。至於高中階段，目前是依據 85 年版本的《高中數學課程標準》，未來的 95 至 97 學年度將依據《95 學年度高中數學暫行綱要》，98 學年度將落實高中正式綱要。因此，在面臨課程不斷變動的同時，我們選定九年一貫以及高中一年級的數學教材，挑選三角函數為課題，就教材的連貫性與合宜性進行分析。

數學教科書的探討，除了綜觀我國教材之外，同時橫跨比較新加坡教科書的鋪陳。近年來，新加坡的教育成就使其在國際上的數學評量大放異彩，據 TIMSS 2003 報告顯示，新加坡小四與國二學生國際數學平均成績排名均為第一名，而我國學生成績排名均為第四名，兩者成績有顯著差異。由於新加坡國情特色與我

國有許多相似之處，也同時深受儒家文化的薰陶，因此想試著從新加坡的數學課程綱要及教科書特色，了解其教育過人之處。本研究擬以新加坡與我國為研究對象，針對兩國一到十年級三角函數相關課題與先備知識進行深入的比較與評析，期盼本文對於我國未來教科書之撰寫與數學綱要之修訂提供有益之參考。

## 1.2 研究背景

基於上述之研究動機，欲就台灣數學領域教科書進行深入的探究與分析，因此，本研究挑選「三角函數」課題進行研討，其理由如下：

### (1) 橫跨代數、幾何及函數概念之連結

民國 83 年課程綱要將「三角函數」列為國中選修教材，但由於國中學力基本測驗不將選修內容納入命題中，所以間接影響高中學習此單元的基礎。如今，九年一貫數學科正式綱要公布後，三角函數的內容已從國中教科書中刪除。教育部惟恐造成國中與高中教科書內容上的落差，在《九年一貫數學學習領域九十四學年度銜接高中課程教材》中，把「平面幾何的基本性質」與「三角函數的基本概念」列入十大銜接教材（國立中正大學，2005）。三角函數的課題涉及代數與幾何領域，並架構於函數概念之上，因此，本研究欲以此單元分析我國數學教科書編寫的連貫性。

### (2) 依據教師的教學經驗與學生的學習狀況

三角函數的單元在高中數學第二冊佔有極重的分量，以「三角函數的基本概念」與「三角函數的性質與應用」兩章介紹之。藉由高中教師的經驗分享、大學教授的訪談，以及觀察許多學生的學習成效發現，高中階段之三角函數比其他課程單元困難，且學生學習意願普遍較低，因此本研究就此現狀，以三角函數相關課題與先備知識之內容，對教科書之鋪陳進行全面性的分析。

### (3) 先備知識涵蓋十個年級的課程

小學至國中教科書中三角函數相關課題的鋪陳範圍非常廣泛，包括三角形的認識、角的定義、三角形的面積、平面坐標、圓周率、比與比值、相似三角形性質與畢氏定理，以及高一上學期介紹函數的概念。因此，本研究欲針對高中教導三角函數之所需，探討教科書先備知識的編排是否足夠，了解學生在學習三角函數之前知識建構的完整性，更進一步分析三角函數之相關課題間的銜接性與適切性。

## 1.3 研究目的與問題

本研究主要目的在於：針對三角函數之相關課題及先備知識，評估由國小至高中數學領域教科書的連貫性與合宜性，並與新加坡教科書作跨國比較，以作為九十八學年度高中課程綱要修訂之學理依據，也希望能提供未來教科書撰寫趨勢之參考。

根據研究目的，本研究中針對「三角函數」的課題，提出以下五個具體問題：

- (1) 九年一貫教科書對於三角函數先備知識的鋪陳是否完備？
- (2) 國中至高中教科書編寫，對於三角函數相關課題的銜接是否連貫？
- (3) 與新加坡十年級學生比較，我國高一學生所學的三角函數內容較深或較淺、較多或較少？
- (4) 台灣與新加坡的數學教材中，三角函數相關知識之教學切入點差異為何？
- (5) 台灣與新加坡三角函數教材中，佈題背景之呈現與問題情境之設計有何不同？

## 1.4 名詞釋義

本研究所提及的名詞如「新加坡學制」、「教學切入點」與「螺旋式課程」等，為恐有疑義，故界定如下：

### (1) 新加坡學制

新加坡學校制度承襲英國教育制度再加以改革而成，採行普通教育與職業教育的雙軌制，徹底實行菁英分流教育。新加坡於 2003 年開始執行十年義務教育，包含小學六年、中學四年。小學一至四年級稱為基礎階段 (Foundation Stage)，著重於英語、母語及數學能力的培養，且在小四結束前，學校會依據學生的學習能力，將之分成三種不同的語文分流課程：EM1、EM2 和 EM3；五、六年級稱為定向階段 (Orientation Stage)，在小六畢業前學生都需要參加小學離校考試 (Primary School Leaving Examination-PSLE)，使學生能依能力分配到合適的中學就讀。

新加坡將中學分成特別課程、快捷課程和正規課程，且正規課程又分為學術課程 (Academic Course) 與技藝課程 (Technical Course) 兩種。特別課程與快捷課程設計為四年的學校教育，而正規課程規劃為五年的學校教育。學生在修習完成中學之特別課程或快捷課程後，可參加「新加坡-劍橋普通教育」的 O 級證書會考 (GCE O Level)；參與正規課程的學生可參加「新加坡-劍橋普通教育」N 級證書會考 (GCE N Level)，通過考試後可以選擇是否繼續修讀第五年的中等課程，若完成五年正規課程即可參加 GCE O Level 之檢定。

在通過 GCE O Level 考試後，學生能依據能力和性向選擇接受後中等教育 (Post-Secondary Education)，包括二年制的初級學院 (Junior Colleges)、三年制的大學先修中心 (Centralised Institutes) 或工藝學院 (Polytechnics)。大多數準備繼續升大學的學生會選擇進入初等學院就讀，之後參加「新加坡-劍橋普通教育」A 級證書檢定 (GCE A Level)，其列出語文、數學、科學、商業與電腦、人文科學、其他與本地科目共七大科目供學生選擇，檢定結果作為進入大學就讀的依據。

## (2) 教學切入點

教學切入點是指在初始介紹數學概念時，所採用的概念建構方式與教學活動設計。以認識三角形「角」的教學為例，台灣數學角的切入點為「三角形中轉角的地方」，架構於形狀的概念之上；新加坡數學以「角是交於一點的兩條直線間的旋轉量」定義之，同時引入角的形狀與量的概念，因此最原始定義的切入點不同之下，將影響數學整體後續知識鋪陳的方式與概念設計的發展。

## (3) 螺旋式課程 (Spiral Curriculum)

螺旋式課程指根據某一學科知識結構的「概念結構」，配合學生的「認知結構」以促進學生的認知能力發展為目的的一種課程發展與設計（黃光雄、蔡清田，1999）。螺旋式課程提供具有邏輯先後順序的概念組合，讓學生在一至兩年期間，學習探究一套逐漸加深加廣的複雜概念實例，例如，台灣國小三年級教導學生認識量角器，四年級進一步教導學生使用量角器，並學會利用量角器量角度。

# 1.5 研究範圍與限制

- (1) 本研究範圍設定於「三角函數之相關課題及先備知識」，就我國一至十年級的「數學領域教科書」進行評估。
- (2) 受限於人力、物力、時間與經濟等因素，以及教科書版本與資料完整性之考量，在資料蒐集上，以我國小學至高中階段結構性完整的一套教科書為主，並以其他版本教科書作為輔助參考；新加坡則選定民間廣用版的數學教科書進行比較。由於新加坡於 2001 年實施新課程，截至目前為止，「My Pals are here! Maths」國小數學教科書發行至五年級，因此六年級採用「Primary Mathematics」之教材。研究中同時涉獵兩國相關的官方網站與民間報告書、論文與書籍等資料進行探討。

## 第 2 章 文獻探討

許多研究指出課程、教材與學生學習成效緊密關聯。我國教育趨勢強調學校得因應地區特性、學生特質與需求，選擇或自行編輯合適的教科書和教材，以及編選彈性學習時數所需的課程教材（教育部，2000）；Tomroos 更主張教材分析對於提升學生學習數學有很大的助益（引自吳麗玲，2005），由此可知，課程安排與教材設計的好壞，反應於學生學習之成效。在本章中針對相關文獻進行分析，共分為三節探討，第一節「數學課程設計理念與發展」、第二節「台灣與新加坡三角函數相關課題與先備知識之教材發展」以及第三節「三角函數相關研究」。

### 2.1 數學課程設計理念與發展

課程的含義在近年有極大的改變，課程之界說、模式、性質和結構也漸引起研究者的興趣（黃光雄，1981）。由文獻可以看出，課程的概念仍十分分歧，如艾絲納與范蘭絲所云，今日教育的問題爭議反映了關於課程形式、內容及學校教育目標之優先順序上的基本衝突，而衝突的強烈及解決的困難，是由於不能認識各種衝突的課程概念（Eisnor & Vallence, 1974）。歐用生（1998）將課程一詞界定為有計畫的學習，根據此定義，課程是指學校提供的資料，或這些學科所欲達成之讀、寫、算等知識、技能的目標，也就是具體化於課程、教學指引、教科書或學校教育目標、學校規則的內容。本研究不探討學校教育目標以及學校規則的內容等細微的變因，主要著重於教科書內容之研究，因此在進行教科書分析前，就數學教育理念與課程綱要發展、數學課程的延續與變革、三角函數課程之發展做一通盤的說明。

### 2.1.1 台灣與新加坡之數學課程綱要發展

以下分別簡介台灣與新加坡之數學教育理念與課程目標，以及兩國小學至高中課程綱要：

#### (1) 台灣九年一貫數學課程

台灣自 87 年 9 月教育部公布國民中小學九年一貫課程總體綱要，爾後，教育部又公布國民中小學九年一貫課程 (第一學習階段) 暫行綱要，繼之於 90 年 1 月公布國民中小學九年一貫課程暫行綱要。九年一貫課程總目標強調能力的開拓，為國民的終身學習奠下基礎，以因應社會的變遷，並培養分析資料、形成臆測、驗證與判斷的能力，以提升生活品質，改善生活環境，進而養成關懷環境、尊重自然的情操。數學課的精神指標指民主社會中，具備理性與溝通的素養；多元社會中，養成開放與尊重的態度，激勵多樣性的獨立思維，並尊重各種不同的合理觀點，分享各別族群的生活數學以及欣賞不同文化的數學發展 (教育部，2000)。九年一貫數學課程期望學生達成下列目標：

1. 掌握數、量、形的概念與關係。
2. 培養日常所需的數學素養。
3. 發展形成數學問題與解決數學問題的能力。
4. 發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。
5. 培養數學的批判分析能力。
6. 培養欣賞數學的能力。

為達成這些目標，數學課程的發展應以生活為中心，配合各階段學生的身心與思考型態的發展歷程，提供適合學生能力與興趣的學習方式，據以發展數學學習活動。數學學習活動應讓所有學生都能積極參與討論，激盪各種想法，激發創造力，明確表達想法，強化合理判斷的思維與理性溝通的能力，期盼在社會互動的過程中建立數學知識。

## (2) 台灣高中數學課程

高中數學教學秉承國中數學教育的基礎，進一步培養學生邏輯推理能力、運算能力和空間想像能力（教育部，1995）。我國 85 年高級中學數學課程標準修訂之總體目標如下：

1. 引導學生瞭解數學的內容、方法與精神，培養學生用數學方法思考問題的素養與能力。
2. 增進學生的基本數學能力，奠定學習相關學科的基礎。
3. 提供學生在實際生活與未來生涯所需的數學知能。
4. 培養學生欣賞數學內涵簡明有效及結構嚴謹優美的特質。

## (3) 新加坡數學課程

新加坡教育重視每個孩子個別能力與性向的發展，目的使孩子的潛能得以盡情發揮，以成爲未來建設新加坡的棟樑；藉由廣泛的課程以提升文化水準，以培養其健全的道德價值觀（翁婉珣，2004）。新加坡於 1979 年頒布新學制，爲現行學制的基礎，1991 年再次進行修訂，將小學三年級結束參加的分流考試延後至四年級，並於 2001 年頒布新的課程綱要。

新加坡小學數學綱要是由兩部分寫成，A 部分解釋綱要的哲理與實施的精神，並且詳細說明數學綱要的目標。數學綱要的結構概述了學校數學教育與學習的精髓，在各階段的數學學習包含了基本概念的取得與技能的實作，同時也包含數學思想的理解、一般問題的解決策略、擁有學習數學的正確態度及欣賞數學的能力，以做爲日常生活中一項重要且有用的工具。此數學綱要分別在小學的基礎階段與定向階段中，總結綱要目標以提供各階段概念和技能的總覽。

B 部分詳列各階段的教學內容，並謹慎確保小學至中學課程的連貫性。在教學大綱中，確保每個主題在各階段能合適地被重複提及，採螺旋式的方法加深課程內容，使學生能鞏固學習的概念和技能，且更進一步發展一套概念和技能。在 EM3 的綱要中重複編寫一些基礎階段的重要主題，如此能確保學生在進入下個

主題前，能擁有正確的數學概念。此份綱要作為教師設計教學課程的指南，教師不必受綱要安排的主題順序限制，但應保持課程的層級性與連貫性，善用綱要達到靈活與創意的教學 (Ministry of Education in Singapore, 2001)。新加坡數學教育希望學生能達到以下目標：

1. 獲得關於數、測量和空間等概念之技能和知識，並且應用於日常生活中。
2. 獲得基本的數學概念和技能，以做為未來學習數學或其他學科之基礎。
3. 透過解決數學的問題與過程，了解自己的數學思考和推理技能，發展邏輯演繹和歸納的能力。
4. 精確、簡明且合乎邏輯地使用數學語言，傳達數學的想法與論證。
5. 發展對於數學的積極態度，包含信心、樂趣與毅力。
6. 欣賞數學的功用，包括樣式和關係，並增加學生智能的好奇心。

新加坡七到十年級的學校教育以考試主導教學，因此課程綱要只有概括性的描述。新加坡學生在中四或中五課程結束時參加 GCE O level 考試，所以課程綱要是依照 GCE O level 考試大綱訂定，沒有如國小綱要般分年分項探討，而是以大方向的數學項目加以分類。

### 2.1.2 數學課程的延續與變革

近年來國際數學課程的改革，皆著重於數學與學生生活的連結。1998 年美國數學教師委員會將數學內容分為「數與運算」、「代數」、「幾何」、「測量」、「資料分析與機率」五個主題。同時認為學生應可透過「解決問題」、「推理與證明」、「溝通」、「連結」、「表徵」五種數學的過程獲得數學知識或應用數學知識，說明數學課程的變革以符應社會發展之趨勢，及未來生活之所需為方向(NCTM, 2000)。

Hoyle et al (1999) 認為數學課程不外乎兩個互補的目標：促進社會進步和個人的發展。1989 年美國研究委員會提出「Everybody Counts」報告中，預期課程改革七個重大的轉變，其中包括數學教育的趨勢與前景，分述如下 (丁爾升，2001)：

1. 中學數學的目標應從雙重使命轉變到單一目標，為所有學生提供重要的、共同的核心數學。
2. 數學教學從「傳授知識」的傳統模型轉變到「以激勵學習為特徵，以學生為中心」的實踐模型，由學生被動聽講的課堂轉變為學生積極主動參與。
3. 公眾對數學的態度從冷漠與敵意，轉變到承認數學在現今社會中的重要性。隨著科學技術的發達，數學的重要性也增加，對於公民來說數學文化與文化同等重要。
4. 數學教育從熱衷於數學規則的練習轉變到有廣闊基礎的數學能力。學生的數學能力應能辨明關係、邏輯推理，並運用各種數學方法解決多樣化的非例行性問題等。
5. 數學內容強調將問題呈現在真實情境中，且邏輯體系要隨著年齡的增加慢慢建立。
6. 數學教學從原始的紙筆計算轉變到使用計算器和計算機。使用計算器和計算機的目的是擴充學生的數學能力，提高數學學習的質量。
7. 大眾對數學的理解從不變的法則規條轉變到是一門嚴格而生動的科學模式。

### 2.1.3 三角函數課程之發展

三角的課程目標、教學目標及教材內容，隨著課程改革歷經多次的精簡或刪除。民國 74 年 4 月教育部修訂公布的國民中學數學課程標準，將相似形、二次函數等相關內容列為三角函數的先備知識，且課程編排「數值三角及其應用」的單元，讓學生進入高中前對三角函數有基本的認識。民國 83 年 10 月，教育部修訂公布的國民中學數學課程標準，只編寫銳角三角函數與三角函數的應用之內容，對相關教材內容修訂如下：

表 2-1 國中三角函數課程之演變

民國七十四年四月教育部修訂公布的國民中學數學課程標準內容	民國八十三年十月教育部修訂公布的國民中學數學課程標準對相關教材之變革			
	列入必修教材	列入選修教材	大幅精簡或刪除	備註
第一章 相似形 1-1 比例線段 1-2 相似形的意義 1-3 相似三角形 1-4 相似形的應用	✓ ✓ ✓ ✓	✓		直角三角形相似定理列為選修教材。
第二章 二次函數 2-1 變數與函數 2-2 二次函數的圖形 二次函數的最大值與最小值	✓ ✓ ✓			
第三章 數值三角及其應用 3-1 銳角三角函數 3-2 三角函數的基本關係  3-3 用查表法求三角函數值 3-4 三角函數的應用		✓  ✓	✓  ✓	只介紹正、餘弦與正切函數之函數值。

資料來源 台灣南一高中教師手冊

民國 83 年的課程大幅精簡數值三角及其應用的內容，且民國 87 年九年一貫數學課程暫行綱要，將所有三角函數的內容從國中教科書中刪除。因此現行國中學生在進入高中之前，只具備相似三角形的判別法、二次函數圖形的概念與三角形性質的幾何證明等先備知識。而教育部鑒於現行國民中學與高級中學課程之落差，委任國立中正大學數學系編寫高中銜接教材，提供 94 學年度高中入學新生進行數學領域補強教學之用，並對高中三角函數課程提出兩點建議：(1) 只處理正弦、餘弦和正切三個三角函數的圖形，至於餘切、正割和餘割函數的圖形可列為參考資料；(2) 刪除反三角函數，希望能讓學生在整體的知識上有連貫的學習。

#### 2.1.4 對本研究的啟示

數學綱要之目標與課程的發展，著重於數學素養的養成，以及強調將數學的概念與知識應用於日常生活中，以因應未來生活之所需。由上述文獻可知，台灣與新加坡對於基礎數學能力的重視，不僅規劃於理念層面，更強調落實於真實情境中。因此，本研究試圖從兩國教學目標與教科書內容，分析數學教材之鋪陳是否連貫、佈題背景是否與學生生活經驗連結，以及問題情境是否真實，並由國中數學內容的刪減趨勢，探討學生進入高中前三角函數的先備知識是否備足。

### 2.2 台灣與新加坡三角函數相關課題與先備知識之教材發展

民國 73 年教育部修訂之高級中學課程標準，編審教材的內容提及「教材乃實現教育及課程目標之主要資料，其重要自不待言，目前，部分教材或為分量過多，或為內容艱深，或與學生生活不發生密切關聯，因而影響教學效果。在教材修訂方面，要求各科教材的分量及難度須配合各該科教學時數及學生能力，其內容應顧及上下銜接，彼此聯繫，盡量與學生生活相結合，務期各科教科用書或教材分量一定要與教學時數密切配合，以免分量過多教學不完，發生因趕進度而草草了事，學生無法消化之不良現象。又教材內容亦要求切合學生能力，尤應注意與學生生活經驗相結合，以激勵學生學習興趣，提高學生程度。現行教材間有高、國中彼此重複或相互脫節之情形，高中各科教材之間，亦屢有重複或雷同之現象，教材編制應予以避免」。因此本節探討台灣與新加坡教科書之內容鋪陳，以台灣一到十年級南一版數學教科書與新加坡同期教科書進行分析。

#### 2.2.1 台灣數學教科書發展

南一文教集團成立於 1956 年，正式於 1961 年出版國小至高中之參考書。爾後，於 2000 年根據教育部公布的國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要，出版九年一貫南一版數學教科書。本研究採用九年一貫暫行綱要審定通過的九年一貫南一版數學教科書，以及依據 85 年高中數學課程標準編寫之南一高中教材。

### (1) 南一版一到六年級數學教科書

南一國小教材之學習活動與內容設計皆以兒童的生活經驗為主，展開單元間的學習，並且分別於學期中與學期末編排「加油小站」的活動設計，希望能讓學生複習已學過的概念及做單元間的觀念連結。教材的設計能啟發學生學習數學的興趣和培養學生自行建構數學概念的能力，以及養成學生良好的學習態度。其中台灣一到六年級數學教材在三角函數相關課題與先備知識鋪陳共 28 單元（一年級 2 單元、三年級 7 單元、四年級 10 單元、五年級 3 單元和六年級 6 單元）。

### (2) 南一版七到十年級數學教科書

南一國中教材配合學生的身心發展，以生活週遭事物為素材，設計適當的學習活動、問題與探討及腦力激盪等，讓學生都能積極參與討論，並且激發出各種想法，使學生能從中澄清數學概念，探討數、量、形等之樣式與規律，並建構出一套自己的思考模式。以認識環境並培養學生邏輯思維，使學生具備獨立思考與解決問題的能力。在每章節後附有重點整理，幫助學生掌握重點，增強其學習之效果，並且安排適當份量的自我評量，供學生檢視學習成果及反省之用。綜觀台灣七到十年級數學教材，在三角函數相關課題與先備知識鋪陳共 24 單元（七年級 5 單元、八年級 2 單元、九年級 4 單元及十年級 13 單元）。

## 2.2.2 新加坡數學教科書發展

新加坡於 2001 年教改推出一到八年級的教學大綱，「My Pals are here ! Maths」即是新加坡 Time Media 公司因應教改編制的一套國小教材，但截至目前為止只發行至小學五年級，因此本研究六年級採用「Primary Mathematics」之教材，七到十年級採用 2001 年 Shinglee 公司發行的「Mathematics」之數學教科書。

### (1) My Pals are here ! Maths 及 Primary Mathematics 一到六年級數學教科書

「My Pals are here ! Maths」是專門為小學生編製的一套教材，讓學生有系統地學習數學概念，並透過課堂的綜合活動能反覆練習、重建數學的知識。在熟悉基本

的數學內容時，教材的設計讓學生不需藉由具體的操作，即能發展出抽象的概念。每單元的第一部分教導學生主要的數學概念、技巧及解決問題的策略；第二部分透過團體活動或競賽的方式，讓學生在合作中學習數學；第三部分鼓勵學生使用計算器或是電腦完成回家作業，能將科技教育融入真實學習中；此外為高能力的學生設計挑戰性的問題，使能培養其思考能力與發展潛能。綜合上述，新加坡一到六年級數學教材在三角函數相關課題與先備知識鋪陳共 25 單元（一年級 1 單元、二年級 5 單元、三年級 4 單元、四年級 5 單元、五年級 8 單元和六年級 2 單元）。

## （2）Mathematics 七到十年級數學教科書

「Mathematics」為新加坡針對 GCE O Level 考試編寫的教科書。每個章節課程內容編寫廣泛，使學生能具備紮實的學科基礎，且利用清楚的語言及配合簡單的插圖介紹數學的概念與原理。教材中依照學生的年級與程度編寫合適的例題與課後習題，有些例題前註記星號，表示這些例題需要一些技巧或是牽涉較為複雜的計算，且每章節最後編排較困難或具有挑戰性的題目，學生必需應用自己的知識與經驗來解決。綜觀新加坡七到十年級數學教材，在三角函數相關課題與先備知識鋪陳共 26 單元（七年級 8 單元、八年級 7 單元、九年級 9 單元及十年級 2 單元）。

### 2.2.3 對本研究的啟示

台灣與新加坡教材的設計皆以學生為主體，以啟發學生學習數學的興趣和培養學生自行建構數學概念的能力為目標。兩國三角函數相關知識的課程編排順序與教材設計篇幅沒有明顯的差異，但新加坡於八年級正式引入三角比的內容，台灣則晚於十年級開始教導三角函數的知識，且在三角內容的編排時程與深度有明顯的差異。因此，本研究希望能透過教材的深入分析，探討兩國在三角函數教材設計的不同之處。

## 2.3 三角函數相關研究

本研究以數學領域中三角函數的課題進行探討，因此以「三角函數」與「數學教材」蒐集相關之學位論文與文獻，作為本研究的理論基礎。而國內已有不少針對三角函數之文獻可供參考，查閱到的學位論文旨在分析學生學習三角函數的學習現象，以及對於三角函數基本概念應用運算錯誤類型等，在此依研究者、年代、研究題目與研究內容等類別所有三角函數之相關課題與先備知識之文獻，如表：

表 2-3 國內三角函數相關文獻

研究者(年代)	研究題目	研究內容
曾淑鑾 (1990)	高中生線性內插法瞭解的研究	(1) 探討高中生在估測函數值問題的解題表現，並分析其解題策略。(2) 檢驗不同的變因對線性內插法概念瞭解的影響。(3) 歸納研究結果，試提若干建議供教學上參考。
張景媛 (1994)	國中生數學學習歷程統整模式的驗證及應用：學生建構數學概念的分析及數學文字題教學策略的研究	(1) 以模式考驗的方式驗證本研究之「國中生數學學習歷程統整模式」；(2) 以質的研究方法探討學生在數學文字題上所產生的錯誤概念，並探究學生如何建構出正確的數學概念；(3) 編製「後設認知與動機信念訓練課程」及「數學文字題解題策略訓練課程」，並以教學實驗的方式利用這些課程進行策略教學效果的考驗。
施盈蘭 (1995)	五專生的三角函數學習現象	探討五專生對三角函數在廣義角，廣義數值三角及三角函數概念三部份的認知情形。

黃純杏 (2001)	高中學生廣義角的三角函數運算錯誤概念類型之研究	探討高中學生在廣義角的三角函數運算的錯誤類型及造成學生犯錯的原因。
吳佳起 (2003)	函數單元學習前後的概念成長探討	探討國二學生在函數的單元學習前後，其函數概念層次的變化情形，及學生的錯誤類型與迷思概念。
陳忠雄 (2003)	高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究	探討高中學生在三角函數單元存在那些錯誤概念，並分析學生的三角函數錯誤概念的類型與形成錯誤概念的原因。
黃建興 (2004)	國小教師數學單元教學之探討—以圓周率教學為例	分析現有教科書中圓周率課程設計的內容，瞭解圓周率課程的設計梗概，並從中探討學生學習的困難。
簡志明 (2004)	高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究	探討高一學生學習銳角及廣義角三角函數的基本概念後，其概念發展情形與學生運算錯誤的類型及造成錯誤之原因。
賴潔芳 (2004)	二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究	探討運用二階段診斷評量分析高中學生學習三角函數的錯誤概念類型，與錯誤概念形成的原因，並依據此項發現來設計高中學生學習三角函數之教學活動，據此探究教學活動對學生學習三角函數單元的成效。
黃振乾 (2005)	高一學生解反函數問題之研究	以反函數定義的認知、反函數的求解及反函數的驗證，三個階段進行測驗及訪談。

黃世穎 (2005)	台灣與日本高中現行 數學教材比較	探討兩國高中數學課程之設計，就數系、多項式、不等式、三角函數、指數與對數、圓錐曲線、平面向量與空間圖形、矩陣、微積分、數值計算和機率與統計等十一個主題進行教材比較。
---------------	---------------------	--

以下將查閱的文獻分為四部份探討，分別為「數學相關概念及運算錯誤類型研究」、「三角函數概念及錯誤類型研究」、「三角函數學習困難之原因」與「國內外相關研究」，分述如下。

### 2.3.1 數學相關概念及運算錯誤類型研究

曾淑鑾 (1990)「高中生線性內插法瞭解的研究」文獻中，就內插法概念知識方面發現約六成學生對內插法表徵系統圖形到數學式的轉換能力不夠好；在過程知識方面發現，計算錯誤為可線性估算函數值問題的錯誤主因之一；解題方面發現，有規律的非局部線性圖形，會因其規律性使學生認為可以使用內插法，且估算函數值時，不管函數是否局部線性，似乎線性內插法是學生主要的估測策略。

張景媛 (1994)「國中生數學學習歷程統整模式的驗證及應用：學生建構數學概念的分析及數學文字題教學策略的研究」論文中，分析國中學生在數學文字的錯誤概念，其中基模知識的錯誤概念包含：學生常憑直覺或關鍵字作反應，或思考模式和基模知識有功能固著的現象，而使用了錯誤的基模知識。

吳佳起 (2003)「函數單元學習前後的概念成長探討」發現，國中二年級學生在函數方面存在許多錯誤類型，以及對於函數的迷思概念：

- (1) 在學生初次學習函數的概念前後，其函數概念有顯著的不同。
- (2) 函數單元的學習，最有助於「壓縮」層次的學生進階到「物化」層次。
- (3) 學生存在著許多錯誤類型。如：自變數與應變數的角色混淆顛倒。
- (4) 學生存在著許多關於函數的迷思概念。如：可以寫出關係式的就是函數。

黃建興 (2004)「國小教師數學單元教學之探討—以圓周率教學為例」中發現，學生學習圓周率困難的原因有二：一是對於圓心、直徑、半徑和圓周長相關概念的知識不足；二是缺少長度測量的能力，不會測量圓周長。

黃振乾 (2005)「高一學生解反函數問題之研究」發現，學生普遍在非映成函數的概念發生錯誤，此外對於以合成函數定義反函數的定義存在一些迷思。在個案方面顯示將函數的對應域、值域混淆，導致判斷非映成函數其反函數是否存在上發生錯誤。但學生可以使用變數變換的方式求變數表徵函數之反函數，以合成函數的方式驗證。此外，學生誤解反函數的定義，使其解題過程中發生部分錯誤。

### 2.3.2 三角函數概念及錯誤類型研究

施盈蘭 (1995)「五專生的三角函數學習現象」研究中，在廣義角三角函數概念知識方面發現：(1) 多數學生對於廣義角的認識模糊不清，易受到思維經驗及典例的視覺心像影響，而將坐標平面、象限、始邊的位置等非本質屬性納入廣義角的概念中。(2) 在求值廣義三角函數的過程中，常易受到思維經驗中銳角三角函數定義的概念心像影響，使得在利用教科書上的操作型定義圖解題目時，形成錯誤的程序性知識。(3) 對於三角的函數概念沒有很明確的認識，且易受到思維經驗的影響，產生知識的副遷移而進行錯誤的判斷或代數運算。

黃純杏 (2001)「高中學生廣義角的三角函數運算錯誤概念類型之研究」指出，高中學生在廣義角的三角函數運算錯誤類型主要有兩部份：

- (1) 廣義角部分的錯誤類型有：圖形錯覺，由圖形誤導廣義角度數、地理方位錯誤、有向角方向錯誤、廣義角大小錯誤及數字計算錯誤。
- (2) 廣義角的三角函數部份的錯誤類型有：三角函數基本定義錯誤、三角函數值錯誤、各三角函數值範圍錯誤與其他錯誤類型。

陳忠雄 (2003)「高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究」中，學生在三角函數概念學習的錯誤類型主要分為下列六部份：

- (1) 三角函數與反三角函數定義的概念不清：三角函數與反三角函數的定義混淆、不瞭解三角函數的定義域、值域與反三角函數的定義域。
- (2) 三角函數符號運用的概念不清：乘法性質的誤用、函數與反函數合成的誤用與三角形三邊長性質的誤用。
- (3) 三角函數運算性質的概念錯誤：三角函數的遞增與遞減不清楚、三角函數的平方關係不清楚、誤認三角函數具有線性性質、三角函數的正負不會判斷、三角函數的奇偶性質錯誤、三角函數的疊合性不清楚與三角函數值相等的概念不清。
- (4) 角度的基本性質概念不清：角度的單位換算有問題、同界角的認識不清。
- (5) 三角函數的圖形概念不清：三角函數的圖形與平移認識不清、三角函數圖形的對稱性概念不清。
- (6) 三角函數的週期與振幅概念不清：函數週期的定義概念不清、三角函數的週期與振幅性質認識不清。

賴潔芳 (2004)「二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究」，將高三學生的錯誤概念類型分為：(1) 弧度與函數值概念的錯誤概念。(2) 圖形概念的錯誤。(3) 正餘弦疊合概念的錯誤概念。(3) 廣義三角函數的錯誤概念。(4) 廣義三角函數概念的錯誤概念。(5) 三角函數的運算性質錯誤概念。(6) 反三角函數概念的錯誤概念。(7) 角度單位換算的錯誤概念。

簡志明 (2004)「高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究」文獻中，發現學生運算的錯誤類型主要為：銳角三角函數及廣義角三角函數定義不清楚、角度與邊長的對應關係為片斷性的認知、三角形的三角函數值運算概念不清楚、角度的範圍無法用不等式表示、各象限角的三角函數值正負判斷錯誤、角度轉換錯誤、三角函數方程式不會分解、象限角的三角函數值為錯誤值等。

### 2.3.3 三角函數學習困難之相關原因

賴潔芳 (2004) 指出三角函數單元的學習成效與其他單元相較之下較不理想且學生且學生的學習意願普遍低落原因有二：

- (1) 學習者需要將三角函數的圖像與數字關係做連結，去處理如「 $\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ 」這類的比例問題及操弄有關的符號 (Blackett & Tall, 1991)。
- (2) 語言背景使學生對於三角函數的英文寫法及唸法較無法了解其命名的意義。

簡志明 (2004) 提出學生在學習銳角及廣義角三角函數的基本概念時的學習困難有下列各項：(1) 預備知識的不足無法貫通；(2) 計算過程感覺繁雜，產生困難；(3) 對於文字符號不能清楚掌握；(4) 銳角擴展至廣義角三角函數時，難以銜接；(5) 無法仔細認清題目的各項條件而加以連接；(6) 代數觀念沒有落實；(7) 在日常生活中，少有實際應用相關題目，以致學習時較為抽象吃力；(8) 邏輯推理觀念不足，無法逐步思考。

### 2.3.4 國內外相關研究

國際間關於數學教育的文獻眾多，顯示對數學教學的重視。但針對數學教材分析的研究顯然較少，更缺乏跨國比較的文獻。目前查閱到黃世穎 (2005)「台灣與日本高中現行數學教材之比較」的相關文獻，就兩國三角函數的課程設計提出七點比較結果，分述如下：

- (1) 日本將三角函數課程分兩階段完成，先從直角三角形介紹三角比，接著從銳角擴充到 $0^\circ$ 到 $180^\circ$ ，接著進入三角形的正弦定理、餘弦定理、面積計算，最後正式介紹三角函數，並擴張到任意角，介紹各種公式。台灣則一口氣於一個學期內介紹完畢，且順序安排上有很大的不同。
- (2) 台灣對於六種三角函數都有介紹，日本只介紹正弦、餘弦、正切，完全沒有提及餘切、正割、餘割。

- (3) 台灣有介紹海龍公式、半角公式、積化和差與和差化積的公式、反函數，日本則沒有。
  - (4) 台灣完整介紹三角測量與應用，而日本只有基本概念，不強調實際的應用。
  - (5) 台灣有完整的介紹如何查表，甚至還有介紹內插法、計算機的使用方法，而日本只有提到「整數角度」的查表，其餘均沒有介紹。
  - (6) 日本有介紹三角函數的極限、微分、積分，台灣則沒有提及。
  - (7) 台灣有介紹複數的極式表示法、隸美弗定理、1 的  $n$  次方根，日本則沒有。
- 最後就兩國高中的教材比較，提出增加數學課上課時數、重視基本微積分課程、文組可以考慮不用學圓錐曲線、重視數學在電腦上的應用、課程盡量多元化以及捨棄繁雜的四則運算等建議。

### 2.3.5 對本研究的啟示

上述關於三角函數概念學習錯誤類型與迷思之文獻，以教師教學與學生學習之成效提出許多分析與建議，但相對而言，針對三角函數教材的研究顯然較少。因此本研究希望就三角函數之相關課題與先備知識，以台灣一到十年級之數學領域教科書進行綜觀全面的探討與分析，並且與新加坡同期教科書做跨國比較研究，針對數學教材的內容鋪陳與佈題背景、問題情境等進行分析。

## 第 3 章 研究方法與實施步驟

本章旨在說明本研究所採取的研究方法與程序，共分為三節，第一節「研究方法」，第二節「研究對象」，第三節「實施步驟」，分述如下。

### 3.1 研究方法

本研究欲探討台灣與新加坡一到十年級數學教材中，三角函數之相關課題及先備知識的課程設計時程、教材鋪陳的連貫性與合宜性、教科書編排的深度及廣度，以及分析教材的佈題背景及問題情境的呈現。基於此研究主題，本研究採用「內容分析研究法」與「比較教育研究法」，藉此了解三角函數相關課題知識之推進，進而將兩國教材依照描述、並列與比較等階段進行探討與分析，研究方法說明如下。

#### 3.1.1 內容分析研究法

內容分析法發展於二十世紀初，早期的研究對象限於大眾傳播媒體介，之後逐漸為社會學、歷史學及政治學的研究所採用。現在內容分析法已成為一種常用的教育研究法，研究對象漸擴及教科書等課程材料，而且教材的內容分析已成為當前課程研究的重要領域之一（歐用生，1998）。而內容分析法，通常是分析文件內容，包括教科書、短文、報紙、小說、雜誌、論文、圖片等、任何傳達工具的內容，都可以加以分析（J. R. Fraenkel & N. E. Wallen，2003）。內容分析法是一種量化的分析過程，但並不表示是一種純粹的「量的分析」，它是以傳播內容「量」的變化來推論「質」的變化，因此可以說是一種「質」與「量」並重的研究法（歐用生，1998）。內容分析研究法對於改進教育或社會的實務方面，或增添重要的知識方面而言，都能發揮其功能（王文科，1993）。因此，本研究以台灣與新加坡的教科書為研究對象，利用內容分析法分析三角函數之相關課題與先備知識的整體課程鋪陳，了解兩國知識建構的模式。

內容分析法在教育研究上有其用處，但也有缺點和困難，因此本研究依據以下兩項應用的原則 (歐用生，1998)：

(1) 分析的文件和內容應求周全

所欲分析的文件應蒐集齊全，才不致產生偏差。因此本研究備齊台灣與新加坡廣用版本之教科書一套，並輔以其他版本教科書進行參考，還包括教師手冊以及習作等，希望能對兩國教科書進行全面性的評析。

(2) 併用其他方法

內容分析法若能配合其他方法一起使用，更能收到效果。本研究同時採用比較教育研究法進行兩國教科書內容的比較。

本研究依據內容分析步驟進行文獻的分析，其步驟如下(王文科，1993)：

- (1) 確立目標：首先確定有待達成的具體目標或有待考驗的假設，即在於提供描述性資訊、複合研究發現與考驗假設。本研究針對三角函數的課題提出五個具體問題，藉此評估由國小至高中數學領域教科書的連貫性與合宜性。
- (2) 決定蒐集資料的方法：在蒐集資料前需決定方法的結構程度，是採取非結構的、質的、非系統的、主觀的方法；亦有的強調結構的、量的、有系統的、客觀的方法。本研究選用分析教科書的質性研究法進行探討。
- (3) 安排分析程序：最後即是決定使用特定的分析程序。綜合內容分析資料最常見用的方法為使用絕對次數以及相對次數，前者如在資料中發現特定事件的數目，後者如特定事件對全部事件的比例。本研究探討教科書編寫的問題情境，屬於相對次數的分析方式。

綜合以上所述，本研究搜集台灣與新加坡的數學課程目標，兩國小學至高中的數學教科書，以及國內的相關論文，用以描述並比較兩國的三角函數課程。此外，對於教材進行內容歸納、分析與資料詮釋，以探討學生學習三角函數相關課題與先備知識的概念是否連貫，並由佈題背景及三角函數的問題情境，突顯兩國教材的特色，並沒有預設立場。

### 3.1.2 比較教育研究法

顧名思義，比較教育是用比較的方法，研究教育。在教育研究中，所謂比較教育法有兩種意義：一是因果比較研究；二是國與國之間、文化與文化之間的比較研究。因果比較研究是介於敘述研究法（如問卷、調查、個案、晤談等）及實驗研究法之間，探求事實形成原因的方法。至於國與國之間，文化與文化之間的比較，是一種以較大的空間為領域，所從事的比較研究（林清江，1998）。本研究屬後者之比較教育，探討台灣與新加坡兩國間數學教科書的內容鋪陳。

本研究採用貝瑞岱（George Z. F. Bereday）比較教育研究法。貝瑞岱建構的比較教育方法架構，將比較教育研究分成區域研究與比較研究兩個部分，分述如下：

(1) 區域研究係以單一國家或地區為研究中心主題，但多國教育資料若僅是逐一做描述或解釋，也可視為區域研究。其研究步驟又可分為兩個階段：1. 描述階段，旨在進行教育資料的搜集；2. 解釋階段，是運用社會科學的方法對正式教育的資料進行分析（Bereday，1964）。

(2) 比較研究乃是同時對多個國家或地區的教育現象進行研究，其研究步驟可分為以下兩階段：1. 並列階段，將不同國家的資料進行初步的對比；2. 比較階段則是對教育所做的跨國界同時分析（Bereday，1964；Bereday，1967）。

因此，本研究在資料蒐集上，購齊台灣與新加坡小學至高中階段廣用版本的數學教科書，並涉獵兩國相關的官方網站、民間報告書、論文與書籍等資料，且廣泛閱讀我國與新加坡教科書單元內容。由於新加坡為一多元民族的社會，其語文課程採多元化發展，但教材內容均以官方語言的英文編寫，因此本論文將之翻譯成中文，進而針對兩國的課程綱要與考試制度進行解釋。依據貝瑞岱提出雙欄的連貫式列表，將我國與新加坡的數學教科書內容（三角函數部分）依年級進行並列摘錄，以尋求一統的概念與假設，使兩國教科書內容易於了解。從中針對教科書編排順序、先備知識的概念鋪陳與內容深淺，依主題將兩國教材以對稱與交替的方式進行闡釋比較，並提出具體性的評析與建議。

## 3.2 研究對象

本研究以三角函數之相關課題與先備知識的教科書內容為研究對象。現今的教育趨勢更強調教材內容應能符合每一位學生的需要，使學生有均等的學習機會（教育部，2000），因此說明教科書的鋪陳影響著學生的概念建構與學習成效。本研究探討的教科書版本分述如下：

### 3.2.1 台灣南一版數學教科書

我國教科書隨著時代的變遷，不斷進行修正與編制。教科書實施一綱多本政策之後，民間教科書根據教育部頒訂的課程標準進行多元化的編寫，而教育部審定通過的教科書版本包括「康軒」、「牛頓」、「龍騰」、「康熙」、「翰林」和「南一」等出版社，其中「康軒」和「牛頓」以國小與國中階段的學生為編寫主體，「龍騰」和「康熙」以國中與高中階段的學生為主。本研究欲在一份綱要之下，完整分析十二年教科書的連貫性，因此我們選定以「南一」版為分析對象，同時輔以「翰林」等版本教科書作為參考，希望能完整綜觀我國教科書的全貌。

### 3.2.2 新加坡數學教科書

新加坡於 2001 年頒布新綱要，數學教材從統一版本開放至六種版本，本研究據以考察的國小數學教科書是 2003 年 Times Media 出版國小一至五年級 My Pals are here ! Maths 叢書，全套共 10 冊，六年級是 2004 年 Federal 出版之教材 2 本，習作則是 2001 年 Singapore Asian 公司出版的 Topical Revision in Mathematics 共 6 本。國高中教科書是 1982 年 shinglee 公司出版的 Mathematics 叢書，七到十年級共 4 本，皆為新加坡民間使用率最高的教科書版本。

新加坡國小叢書的特色，能讓學生在課堂活動或獨立練習中，以話語或分組活動的方式回答問題，使學生自行建構出一套概念，且提供非例行性的問題讓學生在解題中進行思考；國高中教科書的編排，相似於我國大學教科書的撰寫模式，對於數學名詞皆給予嚴謹的釋義。本研究希望能藉由新加坡教科書的跨國比較，能對台灣教科書的編製提出有參考價值的意見。

### 3.3 實施步驟

本研究針對我國小學至高中數學領域的教科書進行探討與分析。研究的實施步驟如下圖所示：

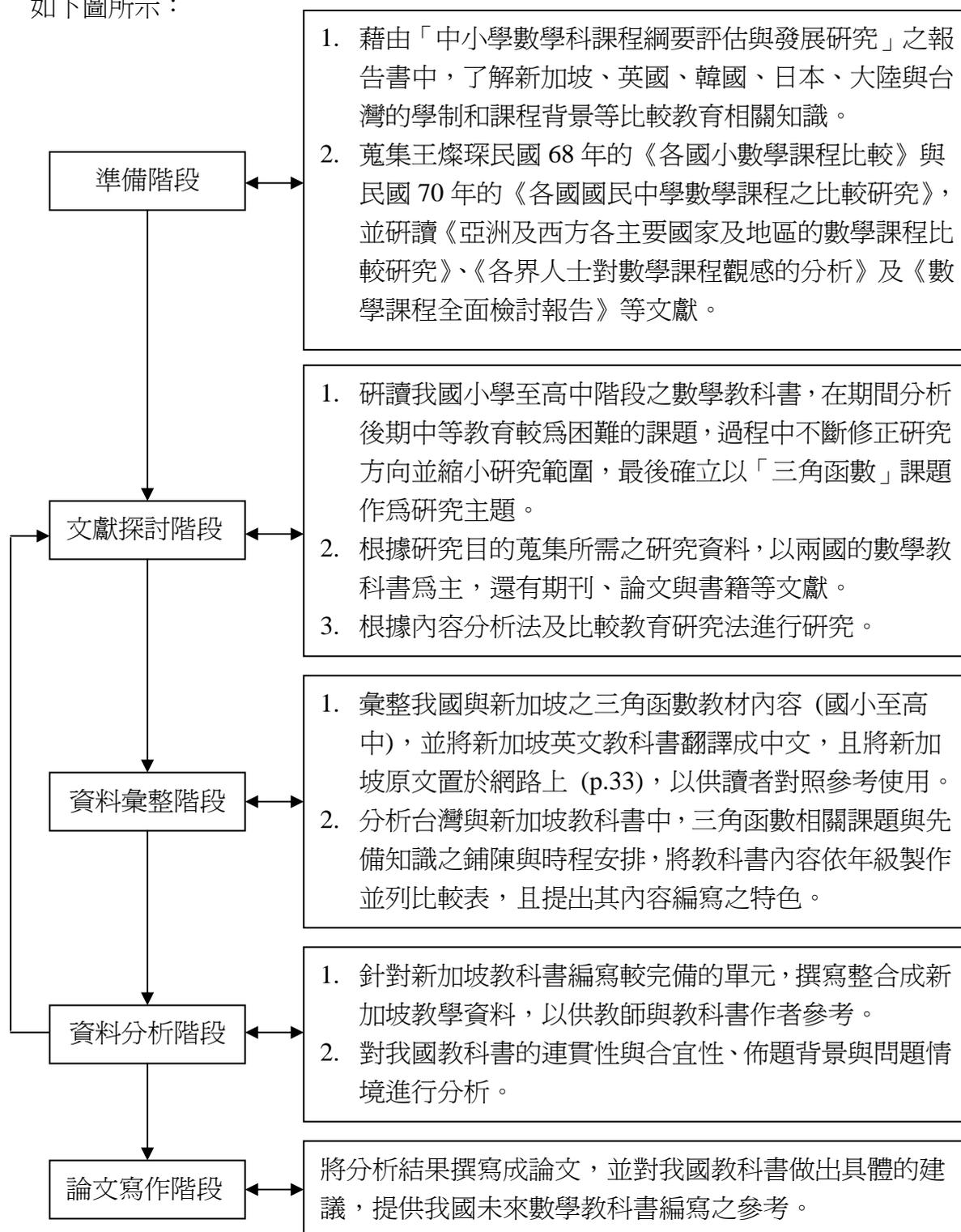


表 3-3 研究架構圖

## 第 4 章 台灣與新加坡數學教科書之比較與評析

本章分為四節，第一節「台灣與新加坡教學目標之描述與比較」，第二節「台灣與新加坡教科書之描述與比較」，第三節「教材鋪陳及概念設計之評析」以及第四節「佈題背景與問題情境之評析」。本文所有的比較與分析皆只針對三角函數之相關課題及先備知識。

### 4.1 台灣與新加坡教學目標之描述與比較

本研究針對三角函數之相關課題及先備知識，評估我國小學至高中數學領域教科書的連貫性與合宜性。因此，本節以高中三角函數單元的教學目標，分析九年一貫教科書中三角函數先備知識的鋪陳是否完備，以及國中至高中三角函數相關課題的教科書編寫是否連貫進行探討，並與新加坡比較之。

#### 4.1.1 台灣數學課程之三角函數教學目標

三角函數的課程內容編寫在高一下學期第二章與第三章。第二章「三角函數的基本概念」中，引入廣義角與三角函數的概念，探討三角形邊角之間的關係，導出正弦定理、餘弦定理，並討論解三角的問題及測量上的應用。共分六節，教學目標如下：

- 銳角三角函數
  1. 了解兩直角三角形中，若有一雙銳角對應相等，則其任意兩對應邊所成的六個比的比值也對應相等。
  2. 了解銳角 $\theta$ 的六個三角函數值： $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ 、 $\cot \theta$ 、 $\sec \theta$ 、 $\csc \theta$ 的意義，並知道它們隨 $\theta$ 的度數而變。 $\theta$ 給定，這六個值也跟著確定，它們都是 $\theta$ 的函數。
- 三角函數的基本關係
  1. 能利用銳角三角函數的定義，證明倒數關係、商數關係及平方關係。
  2. 知道銳角的某一三角函數值，利用上述關係，求得其餘五個三角函數值。

3. 能利用上述關係，證明一些簡單的三角恆等式。
4. 能利用銳角三角函數值的定義，證明餘角關係。
5. 能利用倒數關係、商數關係、平方關係及餘角關係，簡化三角函數值的計算。

● 簡易測量與三角函數值表

1. 能認識測量術語：仰角、俯角及方位，並了解方位的表示法。
2. 能根據所附的三角函數值表，及利用線性內插法求得銳角的三角函數值。
3. 給一個三角函數值，能利用所附的三角函數值表，查得其所對應的銳角。
4. 能將簡單的測量問題轉化為三角形邊角的問題，並利用三角函數的概念求解。

● 廣義角的三角函數

1. 能了解始邊、終邊、旋轉量、正角、負角及廣義角的意義。
2. 能了解廣義角及同界角的意義，並知道同界角的三角函數值相同。
3. 給定一廣義角，能求出其介於 $0^\circ$ 與 $360^\circ$ 之間的同界角。
4. 能判斷每一象限角各三角函數值正負。
5. 能知道當 $\theta$ 為 $\pm 90^\circ$ 的同界角時， $\tan \theta$ 與 $\sec \theta$ 無意義。
6. 能知道當 $\theta$ 為 $0^\circ$ 或 $180^\circ$ 的同界角時， $\cot \theta$ 與 $\csc \theta$ 無意義。
7. 能將 $(-\theta)$ 、 $(180^\circ \pm \theta)$ 、 $(360^\circ - \theta)$ 、 $(90^\circ \pm \theta)$ 、 $(270^\circ \pm \theta)$ 的三角函數值化為 $\theta$ 的三角函數值。

● 正弦定理與餘弦定理

1. 能推得面積公式，並利用面積公式導出正弦定理。
2. 能證明餘弦定理。
3. 能利用正弦定理、餘弦定理理解三角形，並推導其他幾何性質。

● 基本三角測量

能將日常測量問題轉化為解三角形問題，並利用各種三角關係式求解。

第三章「三角函數的性質與應用」中，引入角的弧度度量，將三角函數視為實數間的對應，並在坐標平面描繪其圖形，了解其特性，然後導出和、差角公式，倍角、半角公式，和、差與積的互化公式，進而討論正、餘弦函數之疊合問題及反三角函數的基本概念，最後介紹複數的極式、隸美弗定理，並介紹極坐標。共分爲七節，本研究不將複數的內容納入比較，教學目標如下：

● 三角函數的圖形

1. 知道“弧度”單位的意義及度量方法，及作“弧度”與“度”間的轉換。
2. 能由圓半徑及圓心角求其所對的弧長與所成之扇形的面積。
3. 能利用描點法描繪正弦函數的圖形，並知道如何透過平移及伸縮，由  $y = \sin x$  的圖形描出  $y = a \sin(bx + c) + d$  及  $y = \cos x$  之圖形。
4. 能透過平移和伸縮，由  $y = \cos x$  的圖形描出  $y = a \cos(bx + c) + d$  之圖形。
5. 能利用描點法描繪出正切函數的圖形，並利用平移及鏡射的方法，由  $y = \tan x$  的圖形描出  $y = \cot x$  的圖形。
6. 能利用倒數關係，由  $y = \cos x$  的圖形描出  $y = \sec x$  的圖形。
7. 能利用平移的方法，由  $y = \sec x$  的圖形描出  $y = \csc x$  的圖形。
8. 能知道六個三角函數的定義域、遞增或遞減之變化情形、週期、最大值與最小值以及判斷是爲奇函數或偶函數。

● 和角公式

1. 能證明正弦函數與餘弦函數的和角公式，且應用其求值。
2. 能導出正切函數的和角公式。

● 倍角、半角公式

1. 能導出正弦函數、餘弦函數及正切函數的倍角公式。
2. 能導出正弦函數、餘弦函數及正切函數的半角公式。

● 和、差與積的互化

1. 能利用和、差角公式導出積化和差與和差化積的公式。
2. 能利用上述公式求值及轉換三角函數式。

● 正餘弦函數的疊合

1. 能將  $y = a \sin x + b \cos x$  轉化成

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta) \text{ 或 } y = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \phi) \text{ 的形式。}$$

2. 能應用上述的方法，能解最大值或最小值的實際問題。

● 反三角函數的基本關係

1. 能了解符號  $\sin^{-1} a$  的定義，並知道定義域為  $[-1, 1]$ ，值域為  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，且與

定義於  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上之正弦函數  $y = \sin x$  互為反函數。

2. 能了解符號  $\cos^{-1} a$  的定義，並知道定義域為  $[-1, 1]$ ，值域為  $[0, \pi]$ ，且與定義於  $[0, \pi]$  上之餘弦函數  $y = \cos x$  互為反函數。

3. 能了解符號  $\tan^{-1} a$  的定義，並知道定義域為  $R$ ，值域為  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，且與定

義於  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上之正切函數  $y = \tan x$  互為反函數。

#### 4.1.2 新加坡數學課程之三角函數教學目標

新加坡將三角的相關內容分述於八、九年級兩個單元中，教學目標如下：

● 三角比 (Trigonometrical Ratios)

1. 能求出直角三角形的邊長，以及銳角三角形的 sine、cosine 和 tangent 的三角比值。
2. 能處理平面上的三角形問題。

● 三角學 (Trigonometry)

1. 能求出鈍角三角形的三角比。
2. 能處理兩個邊和一個角、兩個角和一個邊或三個邊的不等邊三角形問題。
3. 能計算複雜的三角形面積問題。
4. 能求出一條直線與平面間夾角的角度。
5. 能利用方位角與三角學的概念，解決生活中距離和高度等簡單的問題。

### 4.1.3 兩國三角函數教學目標之比較

台灣的教學目標著重於三角函數的理論與技術層面，新加坡強調生活經驗的連結與應用。兩國十年級三角函數教學目標之內容上有明顯的差異，以廣度而言，新加坡只將銳角三角比推廣到鈍角上，而台灣直接介紹廣義角的概念；以深度而言，新加坡沒有教導三角函數的圖形、和角公式、半角公式、三角疊合以及反三角函數等內容。但新加坡學生準備 A-level（相當於我國 11、12 年級或 12 年級與大一）時，數學教材內有更多三角函數的介紹與應用。本研究探討兩國教材至十年級為止，因此，就上述的教學目標而言，我國高一學生所學的三角函數課題較深且較多。

## 4.2 台灣與新加坡數學教科書之描述與比較

台灣國民中小學九年一貫課程綱要中，將課程分為四階段：一至三年級為第一階段；四、五年級為第二階段；六、七年級為第三階段；八、九年級為第四階段。因此在本研究中，加上高中一年級的數學教材，將一到十年級三角函數之相關課題與先備知識，分為五個階段分析比較之。其中新加坡教材之相關原文（英文）內容，整理於以下網址供讀者參考：

<http://www.libai.math.ncu.edu.tw~shann/Teach/mathedu/xiuhan>

### 4.2.1 台灣與新加坡一到三年級教材分析

#### 描述

臺灣小學一年級上學期「認識形狀」的單元，以立體圖形著手，讓學生從實物中分辨出長方體、圓柱體、球體、角錐等模型的實體，並觀察實物的面，分辨平面與非平面，進而認識三角形、四邊形和圓形等平面圖形。而後讓學生藉由觀察將形狀很像的圖形放在一起，從中分辨出三角形、正方形、圓形與長方形等圖形之不同，並同時給予命名，在此為三角形的概念作初步的鋪陳。一年級下學期「平

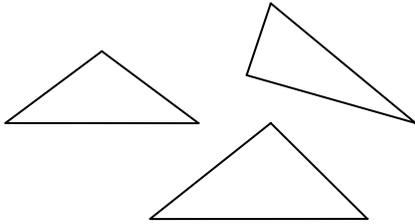
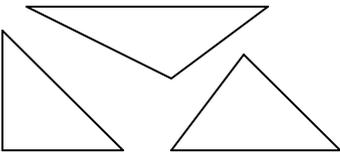
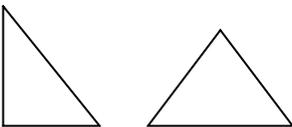
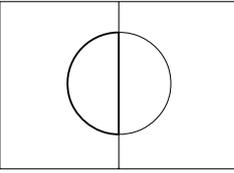
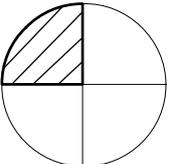
面圖形和方位」單元中，讓學生找出相同形狀的圖形卡，並在紙上把三角形、圓形和正方形的圖形描下來，學習認識和做平面圖形。二年級教科書則無介紹三角形的相關內容。

三年級上學期「三角形和長方形」單元中，首先複習三角形的概念，接著教導學生在三角形中，直直的地方稱作邊、轉角的地方稱為角，以及尖尖的地方稱作頂點，進而引導學生察覺平面圖形物件中的角，能指出三角形的邊與角，並觀察出教室中哪些東西有角。在「水平和鉛垂」的單元中，利用透明容器中靜止的液面，讓學生了解水平面的概念，且由親自動手製作的鐘擺，認識鐘擺停止不動時為鉛垂直線，進而教導鉛垂直線與水平直線的關係，為垂直的概念作鋪陳。三年級下學期「角」的單元中，利用三角板引出角的概念，進而教導學生比較角的大小，並定義垂直直線和水平直線所形成的角，叫做直角，同時也介紹比直角大的角叫鈍角，比直角小的角叫銳角，最後讓學生用量角器測量角度時，得知直角就是 90 度。

新加坡小學一年級「形狀與樣式」的單元，首先畫出一個圓形、三角形、正方形與長方形的圖形，接著分別給予命名，並讓學生練習將此四種圖形分類，用心之處，在三角形的圖示中展示出銳角、直角和鈍角三角形的形狀。二年級「幾何」的單元中，教導學生三角形是由三條直線所組成，進一步讓學生學會測量三邊的長度。在「形狀與樣式」的單元，透過生活中的足球場與輪胎等例子，介紹半圓與 $\frac{1}{4}$ 圓的概念，為周角和直角做初步的鋪陳。三年級「幾何」的單元中，正式定義角度：角是交於一點的兩條直線間的旋轉量。課程以分組活動的方式讓學生了解角度的意義，進而學會比較角度的大小，並透過摺紙的遊戲認識直角。最後藉由三角形的形狀，清楚教導學生三角形是由三個邊與三個角所組成的概念。

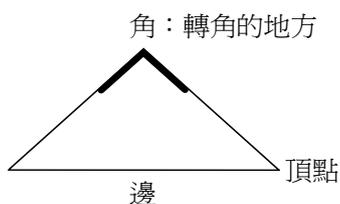
# 並列

表 4-2-1 一到三年級教材內容並列表

年級	台 灣	新 加 坡
一 年 級	<p><b>認識形狀 (3-1 p.27)</b> 這些形狀叫做三角形。</p>  <p><b>認識和做平面圖形 (2-1 p.15)</b> 在紙上把三角形的圖形卡描下來。</p>	<p><b>認識圖形 (5-1 p.58)</b></p>  <p>這些圖形都是三角形。</p>
二 年 級		<p><b>直線的量度 (15-1 p.107)</b> 活動： 三角形是由三條直線所構成。用你的尺量度每個三角形的邊長。</p>  <p><b>半圓和 <math>\frac{1}{4}</math> 圓 (15-1 p.114)</b> 足球場的發球區是由兩個大小相同的半圓組成。</p>  <p>輪胎是由 4 個大小相同的部分組成。</p> 

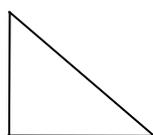
註：每個標題後的兩碼符號，第一碼表示此標題出自的章節，第二碼表示摘錄的頁數。此後皆同。

**認識三角形的邊、角和頂點 (4-1 p.35)**



**察覺平面圖形物件的角 (4-2 p.38)**

三 例：指出圖形的角在哪裡？



**認識水平面、水平直線 (7-1 p.62)**

用容器裝水，這樣平平的面，叫做「水平面」；像水平面這樣平平的直線，叫做「水平直線」。

年 **認識鉛垂直線 (7-2 p.65)**

由上到下直直的線，叫做「鉛垂直線」。

**認識角 (6-1 p.59)**

比較角的大小時，你會怎麼做？

2 個角的頂點對齊，一邊也對齊，或 2 個角的頂點對齊，小角落入大角中。

**認識直角 (6-2 p.60)**

級 鉛垂直線和水平直線所形成的角，叫做「直角」。

比直角大的角叫「鈍角」；比直角小的角叫「銳角」。

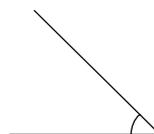
**認識量角器 (6-3 p.64)**

用「量角器」可以量出角的大小。量角器從左到右，或從右到左都有 0 到 180 的數字。

三角板上的直角是 90 度。

**角 (17-1 p.102)**

角是交於一點的兩條直線間的旋轉量。



**比較角的大小 (17-2 p.104)**

活動：

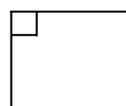
四人一組，用拉緊的繩子做出角：

1. 做一個角，稱之為 *A*。
2. 做一個比 *A* 大的角，稱之為 *B*。
3. 做一個大於 *A*，但小於 *B* 的角，稱之為 *C*。
4. 做一個最大的角，稱之為 *D*。

然後將角 *A*、*B*、*C* 和 *D* 畫在紙上，和同學的結果做比較。

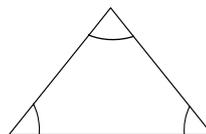
**直角 (17-3 p.107)**

一張紙對摺兩次，可以摺出一個直角。



**角的幾何圖形 (17-4 p.109)**

一個三角形有三個邊和三個角。



三角形

## 比較

- 圖形與空間的概念

台灣以立體物的概念著手，先讓學生做立體物的分類活動，接著教導學生將立體物平平的面描下來，進而辨認平面與非平面的圖形；新加坡直接以平面物體著手，之後讓學生由平面圖形架構出立體的概念。

- 認識圖形的設計

圖形概念的建立，台灣教科書先讓學生觀察三角形、正方形、圓形和長方形等圖形，再將之分類並給予命名；新加坡教科書先對圖形命名，再讓學生將之進行分類，兩國用不同的先後順序建構三角形形狀的概念。值得一提之處，台灣強調圖形是建構在平面上的概念，讓學生對圖形的認識更清楚。

- 角定義的切入點

台灣介紹角為「轉角的地方」，架構於形狀的概念之上，新加坡定義角是「交於一點的兩條直線間的旋轉量」，以角具有形狀和量的觀點切入。而在教導學生判斷角的大小時，台灣直接利用角的形狀比較大小，新加坡以角旋轉了多少的旋轉量比較之，並藉由活動設計，讓學生建構出一套判別的法則。

- 直角概念的建構

台灣以鉛垂直線和水平直線的先備知識，定義兩直線所形成的角為直角；新加坡則藉由摺紙的活動，讓學生自行摺出直角。

- 課程的連貫性

台灣對於三角函數相關概念與先備知識，在二年級的數學課程鋪陳上空了一年；新加坡在兩個年級持續發展三角形的知識與概念，課程呈現連貫性的安排。

## 4.2.2 台灣與新加坡四、五年級教材分析

### 描述

台灣小學四年級數學以螺旋式編寫教材，加深、加廣三角相關內容的教材知識。上學期「三角形、四邊形、角度和方位」單元中，首先讓學生藉由校園圖認識東、西、南、北的相對位置與方位，接著複習三角形的基本圖形、練習找出物件中的角，以及教導學生利用三角板辨識圖形中的直角。同時，教材中重述三角形的邊、角和頂點內容：直線叫做邊、尖尖的點叫做頂點，以及兩條直線相交所成的形狀叫做角。在引導學生將三角形的圖形分類後，教導學生有兩個邊等長的三角形是等腰三角形、三邊都等長的三角形是正三角形。接著，藉由扇子張開與合收的操作，讓學生發現角的形成，並經由複製疊合比較角的大小，更進一步利用鐘面上秒針轉動的現象，讓學生認識旋轉角的概念，且了解角的大小不會隨位置、方向的改變而改變。最後，延伸鋪陳國小三年級量角器的內容，讓學生了解度的意義：量角器每 1 小刻度形成的角是 1 度，記做 $1^\circ$ ，進而教導學生使用量角器做角及量角度等內容。四年級下學期在「長度和方位」的單元中，以學校在市區的位置圖關係，教導學生認識東、西、南、北的方位，讓學生能在實際情境中辨認真實的方位。進一步透過指北針引導學生認識校園中的校舍、教學設施和設備的位置與方位，讓學生認識東北方、東南方、西北方和西南方及距離，並利用台灣地圖讓學生明確了解兩個縣市之間的方位關係。

五年級上學期「多邊形和內角和」單元中，把三角形的角剪下來，讓學生觀察這些角拼在一起是否可以拼成一直線，同時以兩個直角拼在一起的大小，讓學生發現兩者之間的關係，說明三角形的角度合起來叫做內角和，共 180 度。接著引入圓周率的概念，讓學生畫出圓且實測圓周的長度，從中教導學生每一個圓的圓周長大約是直徑的 3.14 倍，並將之稱為「圓周率」。五年級下學期「圖形的面積」單元中，將三角形畫在方格紙紙上，將三角形透過切割、拼湊成長方形或正方形再數算其面積。

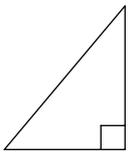
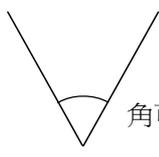
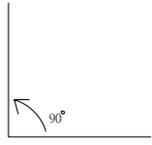
新加坡四年級大量鋪陳角度的概念。首先在「角」的單元中複習直角的概念，並在教材中畫出四個大小不同的角，讓學生判斷哪些角大於直角，哪些角小於直角，哪些角是直角。接著教導學生使用量角器，精確地量測出角的度數，並讓學生了解一個直角的角度是 90 度，且在活動練習中要求學生用電腦分別作出大於直角與小於直角的角度。在使用量角器測量角度時，教導學生角度是以「度」為單位，並且能分別用外刻度與內刻度測量角度。在活動練習中，給定學生一個角，讓學生用眼睛猜測大約的角度，之後再用量角器量出正確的角度，比較兩者的度數差距。在教導學生使用量角器測量角度後，接著教導學生使用量角器畫出角，同樣地練習用內刻度與外刻度作出角，並讓學生在活動中練習畫出大於 30 度但小於 60 度的角。最後以旋轉量的概念說明轉  $\frac{1}{4}$  圈是  $90^\circ$ 、轉  $\frac{1}{2}$  圈是  $180^\circ$ 、轉  $\frac{3}{4}$  圈是  $270^\circ$  和轉 1 圈是  $360^\circ$  的概念。在課後練習中，將旋轉角與方位的概念結合，試問學生當面對南方，以順時針方向旋轉  $\frac{3}{4}$  圈，接著繼續轉  $\frac{1}{2}$  圈是面對哪一個方向，引發學生思考。十二章「幾何圖形」的單元中，教導學生正三角形有三個等長的邊、等腰三角形有兩個等長的邊，以及定義直角三角形為有一個直角的三角形。

新加坡五年級「三角形面積」的單元，將畫在方格紙上的三角形切割成兩個直角三角形，或經由圖形變動的過程，讓學生發現三角形的面積等於長方形面積的一半，進而導出三角形面積公式。「比」的單元中，用生活化的例子讓孩子建構比的概念，了解比與相等的比的概念，並更深入的介紹三個量的比，且讓學生觀察當產生變動時前後比例的關係。在「角」的單元中，教導學生落於一直線上角的和是  $180^\circ$ ，交於一點上角的和是  $360^\circ$ 。在「八方位」的單元中，利用羅盤讓學生認識北、南、東、西，以及北東方、北西方、南東方和南西方八個方位，進而了解北東方與東方間的角度為  $45^\circ$ 。在「三角形與四邊形的性質」單元中，利用三角形有三個邊與三個角的概念，以及落於一直線上角的和是  $180^\circ$  的先備知識，導出三角形的內角和是  $180^\circ$ ，因此知道三角形兩個內角的度數時，可以算出

第三個角的角度。而當三角形中的一個角是直角時，可推出其餘兩個角的和是 $90^\circ$ 的性質。在「幾何作圖」的單元中，教導學生利用尺和量角器畫出任意角度的三角形。

## 並列

表 4-2-2 四、五年級教材內容並列表

年級	台 灣	新 加 坡
四 年 級	<p><b>認識東西南北的方位 (3-1 p.25)</b> 例：我們學校是面向南方的學校。</p> <p><b>辨識直角和平行線 (3-3 p.27)</b></p>  <p>直角可以做這樣的記號。</p> <p><b>複習邊、角和頂點 (3-4 p.30)</b> 2 條直線相交所成的形狀叫做角。 說說看：1 個三角形有幾個邊？有幾個頂點？有幾個角？</p> <p><b>分類、命名和比較異同 (3-5 p.31)</b> 有兩個邊等長的三角形，是等腰三角形；三邊都等長的三角形是正三角形。</p> <p><b>張開角的認識和大小比較 (3-6 p.32)</b></p>  <p>角可以這麼記</p>	<p><b>估計和測量直角 (5-1 p.72)</b> 使用量角器測量角度：將量角器的基準線對齊線 A，量角器的中心點放在角的頂點上，測量出<math>90^\circ</math>的角為直角。</p> <p><b>測量<math>180^\circ</math>以內的角度 (5-2 p.75)</b> 我們用「度」來測量角度，測得一個直角為<math>90^\circ</math>。</p> <p><b>畫<math>180^\circ</math>以內的角 (5-3 p.78)</b> 如何畫出<math>70^\circ</math>的角？ 步驟一：畫一條直線，並標記一個點在直線上。 步驟二：將此線對齊量角器的基準線，並且確定所標記的點對齊量角器的中心點。 步驟三：可利用內刻度或外刻度測出<math>70^\circ</math>的角度。</p> <p><b>旋轉角和直角 (5-4 p.80)</b> [1 個直角]</p>  <p>轉<math>\frac{1}{4}</math>圈是<math>90^\circ</math>。</p>







之處，台灣以由左到右及由右到左的說法教導學生使用量角器量測角度，而新加坡以內刻度和外刻度的說法介紹之；在時程鋪陳上，台灣以螺旋的方式介紹量角器概念於兩學年中，而新加坡設計以一學年教導完成。

- 三角形內角和的介紹

台灣與新加坡介紹三角形的內角和，皆是將三角形的三個角拼在一起，發現它們的邊會形成一直線，導出三角形的內角和是 $180^\circ$ 。鋪陳不同之處，台灣將剪開的角拼成一直線，讓學生以觀察 2 個直角拼在一起，它們的邊也會形成一直線，說明三角形的內角和是 $180^\circ$ ；新加坡則是先介紹落於一直線上角的和是 $180^\circ$ ，進而推導出結論，在知識建構的方式與廣度有所差異。

- 三角形的種類與定義

台灣在四年級教導學生一個三角形有三個邊、三個頂點以及三個角之後，將三角形分成三邊不等長、兩邊等長和三邊都等長的三角形，且給予等腰三角形與正三角形正式的定義；新加坡在小學階段未對三角形的種類正式介紹。

- 三角形的面積

兩國皆於五年級介紹三角形的面積，且藉由方格紙的圖像輔助說明之。台灣讓學生實際操作，將 1 個三角形切割成 2 個直角三角形，進而拼湊成長方形或正方形，再數算其面積；新加坡先教導學生計算直角三角形面積是該正方形或長方形面積的一半，接著透過直角三角形的關係解決非直角三角形的面積問題，最後推導出三角形面積的公式，在此面積公式的鋪陳較台灣早。

- 方位

兩國皆於四年級引入方位的概念。台灣在四年級透過生活情境，教導學生認識東西南北的方位，更進一步教導東北方、東南方、西北方以及西南方等八方位；新加坡四年級教導北南東西四個方位，並依旋轉的概念讓學生了解方位之間的關係，五年級以羅盤延伸教導北東方、北西方、南東方、南西方等八方位之間的關係。不同之處，兩國對於八方位的命名有所不同，且台灣將方位間視為兩參考點間的相對位置，新加坡進一步賦予方位間旋轉量的關係。

### 4.2.3 台灣與新加坡六、七年級教材分析

#### 描述

台灣六年級上學期「圖形的面積」單元中，介紹三角形的面積公式，讓學生能處理各種三角形的面積問題。在「比與比值」的單元，讓學生認識比的意義，並用符號「 $:$ 」加以表示兩個數間的關係，例如將「5 比 1」記成「 $5:1$ 」，且由前項除以後項所得的結果，讓學生理解比值的概念，進而藉由相等的比，教導學生了解最簡單整數比的意義。六年級下學期「坐標」單元中，利用真實情境教導學生認識八方位和距離，讓學生認識以方位和距離標明位置的訊息和指標。在「圓面積」的單元，再次教導學生圓周率的概念，進而指導孩子發現當圓切割的份數越多時，重新排列出的圖形越接近長方形，並利用長方形公式找出圓面積公式。

台灣七年級上學期「圖形的樣式與規律」單元，利用兩個相同的三角形可以拼湊成一個平行四邊形，且再次複習三角形面積的公式。七年級下學期在「三角形的性質」單元中，正式定義角為以兩條射線交於一點形成一個角的概念，並介紹直角、銳角、鈍角及平角的內容，且依三角形的內角角度說明有一個內角是 $90^\circ$ 的三角形稱為直角三角形，且再次說明三角形的三個內角和是 $180^\circ$ 。接著以活動的方式教導三角形的邊角關係，讓學生觀察出一個三角形中，若有兩角不相等，則大角對大邊；若有兩邊不相等，則大邊對大角的概念。在「圖形的放大與縮小」單元中，藉由活動的安排，教導學生判斷相似三角形的方式，得知當兩個三角形對應邊長成比例時，或兩個三角形對應角相等時，兩個三角形為相似的結論。在「長度與角度的變動」單元中，引入角的度量及弧長等知識，讓學生建構圓心角的度數等於它所對弧的度數，以及弧的度數等於他所對圓心角的度數的概念。在「面積的變動」單元，將三角形圖形轉換，得到不同的三角形面積表示法，讓學生了解三角形面積公式的多樣性。

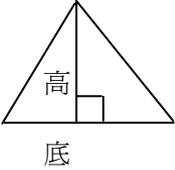
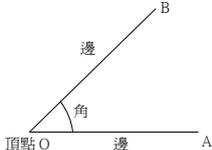
新加坡小六畢業前學生都要參加小學離校考試，因此六年級教科書編寫為複習教材。再次複習「比」的單元，讓學生熟練比的運算與概念，且皆著重於三個

量之間比的關係。在「圓」的單元中，讓學生真實量測出圓周的長度，並與圓的直徑比較之，發現圓周長超過三個圓的直徑，因此以 3.14 或  $\frac{22}{7}$  定義圓周率的概數，且說明每一個圓的圓周長 $\div$ 直徑的值是相同的，將之記為  $\pi$  的符號，並導出圓周長 $=\pi\times$ 直徑的關係。新加坡七年級以螺旋式的方式複習三角形的面積公式與比的內容，且以  $a:b$  或  $\frac{a}{b}$  的符號介紹比的概念。而在「基本的幾何概念與性質」單元中，清楚定義角的概念：兩條射線  $OA$  和  $OB$  交於一點  $O$ ，形成一個角，並記作  $\hat{A}OB$  或  $\hat{B}OA$ ，且教導學生測量角的標準單位是 1 度，將之定義成轉一圈的  $\frac{1}{360}$ 。接著教導學生認識銳角、直角、鈍角、平角和優角，並且引入餘角與補角的概念。

## 並列

表 4-2-3 六、七年級教材內容並列表

年級	台 灣	新 加 坡
六 年 級	<p><b>三角形的面積 (5-2 p.54)</b> 三角形的面積<math>=</math>底<math>\times</math>高<math>\div 2</math>。</p> <p><b>比的意義 (12-1 p.131)</b> 例題： 5 個好兒童章對 1 張獎勵卡，一般人通常會說兒童章對獎勵卡的比是「5 比 1」，記成「5:1」。像這樣的表示方法，我們叫做「比」。</p> <p><b>比值 (12-2 p.133)</b> 例題： 拉動滑輪組的長度是物品上升高度的 2 倍。這個 2 是「2:1」、「4:2」、「6:3」的比值，也就是比的前項除以後項所得的結果。</p>	<p><b>比和分數 (3-1 p.23)</b> 例題： 長方形的長 60cm、寬 40cm。試求長、寬和周長的比。 解：<math>60:40:2\cdot(60+40)</math> <math>=3:2:10</math></p> <p><b>圓周率 (1-2 p.11)</b> 每一個圓的圓周長<math>\div</math>直徑的值是相同的，比值表為 <math>\pi</math>。<math>\pi\approx 3.14</math> 或 <math>\frac{22}{7}</math>。 圓周率<math>=\pi\times</math>直徑。</p>

<p>六年級</p>	<p><b>最簡單整數比 (12-3 p.138)</b>            例題：            像「1：5」這個比，除了1以外沒有其他的公因數，我們叫做「最簡單整數比」。</p> <p><b>方位和距離 (1-1 p.8)</b>            說明一個物體的位置時，要以某地為基準點，並說明「方位」和「距離」，才能把位置說得清楚!</p> <p><b>圓周率 (8-1 p.84)</b>            每一個圓的圓周長與直徑之比值約為3.14，我們把這個圓周長與直徑之比值叫做「圓周率」。</p>	
<p>七年級</p>	<p><b>圖形的樣式與規律 (3-2 p.99)</b></p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>三角形面積</p> <math display="block">= \frac{\text{底} \times \text{高}}{2}</math> </div> </div> <p><b>角及度量 (1-1.1 p.5)</b></p> <p><math>\overrightarrow{AB}</math> 與 <math>\overrightarrow{AC}</math> 交於 A 點，形成了一個角，我們把這個角記成 <math>\angle BAC</math>、<math>\angle CAB</math> 或 <math>\angle A</math>，點 A 稱為 <math>\angle A</math> 的頂點，<math>\overrightarrow{AB}</math> 與 <math>\overrightarrow{AC}</math> 稱為 <math>\angle A</math> 的邊。當我們用「<math>\angle A</math>」這個符號時，可以代表一個角，也可以代表該角的角度。</p> <p>如果 <math>\overline{BA}</math> 垂直 <math>\overline{AC}</math> (<math>\angle A = 90^\circ</math>)，我們說 <math>\angle A</math> 是直角；如果 <math>\angle A &lt; 90^\circ</math>，我們說 <math>\angle A</math> 是銳角；如果 <math>\angle A &gt; 90^\circ</math>，我們說 <math>\angle A</math> 是鈍角；如果 <math>\angle A = 180^\circ</math>，我們說 <math>\angle A</math> 是平角。</p>	<p><b>三角形面積 (9-8 p.187)</b>            三角形面積 = <math>\frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}</math></p> <p><b>比 (11-1 p.222)</b>            兩個數 <math>a</math> 與 <math>b</math> 表示兩個量且 <math>b \neq 0</math>，<math>a</math> 比 <math>b</math> 記作 <math>a : b</math> 或 <math>\frac{a}{b}</math>。</p> <p><b>角 (13-7 p.292)</b>            兩條射線 <math>OA</math> 和 <math>OB</math> 交於一點 <math>O</math>，形成一個角。點 <math>O</math> 稱為角的頂點，<math>OA</math> 和 <math>OB</math> 稱為角的邊。這個角稱為角 <math>AOB</math> 或角 <math>BOA</math>，記作 <math>\hat{A}OB</math> 或 <math>\hat{B}OA</math>。角的另一種寫法是 <math>\angle AOB</math> 或 <math>\angle BOA</math>。當我們能清楚指出角時，也可稱此角為角 <math>O</math> 和記成 <math>\hat{O}</math> 或 <math>\angle O</math>。</p> <div style="text-align: center;">  </div>

<p>七 年 級</p>	<p><b>組成三角形的要素 (1-1.2 p.6)</b>          若依三角形的內角角度來看：          三個內角都小於<math>90^\circ</math>的三角形稱為銳角三角形；有一個內角是<math>90^\circ</math>的三角形稱為直角三角形；有一個內角大於<math>90^\circ</math>的三角形稱為鈍角三角形。          三角形的三個內角和是<math>180^\circ</math>。</p> <p><b>三角形的邊角關係 (1-1.4 p.12)</b>  <math>\triangle ABC</math> 中，如果 <math>\angle A &gt; \angle B &gt; \angle C</math>，那麼 <math>\overline{BC} &gt; \overline{AC} &gt; \overline{AB}</math>。也就是說，一個三角形中，若有兩角不相等，則大角對大邊。  <math>\triangle ABC</math> 中，如果 <math>\overline{BC} &gt; \overline{AC} &gt; \overline{AB}</math>，那麼 <math>\angle A &gt; \angle B &gt; \angle C</math>。也就是說，一個三角形中，若有兩邊不相等，則大邊對大角。</p> <p><b>相似三角形 (2-2.3 p.62)</b>          當兩個三角形對應邊長成比例時，那麼這兩個三角形相似。          當兩個三角形對應角相等時，那麼這兩個三角形就相似。</p> <p><b>角的度量與弧長 (3-1.2 p.75)</b>          我們通常用量角器去度量一個角的大小。以任意相鄰的兩個等分點與圓心的連線為兩邊，圓心為頂點的角的度數都是 1 度（記為<math>1^\circ</math>）。          如果我們固定圓心角 <math>\angle AOB</math> 的一邊 <math>\overline{OA}</math>（稱之為始邊）指向量角器<math>0^\circ</math>的標示，讓另一邊 <math>\overline{OB}</math>（稱之為終邊）繞著</p>	<p><b>量角器和角的測量 (13-8 p.292)</b>          測量角的標準單位是 1 度（寫作<math>1^\circ</math>），它被定義成轉一圈的<math>\frac{1}{360}</math>。照此定義，繞著定點轉一整圈所的角度是<math>360^\circ</math>。          測量角的大小時，將量角器的中心 <math>A</math> 放在角的頂點上，量角器的基準線 <math>AB</math> 對齊角的某一邊。</p> <p><b>角的型式 (13-9 p.293)</b>          銳角是指角度小於<math>90^\circ</math>的角；直角是指角度等於<math>90^\circ</math>的角；鈍角是指角度大於<math>90^\circ</math>的角；平角是指角度等於<math>180^\circ</math>的角和優角是指角度大於<math>180^\circ</math>但小於<math>360^\circ</math>的角。</p> <p><b>餘角 (13-10 p.294)</b>          兩個角的和是<math>90^\circ</math>，稱之互為餘角。</p> <p><b>補角 (13-11 p.294)</b>          兩個角和為<math>180^\circ</math>，稱之互為補角。</p> <p><b>三角形可依下列分類 (14-2 p.309)</b>          (a) 邊長相同的個數：              正三角形、等腰三角形、不等邊三角形。          (b) 角的型式：              銳角三角形、鈍角三角形、直角三角形。</p>
----------------------	--	--

<p>七 年 級</p>	<p>圓心 <math>O</math> 逆時針方向旋轉，從 <math>\overline{OB}</math> 也指向量角器 <math>0^\circ</math> 的標示開始，此時 <math>\angle AOB</math> 及其所對的弧都是 <math>0^\circ</math>，可以發現 <math>\angle AOB</math> 與其所對的弧的度數會越來越大，而且 <math>\angle AOB</math> 的度數恰好等於其所對的弧的度數。</p> <p>圓心角的度數等於它所對弧的度數； 弧的度數等於他所對圓心角的度數。</p> <p><b>三角形面積公式 (3-2.1 p.90)</b>  <math>\triangle ABC</math> 的面積  <math>= \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}</math>  <math>= \text{底} \times \frac{\text{高}}{2}</math>  <math>= \text{兩邊中點連線長} \times \text{高}</math></p>	
----------------------	--	--

## 比較

### ● 比的意義

台灣六年級藉由生活中的例子，教導學生比、比值與最簡單整數比等相關概念；新加坡則以三個學期鋪陳比的知識，五年級介紹比與相等的比之意義，六年級複習比的知識，並編排較複雜的例題，七年級正式定義比的符號，記作  $a:b$  或  $\frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ )。相較之下，新加坡教科書中比的知識鋪陳較廣且較深。

### ● 圓周率的概念

兩國皆於六年級開始介紹圓周率的概念。台灣在小學將圓周長與直徑的比值定為 3.14，稱之為圓周率；新加坡將此值定為 3.14 或  $\frac{22}{7}$ ，記作「 $\pi$ 」。不同之處，台灣在小學階段皆沒有介紹「 $\pi$ 」的符號，且新加坡同時以小數與分數兩種形式介紹圓周率的概數。

#### ● 角度的定義

兩國同時於七年級引入度的意義，但定義的方式有所不同。台灣定義度為量角器上任意相鄰的兩個等分點與圓心連線為兩邊，圓心為頂點的角的度數是 1 度；新加坡直接說明測量角度的標準單位是 1 度，被定義成轉一圈的  $\frac{1}{360}$ ，為正確的定義。

### 4.2.4 台灣與新加坡八、九年級教材分析

#### 描述

台灣八年級上學期「平面坐標系」的單元，定義象限的概念，說明坐標平面被  $x$  軸、 $y$  軸分割成四個區域（不含  $x$  軸、 $y$  軸），分別稱之為第一、第二、第三、第四象限。八年級下學期「畢氏定理」單元中，延續七年級介紹直角三角形的先備知識，首先說明如果三角形中有一個內角是  $90^\circ$ ，其中直角所對的邊稱為斜邊，另外兩個邊叫做股。接著介紹畢氏定理的內容：任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方的意義，並以圖示法展示畢氏定理的證明，讓學生將其概念應用於生活情境中。

台灣九年級以螺旋式的方式，延伸國小六年級比與比值及七年級相似三角形的概念。九年級上學期「比與比例式」單元中，先複習國小比與比值的知識，進而介紹比例式的概念，教導學生兩個比相等的意思就是它們的比值相等，以及比例式外項的乘積等於內項的乘積等內容。在「比例線段與相似三角形」的單元中，擴展七年級相似三角形的先備知識，歸納出判斷三角形相似的方法。九年級下學期「圓心角、圓周角與弦切角」單元中，藉由問題與討論的方式讓學生發現，直角三角形的外心即斜邊的中點，它到三個頂點的距離相等；接著以此例題的引導得知，直角三角形中若有一內角為  $30^\circ$ ，則此角所對的股其長度是斜邊長度的一半。最後在「幾何證明」的自我評量幾何證明中，以填空的方式引導學生得知：

(1) 一個直角三角形  $ABC$ ，已知  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，則  $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ ；(2) 一個直角三角形  $ABC$ ，已知  $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，則  $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$  的結論。

新加坡八年級「全等和相似」的單元，教導相似三角形的概念，讓學生能藉由對應邊成比例的性質解未知邊長或未知角度的題目。在「三角比」

(Trigonometrical Ratios) 單元中，由相似三角形引入三角函數的概念，並分別對直角三角形的斜邊、對邊和鄰邊命名後，正式定義三角比  $\sin A = \frac{opp}{hyp}$ 、

$\cos A = \frac{adj}{hyp}$  和  $\tan A = \frac{opp}{adj}$ ，並且教導學生使用電算器計算  $1^\circ$  到  $90^\circ$  的三角比值，讓學生嘗試用三個基本的三角比，解決直角三角形中邊長和角度間的問題。

新加坡九年級「全等和相似三角形」單元中，再次複習相似三角形對應角相等，或對應邊成一常數比例之概念，且歸納出相似三角形的判定法。「坐標幾何」的單元，引出斜率的概念，並定義  $\tan \theta = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$  為直線的斜率。「三角學」

(Trigonometry) 單元中，將八年級定義的銳角三角比推廣至鈍角，並且介紹  $30^\circ$  和  $45^\circ$  特殊角的三角比 (在八年級的三角比值都以計算器處理)。接著將國小三角形面積公式推廣到正弦面積公式，進而導出正弦定理，讓學生能處理兩邊對一角，以及兩角夾一邊等三角函數問題。之後定義餘弦定理，藉由證明讓學生了解不論是銳角、鈍角或是直角三角形，餘弦定理皆成立。最後介紹方位角的概念，讓學生藉由日常生活中東南西北的方位，了解在不同觀測點會有不一樣的三角比值。

# 並列

表 4-2-4 八、九年級教材內容並列表

年級	台 灣	新 加 坡
八 年 級	<p><b>坐標平面上的點與坐標 (4-1.3 p.124)</b></p> <p>坐標平面是由一條水平數線 (<math>x</math> 軸) 與一條鉛垂的數線 (<math>y</math> 軸) 所構成, <math>x</math> 軸向右為正向、<math>y</math> 軸向上為正向, 兩軸的交點 <math>O</math> 稱為原點。</p> <p>坐標平面被 <math>x</math> 軸、<math>y</math> 軸分割成四個區域 (不含 <math>x</math> 軸、<math>y</math> 軸)。依逆時針方向, 分別稱之為第一、第二、第三、第四象限。</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p><b>畢氏定理 (2-2 p.62)</b></p> <p>畢氏定理：任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方。</p> <div style="text-align: center;"> </div>	<p><b>多邊形 (2-4 p.32)</b></p> <p>例題： 給兩個相似三角形 <math>ABC</math> 和 <math>PQR</math>，試求圖中未知數的值。</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>解：我們知道</p> $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \quad (\text{對邊成比例})$ $\Rightarrow \frac{7.5}{5} = \frac{y}{3.2}$ $\therefore y = \frac{7.5 \times 3.2}{5} = 4.8$ <p><math>\hat{BAC} = \hat{QPR} = 25^\circ</math> (對應角相等)</p> <p><b>畢氏定理 (12-1 p.218)</b></p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>畢氏定理：任意一個直角三角形，斜邊上正方形的面積等於其它兩邊上兩個正方形面積的和。</p> <p>畢氏定理的逆定理亦是正確的： 在一個邊長為 <math>a</math>、<math>b</math>、<math>c</math> 的三角形中，如果 <math>a^2 = b^2 + c^2</math>，則相對於 <math>a</math> 邊的角是為直角。</p>

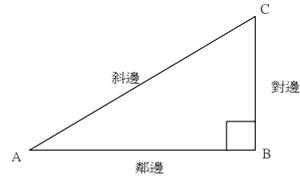
八

年

級

### 三角比 (15-2 p.282)

三角形  $ABC$  中，以角  $A$  而言，邊  $BC$  稱為對邊，邊  $AB$  稱為鄰邊，相對於直角的邊  $AC$  稱為斜邊。



直角三角形  $ABC$  中，

$$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{BC}{AB}$$

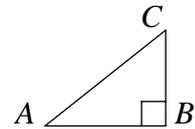
角的三角比是數值，其表示邊長與邊長的比，因此是沒有單位的。

### 三角比的值 (15-2 p.282)

例題：

直角三角形中，已知

$$\hat{B} = 90^\circ \text{ 和 } \hat{A} = 25^\circ,$$



測量  $BC$  和  $AB$  之後，

計算  $\frac{BC}{AB}$  的值大約等於 0.466。

### 使用計算器 (15-3 p.283)

直角三角形中，斜邊是最長的邊。因此角的  $\sin$  值和  $\cos$  值永遠不會大於 1，而  $\tan$  值可以是任意數。

### 用三角比解直角三角形問題

#### (15-4 p.286)

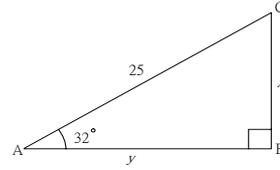
例題：

求三角形中的  $x$ 、 $y$  值，以有效的 4 位數字表示。

八

年

級



$$\text{解：} \cos \hat{BAC} = \frac{\text{鄰}}{\text{斜}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 32^\circ = \frac{y}{25}$$

$$y = 25 \cos 32^\circ = 21.20$$

接下來介紹三種求  $x$  的方法。

$$\text{法 I：} \sin 32^\circ = \frac{x}{25}$$

$$x = 25 \sin 32^\circ = 13.25$$

$$\text{法 II：} \tan 32^\circ = \frac{x}{y} = \frac{x}{21.20}$$

$$x = 21.20 \tan 32^\circ \\ = 13.25$$

$$\text{法 III：} x^2 + y^2 = 25^2$$

$$\therefore x^2 + 21.20^2 = 25^2$$

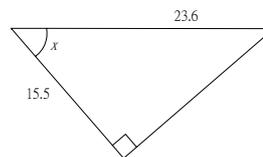
$$x^2 = 25^2 - 21.20^2 = 175.56$$

$$x = \sqrt{175.56} = 13.25$$

#### 用三角比求三角形的角度 (15-5 p.291)

例題：

試求出圖中角  $x$  的角度，以有效的 4 位數字表示。

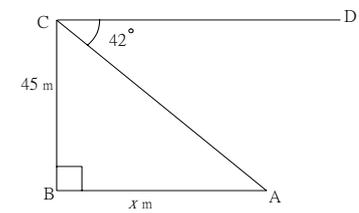


$$\text{解：} \cos x = \frac{15.5}{23.6}$$

$$x = 48.95^\circ$$

例題：

建築物的窗戶離地面高 45 公尺，從此看到地面上車子的俯角是  $42^\circ$ ，試求車子距離建築物多遠？

<p>八 年 級</p>		<p>解：依示意圖，以 <math>A</math> 表為車子，<math>BC</math> 表為建築物的高，<math>C</math> 表為觀測點，角 <math>ACD</math> 表為俯角。</p>  <p>令 <math>AB = x</math> 公尺，  <math>\hat{ACB} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ</math>  <math>\tan 48^\circ = \frac{x}{45}</math>  <math>x = 45 \tan 48^\circ = 49.98</math>  <math>\therefore</math> 車子距離建築物 49.98 公尺。</p>
<p>九 年 級</p>	<p><b>比與比值 (4.1 p.112)</b>  兩個數 <math>a</math> 與 <math>b</math> (<math>b \neq 0</math>)，<math>a</math> 比 <math>b</math> 就記作 <math>a : b</math>，它的比值為 <math>\frac{a}{b}</math>，其中 <math>a</math> 稱為這個比的前項、<math>b</math> 稱為這個比的後項。</p> <p><b>相似三角形 (4.2 p.138)</b>  <b>SAS</b> 相似性質：如果兩個三角形的一角相等，而且夾此角的兩邊對應成比例，則這兩個三角形相似。  <b>AAA</b> 相似性質：如果兩個三角形的三個內角對應相等，那麼這兩個三角形必相似。  <b>SSS</b> 相似性質：如果兩個三角形的三邊長對應成比例，則這兩個三角形相似。</p> <p><b>三角形的外接圓 (1-2.1 p.24)</b>  直角三角形的外心即斜邊的中點，它到三個頂點的距離相等。  直角三角形中，若有一個內角為 <math>30^\circ</math>，則此角所對應的股其長度是斜邊長度的一半。</p>	<p><b>相似三角形 (4-4 p.72)</b>  如果兩個三角形 <math>ABC</math> 和 <math>PQR</math> 相似，則在 <math>\triangle ABC</math> 和 <math>\triangle PQR</math> 中，</p> <p>(1) <math>\hat{A} = \hat{P}</math>，<math>\hat{B} = \hat{Q}</math>，<math>\hat{C} = \hat{R}</math></p> <p>(2) <math>\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = k</math>，  <math>k</math> 是一個常數。</p> <p><b>相似三角形的判定法 (4-5 p.74)</b></p> <p>1. 在 <math>\triangle ABC</math> 和 <math>\triangle PQR</math> 中，如果 <math>\hat{A} = \hat{P}</math> 和 <math>\hat{B} = \hat{Q}</math>，則 <math>\triangle ABC</math> 和 <math>\triangle PQR</math> 相似。</p> <p>2. 在 <math>\triangle ABC</math> 和 <math>\triangle PQR</math> 中，如果 <math>\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = \frac{1}{k}</math>，<math>k</math> 是一常數，則 <math>\triangle ABC</math> 和 <math>\triangle PQR</math> 相似。</p> <p>3. 在 <math>\triangle ABC</math> 和 <math>\triangle PQR</math> 中，如果 <math>\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{1}{k}</math> 和 <math>\hat{B} = \hat{Q}</math>，則 <math>\triangle ABC</math> 和 <math>\triangle PQR</math> 相似。</p>

**幾何證明 (2-2 p.66)**

例題：

有一直角三角形  $ABC$ ，已知  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，試證： $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

請在 ( ) 內加註理由。

證明：

九

(1)  $\overline{AC} = \overline{BC}$  ( )

(2)  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$  ( )  
 $= \overline{AC}^2 + \overline{AC}^2$  (等量代換)  
 $= 2\overline{AC}^2$

$\overline{AB} = \sqrt{2}\overline{AC}$

(3)  $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB}$   
 $= \overline{AC} : \overline{AC} : \sqrt{2}\overline{AC}$   
 $= 1 : 1 : \sqrt{2}$

年

例題：

有一直角三角形  $ABC$ ，其三個內角為  
 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，試證： $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。

請在括號內填入適當的數或加註理由。

證明：

級

(1) 另  $M$  為斜邊中點，

因為  $\overline{AB} = ( ) \times \overline{BC}$

(2)  $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$  ( )

$(2\overline{BC})^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$  ( )

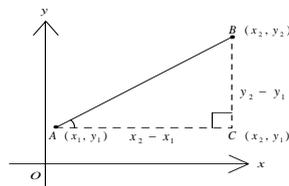
即  $\overline{AC}^2 = ( ) \times \overline{BC}^2$

故  $\overline{AC} = ( ) \times \overline{BC}$

(3)  $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB}$

$= \overline{BC} : ( ) \times \overline{BC} : ( ) \times \overline{BC}$

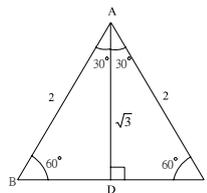
$= 1 : \sqrt{3} : 2$

**直線的傾斜角度 (5-7 p.96)**如圖， $BC = y_2 - y_1$ ， $AC = x_2 - x_1$ ，  
直線的傾斜角度是由直線  $AB$  與正向  
水平軸所夾的角度， $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 。而  $\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  是  $AB$  直線的斜率。**三角比 (10-1 p.208)**現在我們將定義鈍角的三角比，對於  
任意鈍角  $A$ ，

$\sin A = \sin(180^\circ - A)$

$\cos A = -\cos(180^\circ - A)$

$\tan A = -\tan(180^\circ - A)$

**特殊角： $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $45^\circ$  的三角比 (10-1 p.208)**考慮一個邊長為 2 的正三角形， $AD$   
垂直  $BC$ ，且將  $\triangle BAC$  等分為二。  
以直角三角形  $BAD$  而言，我們有：

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  和  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  和  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$  和  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

求  $45^\circ$  的三角形時，考慮一個等腰直  
角三角形  $ABC$ ， $\hat{A}CB = 90^\circ$ ，邊長  
 $AC = BC = 1$  單位，

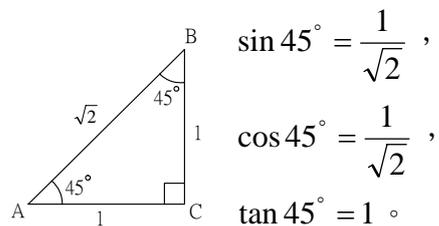
九

年

級

則  $\hat{ABC} = \hat{BAC} = 45^\circ$  和  $AB = \sqrt{2}$  ,

因此 ,



### 三角形面積 (10-3 p.212)

$$\begin{aligned}\Delta ABC &= \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B\end{aligned}$$

### 正弦定理 (10-4 p.215)

對於任意三角形  $ABC$  ,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

### 餘弦定理 (10-5 p.220)

對於任意三角形  $ABC$  ,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C .$$

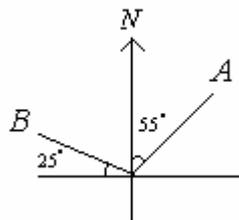
$a$  ,  $b$  和  $c$  分別表示三內角  $\angle A$  、  $\angle B$  和  $\angle C$  的對邊長。

### 方位角 (10-6 p.224)

例題 :

說明以下的方向角 :

- (a) 從  $O$  觀察  $A$  ; (b) 從  $O$  觀察  $B$  ;  
(c) 從  $A$  觀察  $O$  ; (d) 從  $B$  觀察  $O$  .



九年級		<p>解：</p> <p>(a) 從 <math>O</math> 到 <math>A</math> 的方位角是 <math>055^\circ</math>。</p> <p>(b) 從 <math>O</math> 到 <math>B</math> 的方位角是 <math>270^\circ + 25^\circ = 295^\circ</math>。 從 <math>A</math> 到 <math>O</math> 的方位角是 <math>180^\circ + 55^\circ = 235^\circ</math>。</p> <p>(c) 從 <math>B</math> 到 <math>O</math> 的方位角是 <math>90^\circ + 25^\circ = 115^\circ</math>。</p>
-----	--	--

## 比較

### ● 三角比的鋪陳

綜觀數學教材，新加坡三角比相關概念的引入較台灣早兩個學年。台灣八、九年級尚未提及三角比的概念，只有在九年級的幾何證明的習題中介紹  $45^\circ$ 、 $30^\circ$  及  $60^\circ$  特殊角的三角形邊長比，為高中三角函數做初步的鋪陳。而兩國以相同的方式說明  $45^\circ$  三角形的邊長比，但台灣以直角三角形的外心特性，導出  $60^\circ$  三角形的邊長比為  $1 : \sqrt{3} : 2$ ，新加坡則以邊長為 2 的正三角形推導出邊長的關係。

### ● 畢氏定理

兩國皆於八年級教導畢氏定理的內容。台灣直接說明任意一個直角三角形，兩股長的平方和等於斜邊長的平方，以邊長的關係切入；新加坡則讓學生觀察出三邊上的三個正方形間的關係，發現斜邊上的正方形面積等於另外兩邊上正方形面積的和，且更廣義的推導出畢氏定理的逆定理亦是成立的。

### ● 斜率概念的引入

新加坡九年級將  $\tan \theta$  與斜率概念結合，並把銳角三角比推廣至鈍角三角比。當學生具備三角比的先備知識後，教材利用三角比之間的關係，導出三角形的面積、正弦定理和餘弦定理，最後將三角比與方位作連結，讓學生能一貫地了解三角比的知識與鋪陳；台灣三角函數的內容編寫於十年級，詳見於下節。

## 4.2.5 台灣與新加坡十年級教材分析

### 描述

台灣十年級上學期引入「函數的基本概念」，說明函數的定義、函數圖形的意義，以及函數圖形的特徵，讓學生了解一個函數中兩個變量的內在的聯繫與制約關係。台灣在十年級下學期以「三角函數的基本概念」與「三角函數的性質與應用」兩章，鋪陳所有大學以前的三角函數內容。三角函數的基本概念分成六個單元，分述如下：「銳角三角形」單元中，介紹六個銳角三角函數的定義，分別為正弦函數、餘弦函數、正切函數、餘切函數、正割函數與餘割函數，並讓學生練習利用作圖法求三角函數值。「三角函數的基本關係」的單元，藉由六個三角函數間的關聯，推導出倒數關係、商數關係、平方關係及餘角關係。「簡易測量與三角函數值表」中，介紹仰角與俯角的概念，讓學生能將所學的三角函數知識與生活情境結合，並教導學生運用三角函數值表及電算器求三角函數值。接著在「廣義角的三角函數」單元，定義廣義角 $\theta$ 的六個三角函數值，以及引入同界角的概念，進而教導學生認識三角函數在四個象限之正負關係。在「正弦定理與餘弦定理」單元，介紹三角形的面積公式、正弦定理及餘弦定理，讓學生更了解三角形三個邊與三內角的關係。最後在「基本的三角測量」單元中，結合方位的先備知識，以及利用正弦定理與餘弦定理解決真實情境中的測量問題。

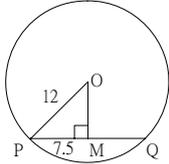
三角函數的性質與應用分成七個單元：「三角函數的圖形」單元中，首先定義 $\frac{360^\circ}{2\pi}$ 為1弧度，教導度數與弧度的關係，讓學生學會用弧度單位表示廣義角的大小，同時並介紹六個三角函數的圖形及其特性。「和角公式」單元中，利用距離公式及餘弦定理證明餘弦函數之差角公式，進而推導餘弦函數和角公式、正弦函數差角公式、正弦函數和角公式及正切函數的和、差角公式。在「倍角、半角公式」的單元中，教導學生二倍角公式、半角公式，接續在「和、差與積的互化」單元中，介紹四個積化和差公式及四個和差化積公式。「正、餘弦函數之疊合」單元中，以生活中的例子引起學生的學習動機，引導學生了解正、餘弦函數

圖形疊合的意義與特性，包括週期的最大值、最小值與振幅，最後在「反三角函數的基本概念」單元，介紹三個反三角函數的定義與性質、定義域與值域，進而讓學生了解反函數的概念。由於「複數的極式」單元內容屬於三角函數與複數之內部連結，因此本研究不將此內容納入三角函數教材的比較範圍。

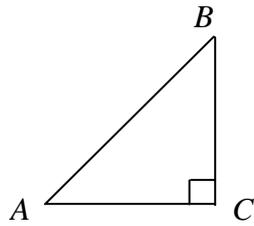
新加坡十年級編寫的三角學屬於複習的課程，並介紹圓心角的性質，並以例題的方式讓學生熟悉畢氏定理、三角形面積公式，且利用正弦定理與餘弦定理等解決三角形邊長與角度的問題。

## 並列

表 4-2-5 十年級教材內容並列表

年級	台 灣	新 加 坡
十年級	<p><b>函數的定義 (1.3.1 p.32)</b>            給了兩個非空集合 <math>A</math> 與 <math>B</math>。如果「<math>A</math> 內每一個元素 <math>a</math>，在 <math>B</math> 內恰有一個元素 <math>b</math> 與 <math>a</math> 對應」，此種對應法則 <math>f</math>，稱為從 <math>A</math> 映到 <math>B</math> 的函數，記作 <math>f : A \rightarrow B</math>。其中 <math>b</math> 叫做 <math>a</math> 的函數值，用符號 <math>b = f(a)</math> 表示。集合 <math>A</math> 稱為 <math>f</math> 的定義域，集合 <math>B</math> 叫做 <math>f</math> 的對應域，而全體函數值 <math>f(a)</math> 所組成的集合叫做 <math>f</math> 的值域。</p>	<p><b>圓心角的性質 (7-8 p.245)</b>            例題：            如圖，在一個半徑 12cm 的圓上，做一 15cm 的弦，求從圓心到弦的垂直距離。</p>  <p>解：            此垂線從圓心切割到弦 <math>PQ</math> 的中點，亦即 <math>PM = 7.5</math> cm  <math>OP^2 = PM^2 + OM^2</math>  <math>12^2 = 7.5^2 + OM^2</math>  <math>\Rightarrow OM = \sqrt{12^2 - 7.5^2}</math>            所以距離大約為 9.37 cm</p>
年級	<p><b>函數圖形的定義 (1-3.2 p.33)</b>            假設 <math>y = f(x)</math> 是給定的函數 (<math>x</math> 與 <math>y</math> 都是實數)，如果把 <math>x</math> 和 <math>y</math> 看成平面直角坐標系中的橫坐標與縱坐標，那麼所有滿足函數 <math>y = f(x)</math> 關係的點 <math>(x, y)</math> 構成一個圖形 (可能是一條直線或曲線或某些零散的點...), 這個圖形叫做函數 <math>f</math> 的圖形。</p>	<p><b>三角學 (7-9 p.250)</b>            例題：            如圖，三角形 <math>ABC</math> 中，<math>AB = 19</math> cm，<math>AC = 15</math> cm 和 <math>\angle B\hat{A}C = 46^\circ</math>。</p>

銳角三角函數值的定義 (2-1P.77)



$\sin A$  表示  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ ，稱之為  $\angle A$  的正弦

$\cos A$  表示  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ，稱之為  $\angle A$  的餘弦

$\tan A$  表示  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ ，稱之為  $\angle A$  的正切

$\cot A$  表示  $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ ，稱之為  $\angle A$  的餘切

$\sec A$  表示  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ ，稱之為  $\angle A$  的正割

$\csc A$  表示  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ，稱之為  $\angle A$  的餘割

十

年

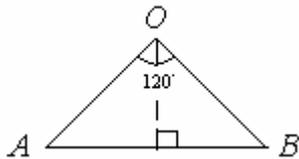
利用作圖法求三角函數值 (2-1.2 p.82)

例題：

已知  $\triangle OAB$  中， $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ ，

$\angle AOB = 120^\circ$ ，試求  $\overline{AB}$  之長及

$\triangle OAB$  的面積。



級

解：過  $O$  點作  $\overline{AB}$  的垂線。

設垂足點為  $D$ ，

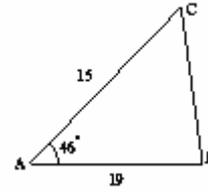
因  $\triangle OAD \cong \triangle OBD$ ，

所以  $\overline{AD} = \overline{BD}$ 。

因  $\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$ ，

計算下列各項：

解：



(a)  $BC^2$

$$= AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos \hat{BAC}$$

$$= 15^2 + 19^2 - 2(15)(19)\cos 46^\circ$$

$$= 190.04$$

$$\therefore BC = \sqrt{190.04} = 13.8 \text{ cm}$$

(b)  $\triangle ABC$  的面積 =  $\frac{1}{2}(15)(19)\sin 46^\circ$

$$= 102.5 \text{ cm}^2$$

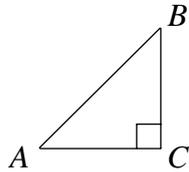
$$\text{所以 } \overline{OD} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{因此 } \overline{AB} = \sqrt{3}, \Delta OAB = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**倒數、商數、平方關係 (2-2.1 p.87)**

十 若三角形  $ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A$  的  
年 度數為  $\theta$ ，以  $a$ ， $b$  與  $c$  分別表示三邊  
級  $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$  與  $\overline{AB}$  之長，就有



$$\sin \theta = \frac{a}{c}, \cos \theta = \frac{b}{c},$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}, \cot \theta = \frac{b}{a},$$

$$\sec \theta = \frac{c}{b}, \csc \theta = \frac{c}{a}.$$

倒數關係：

$$\sin \theta \csc \theta = 1,$$

$$\tan \theta \cot \theta = 1,$$

$$\cos \theta \sec \theta = 1.$$

商數關係：

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

由畢氏定理得出平方關係：

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1,$$

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1.$$



### 廣義角的三角函數值 (2-4.1 p.109)

把角看作是以其頂點為旋轉中心，以其一邊為始邊，旋轉至另一邊(終邊)而得出的。並規定順時針方向旋轉的旋轉量是負的，逆時針方向旋轉的旋轉量是正的。

旋轉量是正的角就稱為正向角或簡稱為正角；旋轉量為負的角就稱為負向角或簡稱為負角。正向角與負向角統稱為有向角。

有向角有正向角與負向角之分，且度數也不限於 $0^\circ$ 到 $180^\circ$ 之間，我們統稱為廣義角。

定義廣義角的六個三角函數值：

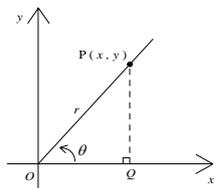
檢視 $\theta$ 為任意廣義角的情形：

我們將其頂點放在坐標平面的原點，始邊放在 $x$ 軸的正向上。當廣義角 $\theta$ 的終邊落在第一、二、三或四象限，我們同樣在其終邊上任取一點 $P(x, y)$ ，此處 $xy \neq 0$ 。然後自 $P$ 點向 $x$ 軸作垂線，令垂足為 $Q$ 點，則 $\triangle PQO$ 是一個直角三角形。我們以 $r$ 表

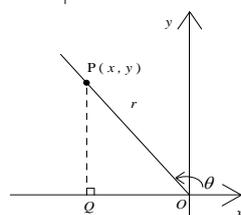
$\overline{OP}$ 的長度，並規定：

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}, \quad \sec \theta = \frac{r}{x}, \quad \csc \theta = \frac{r}{y}.$$

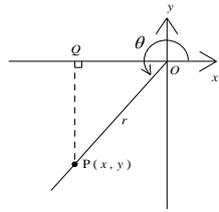


第一象限

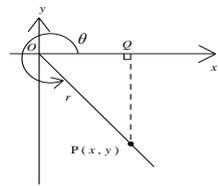


第二象限

十  
年  
級



第三象限



第四象限

十

### 同界角 (2-4.2 p.114)

同界角有相同的三角函數值：

$$\sin(n \times 360^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(n \times 360^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(n \times 360^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\cot(n \times 360^\circ + \theta) = \cot \theta$$

$$\sec(n \times 360^\circ + \theta) = \sec \theta$$

$$\csc(n \times 360^\circ + \theta) = \csc \theta$$

年

對於任意廣義角  $\phi$  都可以找到唯一的一個角  $\theta$ ， $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ，使得  $\phi = 360^\circ + \theta$ 。

三角函數在四個象限之正負關係：  
廣義角  $\theta$  的三角函數值是由其終邊與單位圓之交點  $P(x, y)$  的  $x$  與  $y$  值來決定。 $x$ 、 $y$  為正為負，視  $P(x, y)$  點所在的象限而異。列表如下：

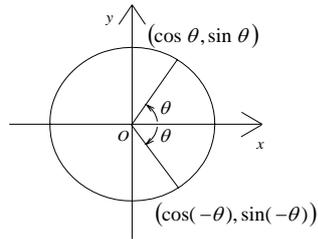
級

P 點坐落之象限	一	二	三	四
三角函數				
$\sin \theta$ 、 $\csc \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$ 、 $\sec \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$ 、 $\cot \theta$	+	-	+	-

我們把  $P$  點坐落在第一、第二、第三、第四象限的廣義角分別稱為第一象限角、第二象限角、第三象限角、第四象限角。

此外，倒數、商數、餘角及平方關係對於任意廣義角都成立。

化 $(-\theta)$ 角之三角函數為 $\theta$ 角之三角函數 (2-4.3 p.118)



十

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta ,$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta ,$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta ,$$

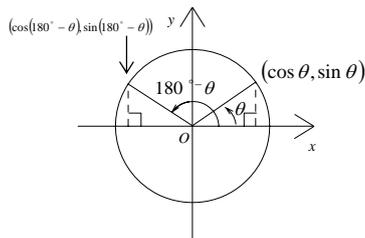
$$\cot(-\theta) = -\cot \theta ,$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta ,$$

$$\csc(-\theta) = -\csc \theta .$$

$(180^\circ \mp \theta)$ 與 $\theta$ 角之三角函數值間之關係 (2-4.4 p.122)

年



$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta ,$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta ,$$

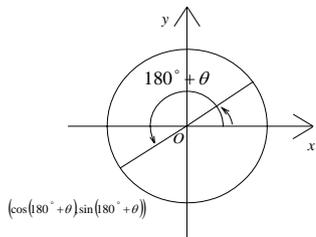
$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta ,$$

$$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta ,$$

$$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec \theta ,$$

$$\csc(180^\circ - \theta) = \csc \theta .$$

級



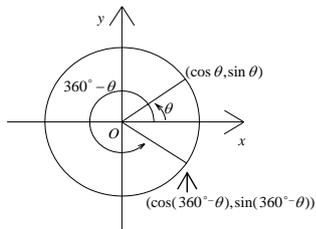
$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta ,$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta ,$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta ,$$

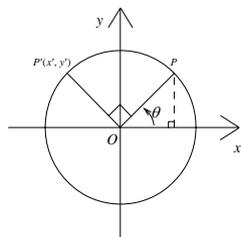
$$\begin{aligned}\cot(180^\circ + \theta) &= \cot \theta, \\ \sec(180^\circ + \theta) &= -\sec \theta, \\ \csc(180^\circ + \theta) &= -\csc \theta.\end{aligned}$$

**(360° - θ) 與 θ 角的三角函數值間的關係 (2-4.5 p.124)**



$$\begin{aligned}\sin(360^\circ - \theta) &= \sin(-\theta) = -\sin \theta, \\ \cos(360^\circ - \theta) &= \cos(-\theta) = \cos \theta, \\ \tan(360^\circ - \theta) &= \tan(-\theta) = -\tan \theta, \\ \cot(360^\circ - \theta) &= \cot(-\theta) = -\cot \theta, \\ \sec(360^\circ - \theta) &= \sec(-\theta) = \sec \theta, \\ \csc(360^\circ - \theta) &= \csc(-\theta) = -\csc \theta.\end{aligned}$$

**(90° ± θ) 與 θ 角的三角函數值間的關係 (2-4.6 p.125)**



$$\begin{aligned}\sin(90^\circ + \theta) &= \cos \theta, \\ \cos(90^\circ + \theta) &= -\sin \theta, \\ \tan(90^\circ + \theta) &= -\cot \theta, \\ \cot(90^\circ + \theta) &= -\tan \theta, \\ \sec(90^\circ + \theta) &= -\csc \theta, \\ \csc(90^\circ + \theta) &= \sec \theta.\end{aligned}$$

**(270° ± θ) 與 θ 角的三角函數值間的關係 (2-4.7 p.126)**

$$\begin{aligned}\sin(270^\circ - \theta) &= -\cos \theta, \\ \cos(270^\circ - \theta) &= -\sin \theta.\end{aligned}$$

十

年

級

三角形面積與正弦定理 (2-5.1 p.130)

三角形面積公式：

$\Delta ABC$  的面積

$$= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

正弦定理：

若  $a$ 、 $b$  與  $c$  分別表示  $\Delta ABC$  的三內角  $\angle A$ 、 $\angle B$  與  $\angle C$  的對邊長，則

十

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}。$$

正弦定理與外接圓半徑的關係：

若  $a$ 、 $b$  與  $c$  分別表示  $\Delta ABC$  三內角  $\angle A$ 、 $\angle B$  與  $\angle C$  的對邊長， $R$  為  $\Delta ABC$  之外接圓的半徑，則

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R。$$

年 例題：

試證明海龍公式，設  $\Delta ABC$  的三邊長分別是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，以  $\Delta$  表示其面積，

$s$  表其半周長，即  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ，

$$\text{則 } \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

證明：  $\Delta ABC$  中，

$\overline{BC}$  上的高  $\overline{AD} = c \sin B$ ，所以，

級

$$\Delta = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$= \frac{1}{2} ac \sqrt{1 - \cos^2 B}$$

$$= \frac{1}{2} ac \sqrt{1 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} ac \frac{1}{2ac} \sqrt{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sqrt{(2ac - c^2 - a^2 + b^2)} \\
&\quad \times \sqrt{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{(b - c + a)(b + a - c)} \times \\
&\quad \sqrt{(a + c - b)(a + c + b)} \\
&= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}
\end{aligned}$$

十

### 餘弦定理 (2-5.2 p.136)

若  $a$ 、 $b$  與  $c$  分別表示  $\triangle ABC$  三內角  $\angle A$ 、 $\angle B$  與  $\angle C$  的對邊長，則

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

### 基本三角測量 (2-6 p.147)

年

例題：

如下圖所示，海岸邊兩觀測站  $A$  與  $B$  同時發現海中小島  $C$  的附近，有一艘船  $D$  觸礁。在  $A$  觀測站得

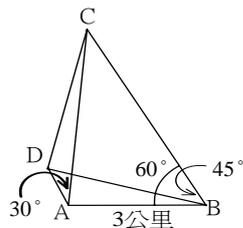
$\angle CAB = 90^\circ$ ， $\angle DAC = 30^\circ$ ；在  $B$  觀測站測得  $\angle CBA = 60^\circ$ ， $\angle CBD =$

$45^\circ$ ，已知  $A$ 、 $B$  兩觀測站相距 3 公里。試求海難船  $D$  與觀測站  $A$ 、 $B$  以及海島  $C$  的距離。

級

(已知  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ )

解：



因  $\angle CBA = 60^\circ$ ， $\angle CBD = 45^\circ$ ，  
所以  $\angle DBA = 15^\circ$ 。

$$\begin{aligned}\text{故 } \angle ADB &= 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ - 15^\circ \\ &= 45^\circ\end{aligned}$$

由正弦定理

$$\frac{\overline{DA}}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{DB}}{\sin 120^\circ} = \frac{3}{\sin 45^\circ}$$

$$\begin{aligned}\text{故 } \overline{DA} &= \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{ (公里),}\end{aligned}$$

$$\overline{DB} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ (公里).}$$

又因在  $\triangle ABC$  中，

$$\angle CAB = 90^\circ,$$

$$\angle CBA = 60^\circ, \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\overline{AB} = 3, \text{ 所以 } \overline{BC} = 6.$$

因在  $\triangle CBD$  中， $\overline{BC} = 6$ ，

$$\overline{DB} = \frac{3\sqrt{6}}{2}, \angle CBD = 45^\circ,$$

所以由餘弦定理知

$$\overline{CD}^2 = \frac{99}{2} - 18\sqrt{3}$$

$$\text{故 } \overline{CD} = \sqrt{\frac{99}{2} - 18\sqrt{3}} \text{ (公里)}$$

### 弧度 (3-1.1 p.151)

級 弧度的定義：

我們規定常數  $\frac{360^\circ}{2\pi}$  為一弧度。亦即

$$360^\circ = 2\pi \text{ 弧度。因此 } 1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} \text{ 弧}$$

$$\text{度，故有 } \left( \frac{360^\circ}{2\pi} \right) = 1 \text{ 弧度，} 1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ 弧}$$

度。

<p>十</p> <p>年</p> <p>級</p>	<p><math>\angle POQ = 1</math> 弧度的意思即 <math>PO</math> 的弧長 = 圓 <math>O</math> 的半徑。</p> <p><b>扇形的弧長與面積 (3-1.2 p.153)</b></p> <p>弧長公式： 若圓心角 <math>\angle POQ = \theta</math> 弧度，則 <math>PQ</math> 的弧長 = <math>r\theta</math></p> <p>扇形面積公式： 若 <math>\angle POQ = \theta</math> 弧度，則</p> $\text{扇形面積} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(\text{PQ弧長})r$ <p>用弧度為單位表廣義角的大小： 若一廣義角為 <math>x^\circ</math>，則廣義角為 <math>x \cdot \frac{2\pi}{360}</math> 弧度。</p> <p><b>三角函數的圖形及其特性 (3-1.3 p.158)</b></p> <p>函數的週期： 一個函數 <math>y = f(x)</math> 的圖形若每隔一個固定的單位長，亦即可找到固定的正數 <math>a</math>，使得對於其定義域中每一元素 <math>x</math>，恆有 <math>f(x+a) = f(x)</math>，我們稱這個週期函數的週期為 <math>a</math>。</p> <p>正弦函數的特性：</p> <p>(1) 正弦函數 <math>y = \sin x</math> 的定義域為 <math>R</math>。</p> <p>(2) 正弦函數 <math>y = \sin x</math> 的值域為 <math>\{y   -1 \leq y \leq 1\}</math>，也就是說：對於任意實數 <math>x</math>，<math>-1 \leq \sin x \leq 1</math>，其最大值為 1，最小值為 -1。</p> <p>(3) 正弦函數的週期為 <math>2\pi</math>。</p> <p>(4) 當 <math>x</math> 的值由 0 連續遞增到 <math>\frac{\pi}{2}</math> 時， <math>y = \sin x</math> 的值隨之由 0 連續遞增到</p>	
----------------------------	---	--

十  
年  
級

1；當  $x$  的值由  $\frac{\pi}{2}$  連續遞增為  $\pi$  時，  
 $y = \sin x$  的值隨之由 1 連續遞減為  
 0；當  $x$  的值由  $\pi$  連續遞增到  $\frac{3}{2}\pi$   
 時， $y = \sin x$  的值隨之由 0 連續遞  
 減增為 -1；當  $x$  的值由  $\frac{3}{2}\pi$  連續遞  
 增到  $2\pi$  時， $y = \sin x$  的值隨之由  
 -1 連續遞增為 0。

$x$	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$2\pi$
$\sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

(5) 因對於任意實數  $x$ ，  
 $\sin(-x) = -\sin x$ ，所以正弦函數  
 $y = \sin x$  為一奇函數，若  $(x_1, y_1)$  滿  
 足  $y = \sin x$ ，則  $(-x_1, -y_1)$  亦滿足  
 $y = \sin x$ ，故其圖形對稱於原點。  
 同理推知餘弦函數、正切函數、餘切  
 函數、正割函數及餘割函數的特性。

#### 餘弦函數的差角公式 (3-2.1 p.174)

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$ ，  
 $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$

#### 餘弦函數的和角公式 (3-2.2 p.177)

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$ ，  
 $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$

#### 正弦函數的差角公式 (3-2.3 p.177)

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$ ，  
 $\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$

#### 正弦函數的和角公式 (3-2.4 p.178)

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$ ，  
 $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$

**正切函數的和、差角公式 (3-2.5 p.181)**

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$ ，若  $\tan \theta_1$ ， $\tan \theta_2$  皆有意義，且

(1)  $\tan(\theta_1 + \theta_2)$  有意義，

$1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2 \neq 0$ ，則

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2}。$$

(2)  $\tan(\theta_1 - \theta_2)$  有意義，

$1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2 \neq 0$ ，則

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}。$$

十

**二倍角公式 (3-3.1 p.184)**

對於任意角  $\theta$ ，

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta，$$

$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta，$$

對於任意角  $\theta$ ，只要  $\tan \theta$ ， $\tan 2\theta$  皆有意義，且  $1 - \tan^2 \theta \neq 0$ ，則

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}。$$

年

**半角公式 (3-3.2 p.187)**

對於任意角  $\theta$ ，

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}，$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}，$$

對於任意角  $\theta$ ， $\theta \neq n\pi$  ( $n$  為任意奇數)，

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}。$$

級

**積化和差公式 (3-4.1 p.192)**

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$ ，

$$\begin{aligned} 2\sin \theta_1 \cos \theta_2 &= \sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cos \theta_1 \sin \theta_2 &= \sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
& 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\
&= -\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

### 和差化積公式 (3-4.2 p.195)

對於任意角  $\alpha$  與  $\beta$ ，

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

### 化 $a \sin \theta + b \cos \theta$ 為 $r \sin(\theta + \alpha)$ 之形式 (3-5.1 p.201)

設  $a, b$  是不全為 0 的實數，則

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta),$$

$$\text{其中 } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

### 正、餘弦函數的疊合 (3-5.2 p.206)

隨堂練習：

是描繪  $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$  的圖形，  
並求週期、最大值與最小值。

$$\begin{aligned}
\text{解： } y &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) \\
&= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

即其週期為  $2\pi$ ，最大值為 2，  
最小值為 -2。

十

年

級

### 反正弦函數 (3-6.1 p.210)

$\sin^{-1} a$  的定義：

對於每一個實數  $a \in [-1, 1]$ ，在區間

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  內，都恰好有一個實數  $x$ ，

使得  $\sin x = a$ 。這個唯一的實數  $x$ ，就記做  $\sin^{-1} a$  (也記做  $\arcsin = a$ )，讀作 *arc sine a*。

$\sin^{-1} a$  的性質：

十 1. 當  $-1 \leq a \leq 1$  時， $\sin^{-1} a$  才有意義。

2. 若  $\sin^{-1} a = x$ ，則  $x$  在區間  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

上且滿足  $\sin x = a$ ，即

$$\sin(\sin^{-1} a) = a。$$

### 反餘弦函數 (3-6.2 p.214)

$\cos^{-1} a$  的定義：

對於每一個實數  $a$ ， $-1 \leq a \leq 1$ ，在區

年 間  $\{x | 0 \leq x \leq \pi\}$  上都恰好有一個實數

$x$  使得  $\cos x = a$ 。這個唯一的實數

$x$ ，就記做  $\cos^{-1} a$  (也記做

$\arccos = a$ )，讀作 *arc cosine a*。

$\cos^{-1} a$  的性質：

1. 當  $-1 \leq a \leq 1$  時， $\cos^{-1} a$  才有意義。

2. 若  $\cos^{-1} a = x$ ，則  $x$  在區間  $[0, \pi]$  上

且滿足  $\cos x = a$ ，即

$$\cos(\cos^{-1} a) = a。$$

### 反正切函數 (3-6.3 p.218)

$\tan^{-1} a$  的定義：

對於每一個實數  $a$ ，在區間

$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$  上都恰好有一個實數  $x$

使得  $\tan x = a$ 。這個唯一的實數  $x$ ，

就記做  $\tan^{-1} a$  (也記做  $\arctan = a$ )，讀作 *arc tangent a*。

十 年 級	$\tan^{-1} a$ 的性質： 1.當 $-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} a \leq \frac{\pi}{2}$ 時才有意義。 2.若 $\tan^{-1} a = x$ ，則 $x$ 在區間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上且滿足 $\tan x = a$ ，即 $\tan(\tan^{-1} a) = a$ 。	
-------------	--	--

## 比較

### ● 三角函數鋪陳之時程

台灣於十年級正式介紹三角函數的內容，並且一次鋪陳所有三角函數的內容，而新加坡早於八、九年級分述三角的知識，十年級針對 GCE O Level 考試編寫複習課程，不再教導新課程，因此兩國在三角函數時程的鋪陳上有明顯的差異。台灣首先介紹函數的概念，讓學生了解函數圖形的意義，接著介紹六個三角函數，在此即與新加坡介紹三個三角函數有所不同，且台灣以象限的概念定義廣義角的三角函數值，讓學生了解三角函數在四個象限之正負關係，而新加坡只介紹  $0^\circ$  到  $180^\circ$  的三角比值。

### ● 電算器的使用

台灣詳細介紹電算器的使用方法，但在課本例題中並無使用計算器解題的例題，大部分要求學生以查表法或內插法解決銳角三角函數值的問題；新加坡讓學生在課堂中，真實使用計算器解決銳角或鈍角三角函數值的問題，將科技融入教學現場中。

### ● 三角函數編寫之深淺

台灣的三角函數介紹正弦、餘弦和正切函數的差角公式和和角公式，以及導出二倍角公式、半角公式、積化和差公式與和差化積公式，最後教導正餘弦函數的疊合，以及反正弦函數與反餘弦函數，整體三角函數的課程編排較新加坡既多且深。

### 4.3 教材鋪陳及概念設計之評析

本節將台灣與新加坡一到十年級，三角函數相關課題及先備知識之數學內容，分為「數與量」、「代數」及「圖形與幾何」等三大數學主題做比較，依主題列出兩國教材之特點，並提出具體看法。

#### (一) 數與量

##### ● 角

##### (1) 角定義的切入點

台灣將角區分為「角形」與「角量」，其中又將角量細分成張開角量與旋轉角量。在小學三年級定義角為轉角的地方，架構在 2 條直線相交所成的形狀概念上，直到介紹使用量角器測量角度後，引出「張開角量」的內容，並在四年級教導「旋轉角量」的知識。新加坡二年級直接定義角具有形狀和量的觀點，在整個教學流程不及我國細緻。

##### (2) 直角概念的建構

台灣以嚴謹的鉛垂直線和水平直線定義直角，相對的狹隘了直角的觀念，會誤導學生垂直置放的 $90^\circ$ 角才是直角；新加坡以一張紙對摺兩次的方式，廣義地定義直角的觀念，而且會將直角斜置。兩國鋪陳直角的觀念後，台灣進而教導學生認識鈍角和銳角，而新加坡只有介紹比直角大的角與比直角小的角，卻沒有進一步給予命名，之後在三角形分類時，才介紹銳角三角形、鈍角三角形（因為 *acute* 是形容詞，只用在 *acute triangle*，英文中無銳角之名詞）。

##### ● 量角器的鋪陳

台灣以螺旋的方式將量角器概念鋪陳於兩學年中，而新加坡有系統地以一學年教導完成。其中台灣以從左到右，或從右到左的方式介紹量角器上 0 到 180 的角度；新加坡則教導以內刻度和外刻度量測角度，以量角器的外觀而言，以內外刻度的說明方式較為直觀。特別之處，在初次建構角度大小的概念時，

新加坡先讓學生用眼睛猜測一個角大約的度數，之後才讓學生用量角器量出正確的角度大小，進而比較兩者的度數差距，如此的教材設計能培養學生的量感，是值得台灣教材學習之處。

### ● 三角形面積

台灣分別於五、六、七三個年級介紹三角形面積的內容，新加坡則分述於五年級與七年級。台灣五年級教導學生將 1 個三角形透過切割、拼湊成長方形或正方形，並數算方格紙上的面積，在此未引出面積的公式；六年級讓學生把兩個相同的三角形翻轉，拼成一個平行四邊形或正方形，進而導出三角形面積的公式，七年級則再次簡述三角形面積的內容。新加坡五年級同樣藉由方格紙的輔助，讓學生直接計算出直角三角形的面積，接著都將三角形切割成直角三角形的形式，從中歸納出三角形面積公式。

台灣以圖形拼湊的方式讓學生了解長方形、平行四邊形和三角形之間的面積關係，直接以圖像的概念著手，而新加坡以抽象的三角形面積變動關係導出公式，訓練學生進行圖形的翻轉、平移、旋轉等能力，有助於幾何知識的學習，建議台灣能增加學生結構模型上的思維訓練。

### ● 比與比值

兩國在比與比值的單元中，皆強調比的意義及最簡單的整數比。在介紹相等的比時，台灣以比值相等的方式，讓學生理解相等的比的概念，而新加坡將比與比值視為同樣的概念。此外，新加坡的教材直接說明兩個量之間的關係，經過變動後會產生另一種關係，並進一步將兩個量增加成三個量，探討產生變動的前後比例關係，此為台灣教材未提及的內容。新加坡藉由生活化的例子增加題目的廣度與難度，因此，其單元的內容與鋪陳方式，實能作為我國比與比值教材編寫之參考。

- 圓周率

台灣於五、六年級介紹圓周率的概念，讓學生畫出 1 個直徑 4 公分的圓，實測出圓周的長度，從中發現每個圓的圓周長大約是直徑的 3.14 倍，進而認識圓周率的意義；新加坡讓學生用一條細線量出圓周長，將細線拉直測量發現超過圓直徑的三倍，因此教導學生圓周長除以直徑大於 3，並同時以 3.14 和  $\frac{22}{7}$  兩種形式介紹圓周率的概數。新加坡使用的有理數  $\frac{22}{7}$ ，即是阿基米得的估計，亦是祖沖之的疏率，因此新加坡將歷史融入教材中，是值得台灣學習之處。

特別之處，新加坡於小學階段提出「 $\pi$ 」的抽象記號，讓學生習得以符號代表圓周率，是台灣小學階段沒有提及的。九年一貫提倡學生能運用符號、記號、模型、圖形或其他數學語言、清楚傳達量化、邏輯關係建構等抽象的能力，但對於小六學生提出  $\pi$  的符號是否過於抽象，有賴未來研究者進一步證實。

## (二) 代數

- 函數

台灣於小學六年級倍與比例的單元，隱含函數變動量與比之間的關係，而十年級上學期正式引入函數的定義，為下學期三角函數概念作鋪陳，而新加坡早於小學一年級圖形與樣式的單元，在圖形的對應關係中鋪陳了函數的想法，且在三角比與三角學的單元中皆有函數概念的鋪陳。由於新加坡十年級前尚未教導三角函數的圖形，因此教材的編排無正式定義函數，但已讓學生具備充足的函數先備知識。

- 三角函數

### (1) 三角函數的定義

新加坡將三角函數的相關知識內容分述於八、九、十年級。八年級以相似三角形的課程引入三角比的概念，九年級將三角比與三角學內容做連結；

台灣的教材中也是以三角比開始，但沒有像新加坡給予比值一個特殊的名稱，所有三角內容皆以三角函數的名稱介紹之，如此可能會讓學生對函數的意義產生混搖。

#### (2) 三角比的內容

台灣於十年級下學期教導三角函數的內容，新加坡則早於八年級開始引入三角比的概念。兩國皆以銳角三角比的定義著手，台灣一次介紹六個三角比，而新加坡只定義 sine、cosine 和 tangent 三個三角比，但實際上三個三角比足已解決所有三角的問題。附帶一提，新加坡將  $\tan \theta$  定義成直線的傾斜程度，把斜率的概念直觀地與生活經驗相結合，值得台灣教材編寫之參考。

#### (3) 三角比的範圍

兩國介紹直角三角形的斜邊、鄰邊與對邊後，接著定義銳角的三角比，爾後台灣直接將銳角三角比的概念推廣至廣義角三角比，新加坡則只延伸至鈍角三角比。相較之下，台灣的三角比內容較廣，但實際上我們所探討的三角形內角皆小於  $180^\circ$ ，就此觀點而言，新加坡的教材設計較能符應真實的三角問題。

#### (4) 教材的深淺

台灣十年級鋪陳的三角函數內容較新加坡多且深。台灣定義六個三角比，並推導出六個三角比間的倒數、商數與平方關係，而新加坡教導學生直接由三個基本的三角比解決問題，省略許多複雜的數學式子。而台灣十年級下學期第三章「三角函數的性質與應用」的教材內容，包括三角函數的圖形、和角公式、倍角與半角公式、和、差與積的互化、正餘弦函數之疊合以及反三角函數的基本關係，在新加坡同期教科書中仍未介紹，因此，兩國一到十年級的課程相較之下，台灣的教材內容顯得過於艱深。

### (5) 鋪陳的時程

台灣於十年級下學期，一次鋪陳完成大學以前所有三角函數的內容，新加坡則於八年級開始教導三角比的內容，九年級介紹三角學的相關知識，最後編寫至正弦定理與餘弦定理的內容，且在後續年級繼續教導三角函數的應用，就此發現台灣課程鋪陳顯得太急且太深。

### (6) 電算器的使用

兩國皆有介紹  $30^\circ$ 、 $45^\circ$  和  $60^\circ$  特殊角的三角比值，且台灣的例題設計著重於特殊角的處理。台灣教材中有介紹電算器的使用，但遇到非特殊角的三角函數值時，並沒有讓學生真實操作電算器，而是教導以查表法或內差法解決問題，著重學生的計算能力；而新加坡的例題設計不只著重於特殊角的練習，鼓勵學生利用計算器計算銳角的三角比。新加坡真正將資訊教育融入教學中，讓學生從習題中發現  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  值永遠不大於 1，而  $\tan \theta$  值可以為任意數的概念，激發學生觀察與思考的能力。因此建議台灣在強調學生演算能力的同時，亦能讓學生藉由真實操作中發覺數學間的關係與結果，而非只是形式化地學習教材的知識內容。

## (三) 圖形與幾何

### ● 三角形

#### (1) 三角形的認識

兩國皆於小學一年級引入三角形的概念。台灣先讓學生觀察三角形、正方形、圓形和長方形等圖形，接著依形狀將之進行分類並給予命名，此方式較符合小學生知識建構的程序；新加坡則畫出一個正三角形的圖形，將此種形狀的圖形為三角形，進而能區別圖形的不同。相較之下，台灣對於三角形樣式的介紹較為具體。

## (2) 三角形內角和的介紹

兩國首先皆是將三角形的三個角拼在一起，發現它們的邊會形成一直線，而台灣藉由 2 個直角拼在一起也是一直線，說明三角形的內角和是  $180^\circ$ ；新加坡則是先介紹落於一直線上角的和是  $180^\circ$ ，進而讓學生推知三角形內角和的度數。台灣以直角的先備知識鋪陳平角的初步經驗，而新加坡直接介紹落於一直線角的和是  $180^\circ$  及交於一點上角的和是  $360^\circ$ ，直接引出平角和周角的概念。

### ● 畢氏定理

兩國皆於八年級教導畢氏定理的內容，為直角三角形邊長的關係作鋪陳。台灣以「任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方」說明畢氏定理，接續教導學生「任意一個直角三角形，其兩股上兩個正方形面積的和，等於斜邊上正方形的面積」；新加坡直接將畢氏定理定義為台灣後者之敘述，讓學生從活動中發現三邊上正方形的面積關係。台灣先以代數的觀點切入畢氏定理，進而以幾何的方式展示畢氏定理的證明；新加坡則先從幾何概念定義畢氏定理，接著讓學生熟悉代數上的計算。

特別之處，新加坡在介紹畢氏定理的同時，亦說明一個邊長為  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的三角形中，如果  $a^2 = b^2 + c^2$ ，則相對於  $a$  對的邊是為直角，畢氏定理的逆定理亦是成立的，讓學生了解畢氏定理是若且為若的概念，能以更廣的面向了解直角三角形與邊長之間的關係，是值得台灣參考之處。

### ● 方位

兩國皆於小學四年級教導方位的概念。台灣四年級藉由真實情境，教導學生認識東、西、南、北的方位，更進一步教導東北方、東南方、西北方以及西南方等八方位，於七年級介紹以坐標平面來標定點的位置；新加坡小學四年級則簡單地介紹東、西、南、北四個方位，並將之與旋轉的概念結合，具體

的讓學生體驗面對南方時順時針轉 $\frac{3}{4}$ 圈的意義，進而在五年級教導羅盤上的八個方位，讓學生習得北東方、北西方、南東方和南西方的角。九年級則引入方向角的概念，同樣以旋轉的觀點讓學生了解八方位間角度的關係。兩國在八方位的命名上有所不同，且台灣將方位侷限於兩個參考點間的相對位置關係，而新加坡則以螺旋式的鋪陳方位的內容，並以參考點旋轉的想法，將方位與旋轉的概念結合，因此建議台灣能將旋轉量、位置與距離的概念作全盤的連結，以擴充方位的面向。

#### 4.4 佈題背景與問題情境之評析

本節針對台灣與新加坡教材。本節分為兩個部份，一是探討台灣與新加坡教材佈題背景，二是分析兩國教材設計的問題情境，分述如下。

##### 4.4.1 佈題背景

依據台灣與新加坡一到十年級的教科書內容，在教材設計所採用的佈題背景及輔助實物進行探討。兩國小學階段的教科書較強調背景的設計，七到十年級皆以程序性的知識介紹為主，缺乏情境的鋪陳與營造，因此，以下的分析將著重於小學階段的教材內容。

##### (一) 台灣教科書

南一版小學教科書的佈置背景大多以學校為主，出現的場域包括校舍、教室、文化中心的兒童畫展、農會、圓環、郵局、銀行、噴水池以及籃球場等，著重與學生的生活經驗結合。

教材中的實物以三角形、正方形、圓形的圖片、扇子、鐘面上的秒針、黑板、布告欄、指北針、颱風的天氣預報圖、黃色黏土與橘色黏土、好兒童章與榮譽卡、自然課的滑輪組、紅茶與鮮奶、萊姆酒和汽水、美金與日幣、童話書、白色水彩與藍色水彩等。

## (二) 新加坡教科書

新加坡教科書沒有強調編寫的佈題背景，但提及的場域有圖書館、游泳池、機場、籃球場、地下鐵、餐廳、花園及遊樂場。但在概念介紹與例題編制中，輔以圖片或插畫說明之，將生活中常見的實物呈現在教材中，包括三角形的方巾，正方形的磁碟片、相框與信封，長方形的巧克力和水彩盒和圓形的盤子、足球場的發球區、輪子、屋頂、桌子、號誌牌和天平、巧克力馬芬與藍莓馬芬、雞蛋和鵪鶉蛋、2 公斤雞肉和 9 公斤羊肉、紅蘋果和綠蘋果、動物園中雞和鴨等。

## (三) 綜合分析

九年一貫課程綱要強調培養兒童分析資料的能力，讓學生能從教材的情境中，了解課程所要傳授的知識脈絡，且依循習題的設計，擷取更多的相關內容，由此可知佈題背景對學生學習的影響。整體而言，台灣的場景設計相當豐富，有助於低年級學生的學習，然而，新加坡教材較缺乏情境的安排，因此，我國的佈題背景較具連貫性與真實性。就有佈題的單元而言，台灣的情境大多以學校為主，較能與學生的生活環境相連結，而新加坡不強調發生在校園中，但相對佈題範圍較為廣泛。因此，建議台灣可依據學生的年齡發展，給予不同層次的佈題設計。

附帶一提之處，在五年級比與比值的單元中，台灣教材以毫公升、公畝為單位上，學生能藉此了解單位的多樣性，但較無法具有真實量化的感覺，新加坡教材皆以一顆蘋果與一個巧克力蛋糕為單位，讓學生能以真實經驗體會與感受。

### 4.4.2 問題情境

本節將三角函數的問題情境分為真實情境、虛擬情境與無情境，在以下的分析中，把教材的真實情境與虛擬情境皆視為有情境，將與無情境的部份比較之。本研究針對台灣十年級的三角函數單元，與新加坡三角比、三角學的內容進行計數，目的是能將教材內的每個例題的情境比例量化，但不把台灣的隨堂練習題目，以及兩國每節後編制的習題列入計數的範圍。

### (一) 台灣教科書

從總題數來看，南一數學在三角函數的基本概念中，共有 41 題，有情境佔 19.5%，無情境佔 80.5%；在三角函數的性質與應用中，共有 32 題，有情境佔 3.1%，無情境佔 96.9%。九年一貫培養學生具有流利的基礎運算和推演能力，以及對數學概念的理解，進而懂得利用推論解決數學問題，由此可知，台灣教材強調學生基本的演算能力，讓學生能熟悉三角函數的運算技術，進而能解決生活中的三角問題。

### (二) 新加坡教科書

從總題數來看，新加坡數學在三角學，共有31題，有情境佔29%，無情境佔71%；在三角學中，共有28題，有情境佔14.3%，無情境佔85.7%。新加坡教學大綱中提及，問題解決的能力關係著態度、技能、觀念、程序和後設認知五個面向，因此在高中階段仍強調學生的基本解題技能，以幫助學生執行解題計畫中所需的演算。

### (三) 綜合比較

以總題數而言，台灣三角函數內容共 73 題，新加坡三角內容共 59 題，相較之下，台灣的題數較多。以情境分析，新加坡有情境的比例較台灣高，但事實上，兩國皆有相當大的比例將數學問題置於無情境下的學習，在培養學生具備概念理解能力的同時，也強調基本計算的重要性。

### (四) 小結

翁秉仁教授《數學教育與騎腳踏車》一文中提及，想要讓孩子建立完全的數字感，我們需要體認到這些對象的存在（抽象性）、分際（嚴格性）與關係（連結性）。這個任務只有靠各種計算的練習與應用，才能慢慢建立，也由於計算的對象與過程本身是抽象的，所以才能讓數的「自主性」慢慢浮現。精確的計算本身是嚴格推理的化身，因此我們才能談正確的解，與適用的估算；而計算也讓我

們能連結各類數、連結形的性質與數的性質。因此說明計算能力是數學教育中關鍵的一環，同時佐證兩國在程序性練習比重的合理性，讓學生透過練習中建立概念，掌握數學的抽象性、嚴格性並將知識做有系統的連貫。

## 第 5 章 結論與建議

本研究旨在探討三角函數之相關課題及先備知識，評估由國小至高中數學領域教科書的連貫性與合宜性，並與新加坡教科書作跨國比較。依據兩國之數學教學目標、一到十年級的教材鋪陳、佈題背景與問題情境進行比較與分析，將教材特色的發現、結論與建議，分述如下。

### 5.1 兩國教材特色之發現

本研究結果有以下歸納：

#### (1) 數學量感的培養

整體而言，新加坡從教材中皆可看出量感的培養，讓學生藉由生活經驗猜測真實量的大小，再透過實際測量比較之，如此能強化學生量感的認識。雖然台灣國民小學第一階段的目標強調數、形、量的認知，讓學生可以依賴幾何經驗與身體體驗量的知覺，但在教材編排中沒有強調量的估計能力，此為新加坡較特別之處。

#### (2) 習題編制的設計

觀看新加坡的解題具有三個層次，包括基本例行、非例行以及開放的問題。小學教材每章最後設計挑戰題，訓練小學生想像與思考的能力；中學之後更為明顯，課後練習編製極具趣味的數學題與困難的例題，提供能力較高的學生更多的思考空間與訓練，但此部份內容不列為考試的範圍。相較之下，台灣的教材略為保守，在課本的例題與隨堂練習中以基礎的訓練為主，課後習題編排較為非例行性的問題，但開放的問題大多設計在仿間的參考書或資優練習中。據此特點，新加坡的習題編製較能啟發各個層次學生的學習能力，這是值得台灣教材學習的地方。

### (3) 落實科技、實際應用於教學

台灣九年一貫課程目標中提及科技與資訊的運用，希望能藉此提升學習效率與生活品質；高中暫行綱要指出教師應以電腦協助課程的進行，讓學生的學習更爲多元。新加坡政府於 1997 年與 2002 年推出資訊技術融入教育的規劃，希望能實行電腦輔助教學，從新加坡的教材可以發現，在數學課程的規劃中確實地將電腦與計算器融入教學，讓孩子運用電腦完成回家作業、利用電算器的操作學習數學的概念，且在 GCE 的考試中允許攜帶電算器入場應考。相較之下，新加坡實際將科技應用於教學，此爲台灣的教材中較爲少見。

## 5.2 兩國教材的結論與建議

### 5.2.1 結論

根據研究目的與研究問題，本研究結論可分爲三個部分敘述之。

#### (1) 先備知識的完備性

台灣九年一貫的教材設計與新加坡相較之下堪稱完備，且在學習三角函數之前鋪陳足夠的先備知識。台灣教材包含三角形、角與直角、比與比值、圓周率、相似三角形、坐標平面與畢氏定理，皆編排相當大量的內容與概念。台灣一到十年級的教科書份量較新加坡多且深，因此建議台灣能增加教學時數，讓每個數學環節的學習，皆能有充足的時間奠定良好的基礎。

#### (2) 教材編寫的連貫性

台灣小學二年級的教科書中，在三角函數相關課題與先備知識上空了一年，而新加坡在十個年級中持續發展相關的知識與概念，因此就整體而言，新加坡教科書編寫較具連貫性。值得一提，新加坡將基本的三角比與三角學內容提早放入國中階段，讓學生能慢慢熟悉教材內容，讓學生進入三角函數的學習得以順利銜接，反觀台灣九年一貫數學科正式綱要，將三角函數從國中教科書刪除，造成國中與高中課程內容上的落差，因此新加坡整體的教材設計是值得九十八學年度高中課程綱要修訂之參考。

### (3) 三角函數教材的設計

台灣與新加坡十年級學生比較，從課程目標或是教材內容的分析，我國高一學生所學的三角函數課題較深且較多。台灣於高中一個學期內鋪陳完成所有大學以前三角函數的內容，在教材的編排上顯得相當緊湊，突顯新加坡三角函數教學時程的合宜性，將內容採螺旋式的編排加深、加廣在多個年級中，讓學生能以循序漸進的方式建構三角函數的知識內容。

## 5.2.2 建議

本研究賴於教科書版本與資料完整性之考量，選取台灣小學至高中階段結構性完整的一套教科書，以及新加坡廣用的版本的教科書進行分析。受限於人力、物力等因素，無法綜觀各版本的教科書內容，但同時輔以兩國相關的官方網站與民間報告書，但仍希望能提供課程設計者與未來研究者一些參考的方向。

### (1) 課程設計者

#### 1. 拉長三角函數的教學時程

台灣將所有三角函數課程內容編排在十年級下學期，新加坡將三角的內容鋪陳在八至十二年級中，因此台灣在時程的設計上顯得過於倉促。同時，在三角函數的內容上，台灣十年級的教材比起新加坡卻又困難許多，如此的教材設計，使得台灣學生在學習上是較具負擔且沉重的。因此建議台灣能學習新加坡的教材設計方式，以多個學期介紹三角函數的內容，拉長整個概念建構的時程，使學生的學習能發揮最大的成效。

#### 2. 改進佈題背景

整體而言，台灣教材在每個單元的設計上都涵蓋了許多的佈題背景，但是大多以特定的地點為主，比起新加坡較缺乏多樣性。我們建議台灣在佈題的設計上，能依據學生的年齡發展設計不同層次的場域，讓學生能藉由教材拓展學習的視野，將生活情境與教材互相連結。

### 3. 落實資訊與數學之結合

兩國課本例題的設計皆強調程序性的知識，讓學生熟練數學的計算能力，除此之外，新加坡還著重將科技融入教材，讓學生能輔以電腦與計算器解決問題，在培養學生純熟計算能力的同時，更教導學生能藉由輔助的工具，自行驗證答案的合理性。因此建議台灣亦能讓學生應用計算器或電腦解決問題，增廣學習的視野。

#### (2) 未來研究者

##### 1. 以三角函數問卷進行調查

目前 (95 年) 高中與九年一貫的數學綱要確實有銜接落差的擔憂，因此建議未來研究者能以問卷調查的方式，深入探討高一學生三角函數的學習成效。問卷內容可以包括兩部分，一是對高中教師進行質性訪談，二是選定足夠數量的高一班級進行量化的測驗。在質性訪談中，就高中教師對於三角函數課題教科書的編排意見，以及目前使用銜接教材學生之學習狀況進行探討；在量化研究中，針對高一學生進行前測與後測的兩次試卷測驗，以便了解學生學習三角函數課題前的先備知識架構，並透過教學現場的真實資料探知學生的學習情況。

##### 2. 擴大比較對象、縮小研究範圍

探討各國版本對於數學教學目標、知識鋪陳方式、佈題背景與問題情境進行分析，有助於了解各國對數學知識的設計理念與重視程度。同時，建議將數學知識範圍再縮小，如細部探討廣義角三角函數的鋪陳，或是基本三角測量的問題情境等，將可得以更深入的分析。

## 參考書目

### 中文部分

- 丁爾升 (2001)。《面向新世界的數學教育》。中國教育和科研計算機網。  
<http://www.edu.cn/20010823/208280.shtml> (2006,6,10 search)
- 王文科 (1993)。《教育研究法》。台北：五南書局。
- 朱建正 (2005)。《國民中學數學》。台南：翰林書局。
- 吳德邦、林彰德 (2004)。《國小數學國民各版第一冊教科書「圖形與空間」教材的探討》。國教輔導第 36 卷第 1 期。
- 吳麗玲 (2005)。《台灣、美國與新加坡國小五、六年級分數教材內容之分析比較》。嘉義大學數學教育所碩士班論文。
- 李恭晴 (2005)。《國民小學數學》。台南：翰林書局。
- 李虎雄 (2004)。《高級中學學數學》。台中：康熙圖書網路股份有限公司。
- 余文卿 (2005)。《高級中學數學》。台北：龍騰出版社。
- 林清江 (1998)。《比較教育》。台北：五南圖書。
- 林福來 (2003)。《高級中學數學》。台北：南一書局。
- 香港大學 (1999)。《亞洲及西方各主要國家及地區的數學課程比較研究》。教育署委託香港大學研究。
- 香港大學 (1999)。《各界人士對數學課程觀感的分析》。教育署委託香港大學研究。
- 香港大學 (2001)。《數學課程全面檢討報告》。教育署委託香港大學研究。
- 洪雯柔 (2000)。《貝瑞岱比較教育研究法》。台北：揚智文化。
- 洪有情 (2001)。《國民中學數學》。台北：康軒書局。
- 施盈蘭 (1994)。《五專生的三角函數學習現象》。國立師範大學數學系碩士論文。
- 翁婉珣 (2004)。《台灣與新加坡之十二年數學課程比較》。中央大學數學所碩士班論文。

- 翁秉仁（2003）。《數學教育與騎腳踏車》。國北師教育論壇。
- 張英傑（2005）。《國民小學數學》。台北：南一書局。
- 國立中正大學數學系（2005）。《九年一貫數學學習領域九十四學年度銜接高中課程教材》。
- <http://www.math.ccu.edu.tw/chinese/94study/20050526> (2006, 6, 10 search)
- 教育部（2000）。《國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域》。
- [http://www.nkes.tyc.edu.tw/~teach/9years/9Y\\_02.HTM](http://www.nkes.tyc.edu.tw/~teach/9years/9Y_02.HTM) (2006, 6, 10 search)
- 教育部中等教育司（1990）。《高級中學數學科課程標準》。
- <http://www.ylsh.mlc.edu.tw/~teach/course/> (2006, 6, 10 search)
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛（2005）。《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》。台北：教育部。
- 陳忠雄（2002）。《高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究》。高雄師範大學數學系教學所碩士班論文。
- 黃光雄、蔡清田（1990）。《課程設計 理論與實際》。台北：五南書局。
- 黃光雄、簡茂發（1998）。《教育研究法》。台北：師大書苑。
- 黃純杏（2001）。《高中學生廣義角的三角函數運算錯誤類型之研究》。高雄師範大學數學系教學所碩士論文。
- 楊瑞智（2004）。《國民小學數學》。台北：康軒書局。
- 歐用生（1998）。《課程與教學》。台北：文景出版社。
- 簡志明（2003）。《高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究》。高雄師範大學數學系教學所碩士班論文。
- J .R.Fraenkel & N.E.Wallen（2003）。《教育研究法》。台北：心理出版社。

## 英文部分

Moe of Singapore (2001) . Primary Mathematics Syllabus.

<http://www.moe.gov.sg/cpdd/syllabuses.htm#SCIENCES> (2006, 6, 10 search)

Kheong, F. H. , Ramakrishnan, C. and Soon, G. K (2003) . *My Pals are Here ! Maths*. Singapore : Times Media.

Yee, L. P. and Huo, F. L. (1982) . *New Syllabus Mathematics* : Shinglee.

National Council of Teachers of Mathematics (2000) . *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA : Author.

## 附錄一 Trends in Mathematics and Science Study

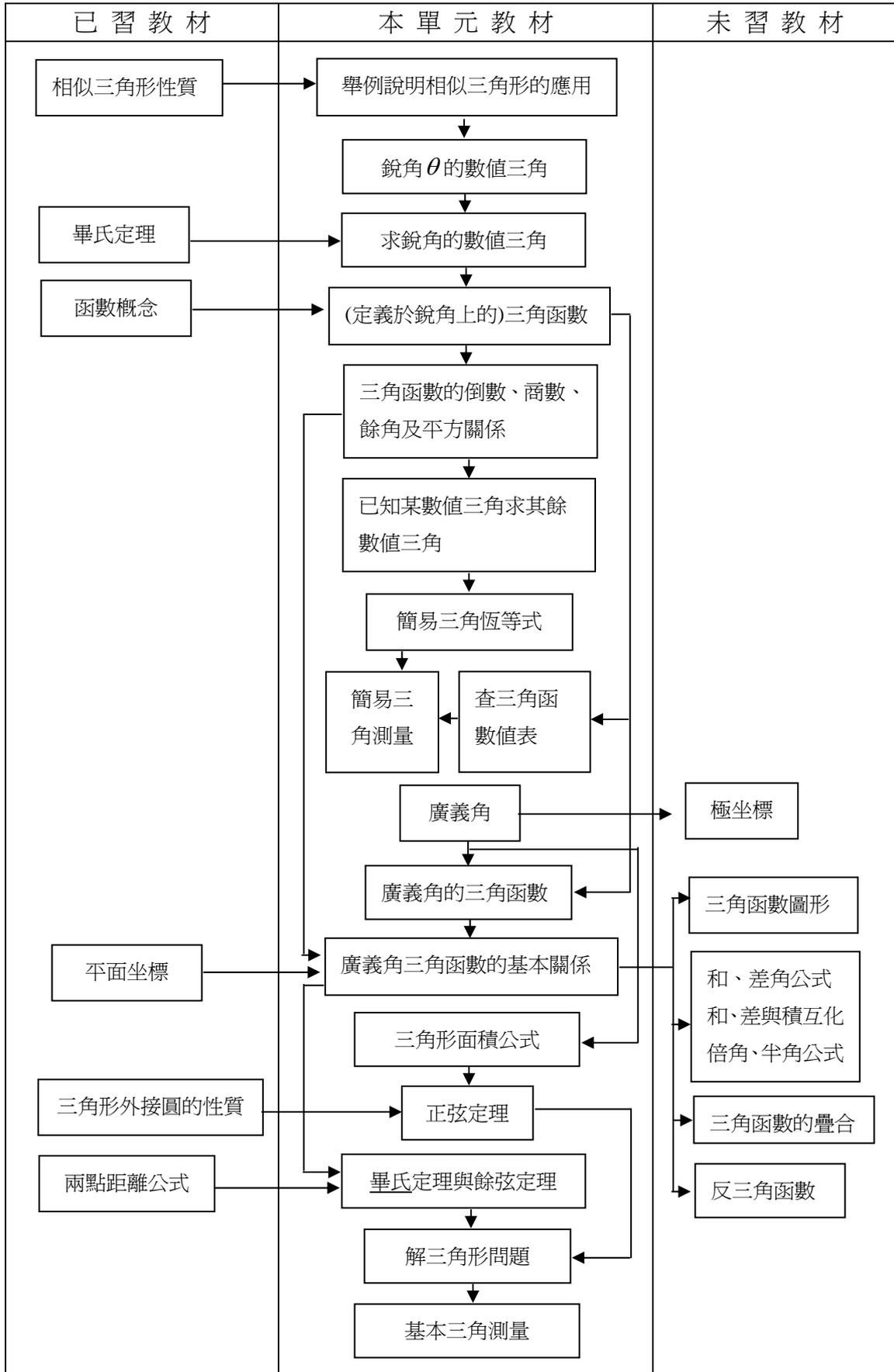
TIMSS 原本的意思是第三屆國際數學與科學調查 (Third International Mathematics and Science Study)，由總部設在荷蘭的國際教育成就調查協會 (IEA: International Association for the Evaluation of Educational Achievement) 主持及贊助，且於 1995 年舉行。全球四十多個國家（橫跨三十多種文字）約五十萬名四年級和八年級學生、教師和研究人員參與此案。除了數學和科學的內容評量之外，還對師生進行意見調查，並先後在十個國家錄製了近七百堂數學課的教室實況；從抽樣、翻譯、編碼到評分，都採用了複雜而盡可能精確的統計方法，堪稱史上規模和野心都最大的國際教育評比。四年之後的 1999 做了重複或追蹤調查，稱為 TIMSS-R (R 代表 Repeat)。因為 TIMSS 的成功和國際教育社群的支持，IEA 將它改名為國際數學與科學趨勢調查 (Trends in Mathematics and Science Study)，在 2003 年舉辦的就稱為 TIMSS 2003，台灣即是從 TIMSS-R 開始加入此國際調查，由國科會贊助研究經費，而 TIMSS 2007 已經在準備之中 (單維彰，2006)。

TIMSS 2003 四年級與八年級數學成績評比

名次	國家 (四年級成績)	國家 (八年級成績)
1	新加坡 (594)	新加坡 (605)
2	香港 (575)	韓國 (589)
3	日本 (565)	香港 (586)
4	台灣 (564)	台灣 (585)
5	比利時 (551)	日本 (570)
6	荷蘭 (540)	比利時 (537)
7	拉脫維亞 (536)	荷蘭 (536)
8	立陶宛 (534)	愛沙尼亞 (531)
9	俄羅斯 (532)	匈牙利 (529)
10	英國 (531)	馬來西亞 (508)
11	匈牙利 (529)	拉脫維亞 (508)
12	美國 (529)	俄羅斯 (508)

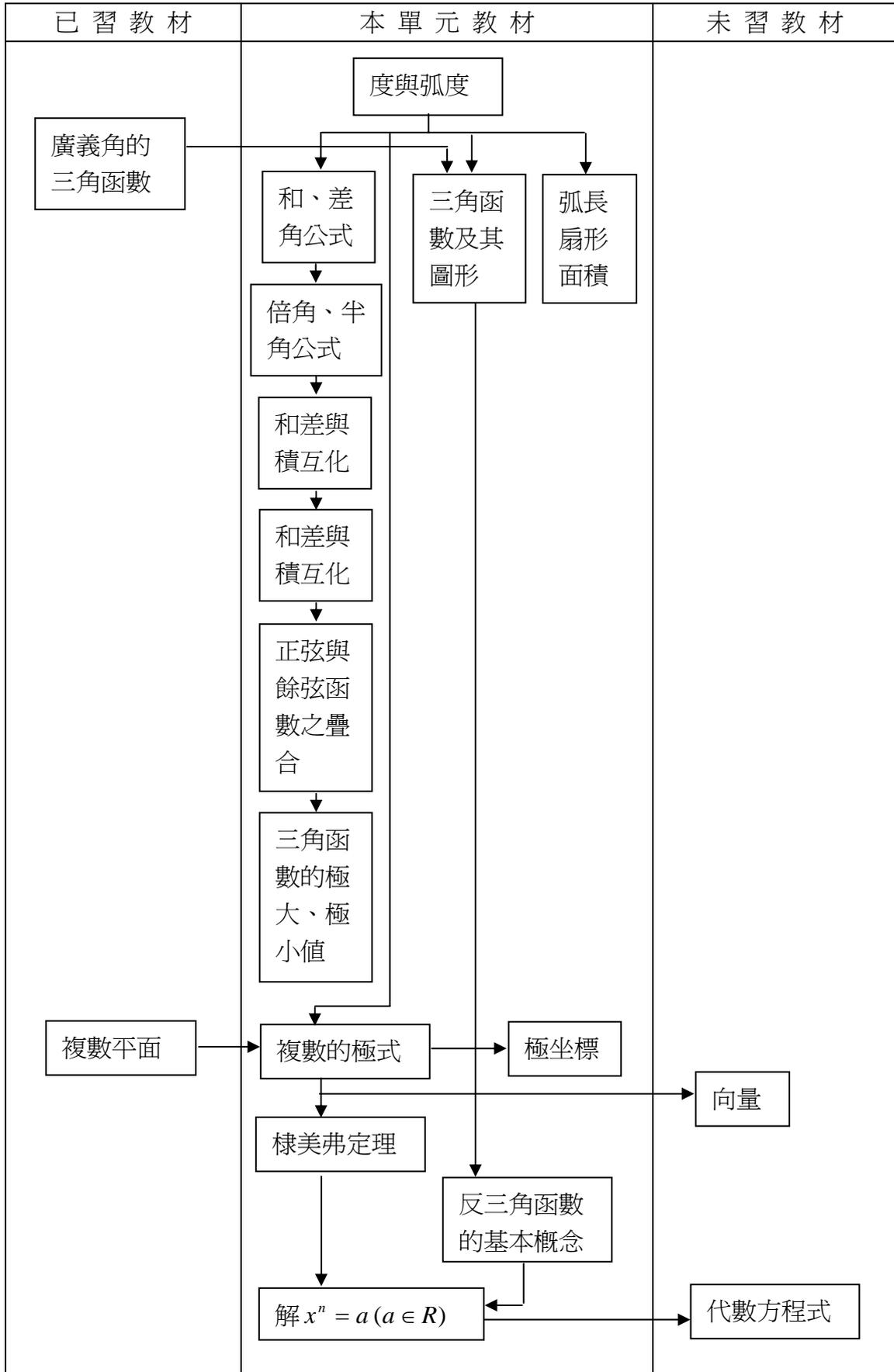
資料來源 <http://timss.bc.edu/timss2003i/mathD.html>

附錄二：三角函數的基本概念



資料來源 台灣南一高中教師手冊

附錄三：三角函數的性質與應用



資料來源 台灣南一高中教師手冊