

國立中央大學

數學系

碩士論文

八年級機率新課程：設計與實踐

New Probability Curriculum for the Eighth Grade:
Design and Practice

研究生：許芷雲

指導教授：單維彰

中華民國 108 年 6 月



國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(104 年 5 月最新修正版)

本授權書授權本人撰寫之碩/博士學位論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註 1 說明)，在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。(以下請擇一勾選)

- () 同意 (立即開放)
() 同意 (請於西元 2020 年 12 月 31 日開放)
() 不同意，原因是：_____

在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

- () 同意 (立即開放)
() 同意 (請於西元 2020 年 12 月 31 日開放)
() 不同意，原因是：_____

以非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統圖書館與國家圖書館，基於推動「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名： 許芷雲 學號： 105221022

論文名稱： 17年級機率新課程：設計與實踐

指導教授姓名： 單維彰

系所： 數學 所 博士班 碩士班

填單日期： 2019/6/18

備註：

1. 本授權書之授權範圍僅限電子檔，紙本論文部分依著作權法第 15 條第 3 款之規定，採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽，如您有申請專利或投稿等考量，不同意紙本上架陳列，須另行加填申請書，詳細說明與紙本申請書下載請至本館數位博碩論文網頁。
2. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應遵守著作權法規定。

編號：

國立中央大學暨國家圖書館博碩士學位紙本論文【延後公開】申請書
Application for delayed public release of thesis/dissertation

申請日期：2019 / 6 / 18
Application Date (YYYY/MM/DD)

2018.9.1 版

申請人姓名 Applicant	許芷雲	畢業年月 Graduation Date (YYYY/MM)	2019 / 6
系所名稱 Schools or Departments	數學系碩士班	學位類別 Graduate Degree	<input checked="" type="checkbox"/> 碩士 Master <input type="checkbox"/> 博士 Doctor
論文名稱 Thesis/Dissertation Title	17年級機率新課程：設計與實踐		
延後原因 Reason for delay	<input type="checkbox"/> 已申請專利並檢附證明，專利申請案號： Filing for patent registration. Registration number: _____ <input type="checkbox"/> 準備以上列論文投稿期刊 Submission for publication <input type="checkbox"/> 涉商業機密 Business confidentiality <input checked="" type="checkbox"/> 後續研究需要 Follow-up research needed	公開日期 Delayed Until	2020 / 12 / 31 (YYYY / MM / DD) (依教育部來函，延後公開最多5年) (The delay should be a reasonable period of no more than 5 years)

申請人簽名：許芷雲
Applicant Signature

研究所所長簽名：(可免填 Optional)
Dean of Graduate School Signature

指導教授簽名：單位
Advisor Signature

學校圖書館章戳：(可免填 Optional)
University Library Seal

系所章戳：
Schools or Department Seal



【說明】

1. 以上表格依國家圖書館來函辦理，所有欄位請據實填寫，缺項或簽章不全，恕不受理。
2. 本申請書請裝訂於論文電子授權之次頁。
3. 依「教育部100年7月1日臺高(二)字第1000108377號函文」，延後公開須訂定合理期限，請依實際需求設定延後公開日期，自申請日期起算至多5年，若超過5年或未填寫延後公開日期，將逕以函定5年辦理。

【Notes】

1. Please fill in all blanks. The application form will not be accepted for processing until all information, signatures, and stamps are included.
2. Please attach this form right after the electronic authorization page when submitting your thesis/dissertation.
3. Following the instructions from the Ministry of Education, the delay should be a reasonable period of no more than 5 years. If the applicant fills in a date that creates a period longer than 5 years, the delayed period for public viewing period will be fixed at 5 years.

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

數學 學系/研究所 許芷雲 研究生所提之論

文 17年級機率新課程：設計與實踐

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 單維彰 (簽章)

108年3月11日

國立中央大學碩士班研究生
論文口試委員審定書

數學 學系/研究所 許芷雲 研究生

所提之論文

17年級機率新課程：設計與實踐

經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人

林原宏

委

員

袁媛

單維彰

中華民國 108 年 4 月 8 日

八年級機率新課程：設計與實踐

摘要

臺灣的現階段機率課程由九年級才開始，相較於他國時程明顯晚了許多，此現象即為本研究發展之緣由：在八年級設計全新的機率課程，並實驗其教學成效。在數學教育研究的方法論上，引進法國新興教學理論：教學工法（Didactic Engineering, DE）以設計機率課程和教材，達到理論與實務之實踐。故本研究將兼具三面向：一、DE 的實踐：課程發展四階段的工法；二、樹狀圖：以圖象表徵處理機率運算；三、數學素養：培養機率思維與解決問題。

機率實驗課程採用研究團隊之自編教材，將樹狀圖設計為一致性的機率學習工具，引導八年級學生發展主觀機率、頻率機率、古典機率的觀念，並達到處理餘事件的思維層次，也發展了解決生活實際問題之素養。並以 DE 從事教學設計與課堂實踐的規準。雖然事前準備工作繁雜，但它能避免研究困境，以及提高學生的課堂參與率。

研究發現，未經過機率教學的學生，已具有部分機率值的範圍、主觀機率、頻率機率、古典機率的自發性概念，猜測學生可以從生活經驗中習得機率概念，可見機率與生活經驗之密切相關性。而經過研究團隊的機率教學後，發現八年級學生在學後測驗的成績上有成長，表示學生需要一套有系統的機率教學，且少數學生甚至能延伸至獨立性與乘法原理的思維層次，也有少數學生隱約表露出條件機率的觀念。

另一方面，在學生的文本中，本研究亦認出學生的機率與樹狀圖迷思：（1）理想值的概念，（2）樣本空間分群，（3）樹狀圖的分類，（4）不對稱事件的機率值，（5）加法原理與乘法原理。不過，在機率課程結束後六個月進行的延後測驗，發現學生成績相較於機率學後測驗，呈現小幅進步，表示本研究的機率教學，能使學生成功地習得機率課程的教學目標，成為其素養。

綜上所述，本研究建議機率主題可提前至八年級學習，以生活經驗作為內容主軸，並以樹狀圖為解題之技術工具。對於九年級的機率課程，建議以樹狀圖之圖形特徵導入互斥和事件、獨立性以及乘法原理的觀念。而 DE 確實提供一套從事數學教育研究的方法

法論，特別是針對創新的實驗性課程。本研究也歸納出幾項在使用 DE 上的難處，將提供給未來以 DE 從事教學設計的教育同仁參考。

關鍵字：機率課程、八年級、主觀機率、頻率機率、古典機率、餘事件、樹狀圖、教學工法

New Probability Curriculum for the Eighth Grade: Design and Practice

Abstract

Currently, the probability curriculum of Taiwan has only been officially implemented since the ninth grade. Compared with other countries, our curriculum is obviously very late. This phenomenon is the motivation for this study, and it is necessary to redesign the new probability curriculum of the eighth grade and practice it. On the methodology of mathematics education research, this study uses the French teaching theory Didactic Engineering (DE) to design the probability curriculum and materials to achieve the theory and practice. The study will realize the following ideologies. (1) Practice of DE: Four stages of curriculum development. (2) Tree diagram: Using Graph representation to deal with the probability problems. (3) Mathematics literacy: Cultivate probabilistic concepts and problem solving.

The curriculum of this study used the teaching materials designed by our team. The core feature of our method is the role of tree diagram as a consistent probability learning tool for developing concepts of subjective probability, frequentist probability and classical probability. Students reach the level of dealing with the complementary events, and developing a literacy to solve practical problems in life. Also, using DE as a set of methodology for this study, it provides the discipline of instructional design and classroom practice. Although it takes a lot of time to prepare for the materials, it can prevent the research failure and develop the students' participation in the curriculum.

The study found that students who were not taught the probability curriculum, have already contained the spontaneous concept of range of probability values, subjective probability, frequentist probability, and classical probability. The researcher speculated that students might learn the concept of probability from daily experience. After our probability curriculum, it was found that the eighth-grade students had a growth in the post-study test, indicating that students need a systematic teaching of probability, and a few students can even extend to the concept of independence and multiplication, and few students vaguely revealed the concept of conditional probability.

On the other hand, in the students' writings, this study identifies students' myths of probability and tree diagram. (1) The concept of ideal value. (2) The sort of sample space. (3) Classification

of tree diagram. (4) Probability value of asymmetric events (5) Adding principle and multiplication principle. However, six months later of the probability curriculum, the postponement test was conducted. Compared to the probationary post-test, the students' grades showed a slight improvement indicating that the probability curriculum of the study was quite successful.

In summary, this study suggests that the probability subject can be moved ahead to the eighth-grade, with daily experience as the main content of probability curriculum, and tree diagram as the technical tool for solving the problem. As for the ninth-grade probability curriculum, it may include the concepts of exclusion-or events, independence, and multiplication principle. This study also shows that DE really provides a methodology for mathematics education, especially for the innovation of experimental courses. This study also summarized several difficulties in using DE. It will provide as a reference for educational colleagues who are going to engage in teaching design in the future.

Key words : probability curriculum, eighth grade, subjective probability, frequentist -
probabaility, classical probabaility, complement events, tree diagram, didactic
engineering

致謝辭

一篇論文從無到有的產生，絕非容易。首先，感謝指導教授-單維彰老師和博士班-許哲毓博士候選人在我撰寫論文過程中給予我許多的指導，從鬆散的文字到一個完整的小段落，再組織成一篇架構完整的論文，也看到自己在寫作上的成長，雖然在這方面，仍有很大的進步空間。並且在我提出很多關於機率課程與桌遊的想法時，給予我很大的支持與回饋，讓我能夠在數學教學上有所精進，對於數學教學的想法也更加多元。

其次，從決定入班實驗到開始聯絡進班事宜，非常感謝陳國坤主任從中給我們的協助，感謝王派峰老師和楊岱欣老師在課堂上給予我們的回饋與建議，讓我們的實驗過程得以順利進行。還記得當初在編製教材時，每天都在生活中找尋機率的題材，身邊的朋友都笑說我機率中毒，但也很感謝身邊好友給予我的很多想法，例如：生活情境中的機率以及曾經學習機率的困難處，讓我在研究上能夠更加地全面。再次感謝許哲毓學長，非常佩服他多才多藝的繪畫技巧，讓許氏機率這本書看起來更加地精美，也讓學生在閱讀這本書時能夠更加地投入在其中。而在機率課程中，最需要感謝的莫過於接受機率實驗教學的四個班級學生，他們總是很享受在我們的機率課程中，不僅僅對於許氏機率給予很踴躍的回饋，也給予身為授課教師的我們莫大的支持，讓我們在最後能夠豐收如此甘甜的果實。

然而，在這背後支持我一切，給我滿滿力量的家人，是我無法用言語表達完所有感謝的。從我決定念研究所、開始機率教學實驗，到口試的準備等，我的家人總是當我最強而有力的後盾，無論是精神上的支持或是實質上的幫助，總是無微不至，我很感謝我擁有他們的愛，陪伴我一路走到現在。

特別感謝我的論文口試委員-林原宏老師和袁媛老師，在口試上給我的指導，讓我在數學教育的研究上再精進。此外，袁媛老師是我大學教育學程的數學指導老師，謝謝老師在數學教育上教導我許多，讓我規畫機率實驗課程能夠得心應手，也很感謝老師在口試當日能夠蒞臨，見證我的成長與改變。

最後，這篇論文能夠完整地出稿，除了感謝科技部計畫的支持，給予我們研究室極大的肯定，讓我們能夠完成進班實驗。除此，要感謝的人實在太多，對於在我一路上給予我幫助的人，僅能在此再道聲：「謝謝」。然而我們的機率教學並未在此畫上句號，

在臺灣的各個學校，我們仍在努力著，也希望現場的數學校師們能夠給予我們支持。在這邊我要引用吳慷仁在得到戲劇節目男主角獎項時，所說的一句話「也許我們不是最有天分的，但是我們總是可以當最努力的那個人」，與大家共勉之，也期許自己能持續在數學教育這條路上繼續努力，對臺灣數學教育貢獻一己棉薄之力。

許芷雲 謹誌

中華民國 108 年 6 月 24 日

目錄

摘要	I
ABSTRACT	III
致謝辭	V
目錄	VII
表目錄	IX
圖目錄	XI
第一章 緒論	1
第一節 研究動機與背景	1
第二節 研究目的	2
第三節 研究問題	2
第四節 研究限制	3
第五節 名詞釋義	3
第二章 文獻探討	5
第一節 機率概念研究	5
第二節 機率教學	10
第三節 教學工法	13
第三章 研究方法	19
第一節 研究流程	19
第二節 研究對象	19
第三節 機率教學設計方法	21
第四節 機率課程教材設計	23
第五節 不確定性桌遊設計	26
第六節 研究方法與工具	27
第七節 資料收集	42
第八節 資料分析	43
第四章 研究結果	45
第一節 機率教學成效測驗	45
第二節 機率課程內容	68

第三節 學生機率課堂體驗之回饋.....	70
第四節 驗證機率教學.....	71
第五節 教學工法之分享.....	73
第六節 結果討論.....	74
第五章 結論與建議.....	79
第一節 結論.....	79
第二節 建議.....	81
參考文獻.....	85
附錄一. 機率課程教案.....	89
附錄二. 機率測驗試卷（第一次預試）.....	113
附錄三. 機率測驗試卷（第二次預試）.....	115
附錄四. 機率學前測驗.....	117
附錄五. 機率學後測驗.....	119
附錄六. 機率延後測驗.....	121
附錄七. 機率課程回饋單.....	123
附錄八. 學生的回饋.....	125

表目錄

表 1 兒童或青少年的年齡對應各層次的機率概念	8
表 2 南一版七年級生物課本 (民 105)	10
表 3 「不確定性」知識向度各概念細項的定義	29
表 4 「不確定性」認知向度各概念細項的定義	29
表 5 第一次預試試題分析之雙向細目表	30
表 6 第一次預試試題決策表	31
表 7 第二次預試試題分析之雙向細目表	32
表 8 第二次預試試題決策表	33
表 9 第二次預試的機率測驗試卷評分規準表	38
表 10 機率教學成效測驗之描述性統計	45
表 11 相依樣本單因子變異數分析	46
表 12 事後比較檢定	46
表 13 機率測驗—主觀機率的答對率與進步幅度	48
表 14 機率測驗—古典機率的答對率與進步幅度-1	49
表 15 機率測驗—古典機率的答對率與進步幅度-2	50
表 16 機率測驗—頻率機率的答對率與進步幅度	57
表 17 機率測驗—樹狀圖的答對率與進步幅度	59
表 18 書本 P.37 個人丟擲瓶蓋結果的紀錄表格	96
表 19 書本 P.38 小組丟擲瓶蓋結果的紀錄表格	96
表 20 書本 P.38 全班丟擲瓶蓋結果的紀錄表格	96
表 21 某一個班級丟擲瓶蓋的實驗結果	97
表 22 某一個班級操作砸派機的實驗結果	99

圖目錄

圖 1 我國機率課程在國民基本教育階段的發展	9
圖 2 英文教科書 Pearson 版本 Tier 6 P.324 習題	12
圖 3 DE 的發展時程	14
圖 4 Artigue (2009) 區分 DE 四個階段	17
圖 5 研究流程圖	20
圖 6 三階樹狀圖之範例 (南一版)	24
圖 7 學前測驗與學後測驗各題答對人數長條圖	47
圖 8 常見的錯誤答題型態-1	48
圖 9 常見的錯誤答題型態-2	48
圖 10 學生能使用機率語言表達理由	51
圖 11 學生在文字表述上的進步	51
圖 12 學生能使用完整的樹狀圖解決機率問題-1	52
圖 13 學生使用餘事件概念解題	53
圖 14 學生無法根據題意，使用正確的運算符號-1	54
圖 15 學生無法理解樣本分群的思維-1	54
圖 16 學生能使用完整的樹狀圖解決機率問題-2	55
圖 17 學生使用乘法原理解題	55
圖 18 學生使用生活經驗判斷機率問題的對錯	56
圖 19 未接受機率教學的學生便能使用餘事件概念解題	57
圖 20 學生從樹形結構理解餘事件	58
圖 21 學生可能已發展條件機率概念	60
圖 22 學生無法理解樣本分群的思維-2	60
圖 23 學生無法根據題意，使用正確的運算符號-2	61
圖 24 學生能使用完整的樹狀圖解決機率問題-3	61
圖 25 部分學生具備獨立性概念	61
圖 26 學生能使用完整的樹狀圖解決機率問題-4	62
圖 27 學生能從樹形結構理解獨立性概念	63
圖 28 八年級學生尚未具有解決不對稱事件問題的能力	63

圖 29 學前測驗和學後測驗使用樹狀圖解題之人數長條圖	63
圖 30 學後測驗和延後測驗各題答對人數長條圖	64
圖 31 學生在繪製樹狀圖時，無法完成正確的分類	65
圖 32 學後測驗和延後測驗使用樹狀圖解題之人數長條圖	66
圖 33 學生能使用乘法原理或者獨立性概念解題	66
圖 34 學生已能區分運算符號的使用	67
圖 35 學生能使用樹狀圖解決不對稱事件之問題	67
圖 36 學生回饋單-1	70
圖 37 學生回饋單-2	71
圖 38 學生回饋單-3	71
圖 39 樹狀圖的分類教學	77
圖 40 課後回饋單	81
圖 41 第二堂課分組示意圖	92
圖 42 第三堂課分組示意圖	95
圖 43 第四堂課分組示意圖	100
圖 44 兩人猜拳數對列舉的表示方式	101
圖 45 擲筊數對列舉的表示方式	101
圖 46 第五堂課分組示意圖	103
圖 47 講解如何繪製樹狀圖的過程	105
圖 48 圈選樹狀圖中符合題意的結果並算出機率值-1	106
圖 49 繪製拉霸機的樹狀圖分類	106
圖 50 繪製拉霸機樹狀圖的提示	107
圖 51 第六堂課分組示意圖	108
圖 52 小組繪製樹狀圖-1	109
圖 53 小組繪製樹狀圖-2	109
圖 54 圈選符合題意的結果並算出機率值-2	110
圖 55 第七堂課分組示意圖	111

第一章 緒論

第一節 研究動機與背景

就國中階段而言，自民國 74 年，機率課程開始出現於國中數學課程，被安排在九年級的選修數學中，教學內容包含古典機率及頻率機率，並引進樹狀圖為計算機率的技術工具。接著在 92 年的數學課程綱要中，小學機率的課程被刪除，使得機率課程遲至九年級第二學期才首次出現，教學內容也僅強調古典機率，以樹狀圖列舉所有可能性，反觀其他的機率類型皆未被提起。然而一直到最新的 108 年數學課程綱要中，機率課程仍維持於九年級，內容也幾乎沒有變動。

根據單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）提供的證據顯示，九年級上學期未經過機率教學的學生，已經具備機率之自發性基本概念。而這項研究結論也支持嘗試將「古典機率」這一段課題提前移至八年級。根據 Piaget 與 Inhelder（1975）和 Bognár 與 Nemetz（1977）兩組學者的研究結果，亦顯示八年級學生已準備好學習古典機率，並且具備頻率機率之概念。

對照現階段我國的數學課程，九年級才開始正式教授機率課程，且僅強調嚴謹計算的古典機率，導致機率學習時程上的緩慢（單維彰、許哲毓，2019）。但根據一些學者的機率概念研究，以及早在民國 94 年，中小學數學科課程綱要評估與發展研究就發現國外的不確定性教育時程規畫比臺灣早，且內容較豐富（陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005）。許哲毓、單維彰與劉柏伸（2016）也發現國外使用螺旋式編排機率課程，且機率內容較為完整，如有頻率機率、餘事件、獨立性等概念。值得一提的是，英國教科書在樹狀圖的使用上，除了分類事件外，還將機率填在樹枝上，使得樹狀圖成為表現機率概念的模型。在許哲毓等人（2016）該篇文章中，亦強調以樹狀圖之思路，讓學生能利用樹狀圖的圖形特徵，理解抽象的機率問題。

相較之下，我國的機率教學時程實在太晚，且與機率適學年齡是不吻合的。然而隨著科技的進步，在這個重視數據資料的世代，生活中大部分的重要問題，與機率皆密切相關，機率成為人類知識中很重要的一部分，而在未來社會中，學生確實需要具備處理「不確定性」知識之能力，所以機率教學明顯已是一件刻不容緩的事情。而依據 Shaughnessy（1992）統整出的四種機率類型（其中的形式機率不討論），在解決真實的

機率情境問題時，古典機率、頻率機率以及主觀機率三種機率類型的概念，都必須能靈活地被交互應用，在機率學習時，不僅能支持機率概念的建立，亦能有助於減少產生學習中的困惑。且應在機率課程加入主觀機率及頻率機率，使學生建立完整的機率概念。

綜合上述，機率主題的提前教學明顯已是一件急迫的事情，本研究將提前機率課程至國中八年級，以學生對外部連結產生的自發性概念為基礎，加入現今課綱中未被提及的主觀機率和頻率機率，以樹狀圖為機率技術工具，擘畫一套全新的八年級機率課程。

第二節 研究目的

本研究將提前在國中八年級開始機率教學課程，以樹狀圖為機率技術工具，利用樹狀圖的圖形象徵，幫助學生理解抽象的機率概念，融會貫通古典機率、頻率機率以及主觀機率三種機率類型，使學生建立完整的機率概念。本研究的具體目的為，為國中八年級階段之機率課程，實驗一種可能的課程設計與教學方法。

第三節 研究問題

本研究根據研究動機與目的，確立研究問題如下。本節以及前兩節所涉及的機率相關數學概念，例如：樹狀圖、古典機率等，都在第二章「文獻探討」中解釋。

- (1) 有別於現今僅強調計數功能的樹狀圖，八年級學生是否能以樹狀圖為機率技術工具，建立樣本空間以解決機率問題？
- (2) 經過機率教學後，八年級學生是否能理解並提前學習古典機率？
- (3) 經過機率教學後，八年級學生是否能理解主觀機率和頻率機率？
- (4) 經過機率教學後，八年級學生在學習機率時會有什麼樣的迷思以及錯誤類型？
- (5) 教學工法對於研究者在設計機率課程上，產生什麼樣的影響？

第四節 研究限制

一. 機率教學實驗的課程時間

因為考慮校內有既定課程需完成以及學生有考試的壓力，研究者必須在不影響教學進度下，進行機率教學實驗。所以研究者需評估如何設計一套課程內容與學生練習模式，以不產生學生的認知負荷。

二. 地區性選擇

因研究團隊人力有限、經費拮据，在教學地區的安排上，僅能在桃園市進行機率教學；在班級數的選擇上，也僅能負擔有限的班級數。故樣本的變異可能較低。

三. 複本測驗

機率試卷的編製，因欲探討學生機率思維的進展，故採複本測驗，以便重複測試。但考量學生對於複本測驗留有記憶性而對研究結果造成影響，故每次測驗至少間隔兩個月以上。

第五節 名詞釋義

為了使本研究討論的範圍與主題更加明確，本研究所涉及的相關重要名詞，界定如下。

一. 不確定性

根據經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD）的定義，「不確定性」（uncertainty）為「理解生活中各種造成變異的成因、測量時所隱含的不確定性，具有量化和解釋變異的能力，以及處理機率統計問題的能力。」（臺灣 PISA 國家研究中心，2015），機率與統計皆概括在其概念下。本研究將採用 OECD 的用語，將數學教育中關於數據處理、統計與機率的內容，概稱為「不確定性」，但僅針對機率部分做探討（引自許哲毓、單維彰，2018）。

二. 自發性機率概念

自發性機率概念來自於直觀，解釋為未經正式機率教學就具備的機率概念。心理學界在 1950 年代開始研究直觀的機率思維，確認這種認知型態的存在（Cohen & Hansel, 1956）：那是人們為了在不確定的環境中做出適當的決定，必須運用一種與生俱來或是從經驗中養成的認知型態，而 Konold（1991）認為這樣的認知結果是不證自明的（引自單維彰等人，2018）。

三. 機率教學成效測驗

「機率教學成效測驗」的意義為測驗學生經過完整的機率教學後，其機率思維的提升。「學前測驗」在機率教學前實施，測驗的是學生在接受完整的機率教學前，擁有的機率知識與能力。而它會對應「學後測驗」和「延後測驗」，以檢視經過完整機率教學後的學習成效和保留效果。

第二章 文獻探討

本章依研究主題進行相關文獻之探討，以作為本研究設計機率課程之理論基礎。本章共分四節，第一節探究機率類型、八年級學生的機率概念層次及回顧我國數學機率課程發展，第二節探討自發性概念及樹狀圖，第三節探討教學工法，第四節為研究問題。本研究的主要目的為，以教學工法為教學設計理論，以樹狀圖為機率技術工具，延伸其用途，並加入主觀機率與頻率機率等機率概念，擘畫一套全新的機率課程。

第一節 機率概念研究

本節內容主要涵蓋機率類型、機率的適學年齡與概念層次、臺灣機率課程的發展，分為三個部分探討。將透過機率類型分析八年級學生的機率概念層次與回顧臺灣數學課程綱要在機率主題的沿革，提出對機率課程規畫的建議。

一. 機率類型

本研究採用 Shaughnessy (1992) 統整的四種類型：古典機率 (classical probability)，頻率機率 (frequentist probability)，主觀機率 (subjective probability)，和形式機率 (formal probability)。因形式機率為大學課程，故本研究暫不討論。分類的機率類型如下 (引自單維彰等人，2018)：

(1) 古典機率 (classical probability)

古典機率是根據理論假設及推理的規則計算而來的機率值。假設有一個隨機性試驗，其所有可能結果 (稱為樣本空間 S) 能被窮舉列出，且其樣本空間中的每一個樣本點發生的可能性均等，則定義事件 A 在樣本空間 S 中發生的機率為 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ，其中 $n(*)$ 表示為樣本個數。因為古典機率必須接受「可能性均等」的前提，所以亦稱為理論機率或先驗機率。

(2) 頻率機率 (frequentist probability)

在彼此「獨立」的前提下，觀察一個隨機試驗，重複無窮多次或實驗調查，將某事件發生之相對次數 (即「頻率」) 極限，作為該事件的機率。即一個事件的機

率值 $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$ ，亦即在 n 次的試驗中，事件 A 出現的次數為 n_A ，當試驗次數越接近無限多次時，相對次數 $\frac{n_A}{n}$ 越趨近於實數 $P(A)$ 。人們當然無法執行無窮多次的實驗，因此實際上乃是根據有限的執行結果而決定機率的估計值。而頻率機率以實驗結果為依據，所以又稱為實驗機率（experimental probability）。

(3) 主觀機率（subjective probability）

主觀機率為近代 20 世紀發展的概念，是一種以直觀思維猜測機率的表現：直觀且主觀地評估不確定性事件的可能性，其機率值以個人信念程度或既有的生活經驗而決定，是人們與生俱來的能力。其數值可以隨著新訊息的出現而調整其判斷，用來解釋人們獲得新資訊之後，如何合理化自身信念的形成和改變（Borovcnik, Bentz, & Kapadia, 1991; Fischbein, 1975）。相對於主觀機率，古典機率和頻率機率又統稱為客觀機率。

上述的機率類型，各有適當的運用時機。在教學上靈活地交互應用這三種機率類型，也會支持其機率概念的建立，有助於在真實情境中解決機率問題。而機率教學的重點之一，應是讓學生以數學模型的觀點（a modeling point of view），察覺與辨識適當的機率類型，有助於解決不確定性問題（Shaughnessy, 1992）及減少在學習過程中產生的困惑（引自單維彰等人，2018）。

二. 機率適學年齡與概念層次

此段落將簡述 Piaget 與 Inhelder（1975）和 Bognár 與 Nemetz（1977）兩組學者的研究結果。這兩組學者的研究，支持八年級學生具備自發性機率概念的可能性，並作為本研究探討在八年級綜合發展古典機率、頻率機率、主觀機率之概念的學理基礎（單維彰等人，2018）。

Piaget 和 Inhelder 提出學童認知發展理論，並以「機率」為主題，提出以下機率認知發展三階段（引自劉秋木，1996）：

- (1) 運思前期（二至七歲）：此時期的兒童無法區分事件的必然性與或然性，因此無法形成機會的概念，也沒有隨機概念。

- (2) 具體運思期（七至十一歲）：能分辨因果律以及純粹機會的事件。此時期的兒童對於不太複雜的機率問題可以算出成功事件與失敗事件的相對勝算。而若要算出一個實驗之所有可能結果很複雜時，因兒童上無系統性地產生一系列的數學概念想法，所以無法掌握住複雜狀況的發生。
- (3) 形式運思期（十一至十六歲）：比起前期，此階段兒童能列舉實驗的所有可能結果、發展組合分析的才能，以及瞭解相對次數的極限存在，即為大數法則。也由於他們具有比例概念，能以一個分數來代表成功事件的機率，已具有機率概念。

Bognár 和 Nemetz (1977) 列出兒童在不同年齡階段可進行的機率概念教學，有四個階段如下（引自劉秋木，1996）：

- (1) 七至八歲的兒童：確定事件（certain events）、不可能事件（impossible events）及互斥事件（mutually exclusive events）。
- (2) 九至十歲的兒童：較可能事件（more likely events）、較不可能事件（less likely events）及次序事件（order events）。
- (3) 十一至十二歲的兒童：相對次數（relative frequencies），即頻率機率的先備知識，和畫出可表示機率事件的圖表（diagrams），如樹狀圖。
- (4) 十三至十四歲的兒童：獨立（independent）和相關（correlated）的實驗及事件。

Piaget 與 Inhelder (1975) 和 Bognár 與 Nemetz (1977) 兩組學者的研究結果，將兒童或青少年的年齡，對應於各層次的機率概念，整理如表 1。本研究所關心的學生年齡，屬於青少年時期的形式運思期（十一至十六歲），這個時期的青少年能列舉實驗的所有可能結果，並且瞭解相對次數之極限（引自劉秋木，1996）。也就是說，八年級學生已經能夠自發地列舉樣本空間，因此準備好學習古典機率，並且具備頻率機率概念（單維彰等人，2018）。

表 1

兒童或青少年的年齡對應各層次的機率概念

年齡	機率概念發展描述
二至七歲	沒有證據顯示此年齡的兒童，具備不確定性的概念。
七至八歲	可以分辨確定事件、不可能事件及互斥事件。
九至十歲	可以細分較可能的事件、較不太可能的事件，並能夠按照可能性將事件排序。能算出不太複雜的機率問題，其成功事件與失敗事件的相對勝算。
十一至十六歲	能列舉實驗的所有可能結果，瞭解相對次數（之極限）的機率概念，具有（主觀）機率概念。可畫出樹狀圖。

三. 臺灣的機率課程發展

民國 53 年機率課程首次於高中課程出現，在課程上的編排，內容從「樣本空間」發展至「條件機率」與「獨立事件」，而這樣的觀點也影響至今。

民國 60 年，機率被安排在高三課程，課程編排延續民國 53 年的全部課程內容，涵蓋古典、頻率與形式機率（以隨機變數的形式呈現），且在機率概念上增加了貝氏定理，此外多數在市面上流通的教科書，有提及主觀機率。民國 64 年於國小六年級數學課程中，加入了「簡單的機率」，在機率類型上涵蓋頻率機率與古典機率兩種類型。

民國 72 年，高中數學課程將機率提前至高中二年級，僅只呈現古典機率，於是在這個時期短暫出現的主觀機率及頻率機率，便開始在機率課程上不見蹤影。民國 74 年，在國三選修數學加入了機率主題，包含頻率機率與古典機率（不涉及樣本空間與排列組合）兩種，並且首次引進樹狀圖作為計算機率的工具。接著在民國 92 年的數學領域課程綱要中，因不明原因，刪除了小學機率的課程，自此之後，機率課程遲至九年級第二學期才首次出現。但九年一貫公布的機率課程「能力指標」的細目中提到「由於機率概念的掌握並不容易，因此應先從最清楚、易學習的機率觀—古典機率開始學習」（教育部，2008）。實際考察各版本的教科書，皆是專注在古典機率類型的教學，且主要的技術工具為樹狀圖的使用，窮舉所有的可能性，反觀其他類型的機率皆未被提及。

然而民國 97 年的九年一貫數學領域課程綱要在機率課程的改變並不大，以致於民國 101 年統計教育研究—人才培育與資訊整合總計畫之成果報告，仍認為我國的數學教育未提供學生理解資料變異性和不確定性的學習機會（林福來，2012）。乃至於十二年國民基本教育數學領域綱要之前導研究，為新課綱提出了八項建議，其中第一項就是「不確定性與數據處理」（林福來、單維彰、李源順、鄭章華，2013），文中指出美國和中國皆在小學階段就有機率內容，並認為我國太晚進入機率主題。在最新的民國 108 年數學領域課程綱要中，機率內容也幾乎沒有變動，除了在六年級增加「可能性」條目以外，仍然將機率課程集中於九年級，且僅偏重古典機率。

綜合上述，回顧臺灣機率課程的發展，我國不確定性與數據處理的教育狀況，至今仍改變不多。不同的是曾經出現在課綱內容的機率概念，如今卻已不復見。機率課程的編排只重視由樹狀圖為工具的古典機率教學，忽略學生基本的機率思考層次，進而影響學習機率的正確脈絡性。將前述發展對應國小、國中和高中階段，簡化整理於圖 1，可看出機率課程不再均勻分佈於國小、國中及高中三個階段中，且在九年級才首次粗淺地接觸，而在高中階段才開始正式學習，顯然地，我國的機率課程發展與機率適學年齡不吻合（引自單維彰、陳斐卿、許哲毓，2017；單維彰等人，2018）。



圖 1 我國機率課程在國民基本教育階段的發展

第二節 機率教學

本節為編製機率教學內容之需，探討兩個部分。首先探討未經教學而自發的機率概念，以七年級的生物課程和我國學生在 TIMSS 之表現作為本研究之合理動機；而後，探討能系統性地學習機率的樹狀圖。

一. 直觀的機率思維

單維彰等人（2018）提出兩項證據，顯示學生在未經機率教學的情況下，就已經具備某些「自發性機率概念」。第一，在七年級的生物課程遺傳主題上，就已使用到機率概念，如表 2 擷取南一版生物課本所示。而在此情況下，並未聽聞學生有學習困難，由此可知，在學生的認知概念中，已做好接受機率教學的準備，且具備這樣的能力，而此事實也提供本研究在八年級實施正式的機率教學之證據。第二，我國八年級學生參與 TIMSS（Trends in International Mathematics and Science Study）國際評量，對應當時的數學課綱，受測學生應試時尚未正式學習機率。但是他們在機率統計主題的表現卻已然很好，似乎也透露著學生在未經學校正式的數學科課程之前，已經擁有某種程度的機率知識，所以本研究試圖發掘直觀思維的可能助益，進行課程設計。

表 2

南一版七年級生物課本（民 105）

解釋機率概念	建立頻率機率概念的教學活動
<p>在進行減數分裂產生配子時，精子內的染色體組合會有兩種可能，其中一種是 $22 + X$（22 條體染色體加 1 條 X 染色體），而另一種則是 $22 + Y$；但卵只有 $22 + X$ 一種。當卵和 $22 + Y$ 的精子結合，會生下男孩，而卵和 $22 + X$ 的精子結合則會生下女孩（圖 2-11、表 2-3）。因此生男生女的機率皆為 $1/2$。</p>	<p>步驟</p>  <ol style="list-style-type: none">1. 兩人一組，父方在袋子裡放 2 個白色球，母方在袋子裡放 2 個橘色球，都分別標示 A 與 a。2. 兩人分別由自己的袋子中隨機取出一個球。3. 再將抽出的兩個球組合在一起，表示產生了一個子代。將結果記錄下來。4. 1. 重複 20 次後統計數據，計算本組子代捲舌和不捲舌的比例。 2. 接著統計全班所有組別的 20 個數據，計算子代捲舌與不捲舌的比例。

雖然機率概念可以直觀發生，但是在面對較複雜事件時，人們很難利用直覺評估對應的可能性。Green (1983) 也指出在機率教學中，運用有系統的方法是必要的，能避免學生產生與該主題有關的迷思概念。Fischbein (1975) 認為兒童對於機率的初步直覺經驗仍很薄弱，需要經過正式機率教學來協助其發展與增強。藉由教學，可以教導兒童機率概念或改正兒童的機率迷思概念。特別是條件機率的語言邏輯，容易使學生感到困擾，導致迷思概念的產生 (Shaughnessy, 1992)。因此本研究將藉由系統性的機率教學，教導學生正確的機率概念或導正其機率迷思概念。

二. 樹狀圖

機率主題不同於一般的數學課程，需由特定的公式去做定量的推導，它是預測不確定性事件的基準，需要足夠符合事件的資訊，才能做出最佳的解釋。而在系統性的機率教學中，為使學生擁有上述能力，「樹狀圖」常被用來將事件作細緻的分析。

樹狀圖 (Tree Diagram) 這個名詞首次出現在諾姆·杭士基 1965 年的著作 (Chomsky, 1965) 中。它是一個有方向性且無循環的圖形，能系統化地細分主題、區分階層、觀看整體，做邏輯性的列舉，並運用樹的象徵來表現出構造之間的關係 (引自許哲毓等人，2016)。

對於剛接觸機率的學生而言，雖然已具有機率概念，但機率知識是較為混亂的，且沒有系統化的分類工具，而樹狀圖能有效地幫助學生系統性地處理事件的樣本空間、區分事件的種類。

許哲毓等人 (2016) 指出臺灣的國中數學教育，對於樹狀圖的使用，雖採用系統化的方式找尋樣本空間，幫助學生將模糊的概念轉換成具邏輯的排列，但卻僅關注在分類事件上，將功能侷限在單純的計數，傾向將樹狀圖作為解決機率問題的特定工具，並未做任何延伸之用途。反觀英國教科書在樹狀圖上的使用，除了也有系統化的分類，尋找樣本空間之總數外，還將事件發生之機率填在對應的樹枝上，如圖 2 所示，使得樹狀圖成為可以表現機率概念的模型，建立樹狀圖與機率之概念。

本研究將參考英國教科書的樹狀圖教學法，不僅使用樹狀圖計算樣本空間的個數，也將引導學生思考樹狀圖中的每項資訊，利用樹狀圖的具體圖形結構幫助學生理解抽象的機率概念，提高學習機率概念的效能。

Exercise 3

Tree diagrams are particularly useful for working out probabilities when combined events are not equally likely. Multiply the probabilities on the branches for each combined outcome.

Example 1

An ice cream kiosk sells twice as many strawberry (S) as chocolate (C) ice creams.

a What is the probability of selling i a strawberry ice cream and ii a chocolate ice cream?
 $P(S) = \frac{2}{3}$ $P(C) = \frac{1}{3}$

b Draw a tree diagram to show the possible ways that two customers can buy an ice cream. Work out the probability of each outcome.

First customer	Second customer	Possible ice cream choices	Probabilities
C	C	C and C	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
	S	C and S	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
S	C	S and C	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
	S	S and S	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Notice that:

$$P(\text{C and C}) + P(\text{C and S}) + P(\text{S and C}) + P(\text{S and S}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

c What is the probability of selling two ice creams of different flavours?
 $P(\text{C and S or S and C}) = P(\text{C and S}) + P(\text{S and C}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

d What is the probability that two customers buy at least one strawberry ice cream?
 $P(\text{C and S or S and C or S and S}) = P(\text{C and S}) + P(\text{S and C}) + P(\text{S and S})$
 $= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$

324 | 56.4 Probability 2

圖 2 英文教科書 Pearson 版本 Tier 6 P.324 習題

綜上所述，對應八年級學生的機率概念，在八年級的數學課程中，我們可以架構一套有別於僅教授古典機率的機率課程，以學生的自發性概念為基礎，釐清主觀機率中的迷思，以實作感受頻率機率，和透過生活中的實例，學會計算古典機率，透過三種機率類型的交互應用，建立完整的機率概念。並以樹狀圖為技術工具，學會系統性地列舉樣本，藉由樹狀圖的圖形象徵（樹狀結構和節點），解決實際的機率問題和建立機率概念之模型。

第三節 教學工法

本節將探討一個數學教育的教學設計理論：教學工法（Didactic Engineering, 簡稱 DE），分為兩個部分。首先介紹 DE 的發展歷史，而後探討其學理基礎，做為本研究規畫與設計機率課程之基礎。本節主要引自許哲毓（2019）。

教學工法是個新穎的數學教學設計方法，且在臺灣的教育領域尚未被討論，特別是數學教育。作為一種研究方法，DE 組織了教學方案、老師與學生之間不斷辯證的關係，並觀察學生和教師的情況和理論方法的發展（要考慮的新現象或規律）。與傳統的課堂實踐不同的是，DE 不遵循控制組與實驗組之間的比較，它是基於對所涉及的情境、其先驗和後驗分析的比較。在這種模式中，DE 被視為一個科學系統，它通過教學系統有目的地傳播數學知識，我們需要理解這些教學系統的運作，以及相關的教學現象，這些都會牽涉到教學的過程。因此，驗證 DE 概念階段涉及的假設不能成為實驗組和對照組之間的比較問題。

DE 的應用層面相當廣泛，適用於小學至大學階段的課室中，而且研究結果的價值被受重視與迴響（Artigue, 2009），已有多篇期刊發表。在 2008 年的 NORMA08 研討會四大議題之一：教學法設計（Didactical Design），DE 的相關研究受到討論目光。這樣的證據皆顯示 DE 除了在法國成長茁壯，亦拓展至國際的數學教育。然而，這樣具有前瞻性的方法學，卻尚未在臺灣有所著墨，故本研究試圖向歐洲的數學教育觀學習，活化臺灣的數學教育思維。

一. 發展起源

教學工法大約於 1980 年代由 Brousseau 所提出，在夏季學校中由不同的執行者進行多次的實踐。當時的法國數學教育界指出數學教學是一個真正的科學領域，而非應用心理學或數學模式（Warfield, 2006），其方法論應符合其特定目的：通過教學系統傳達數學知識，以及教學與學習過程之間的相關互動。即教學研究應該對課堂實現的建構和研究起更重要的作用（許哲毓，2019）。但 Brousseau 認為皮亞傑過於重視研究兒童個別階段的發展；建構主義不足以模擬學習數學的過程，即未考慮社會和文化面的影響（Artigue, 1999）；尚未有一個好的方法充分闡明課室中，所涉及的教学活動和數學概

念的關係 (Artigue, 2000)。Brousseau 認為數學教育是新興領域，應發展出自身理論架構與實踐 (Warfield, 2006)，提出教學設計理論—教學工法。在後續，有許多與 DE 相關的研究，確立了 DE 的理論架構與特徵，但不一一贅述，僅將重要的文獻與時程簡化於圖 3。

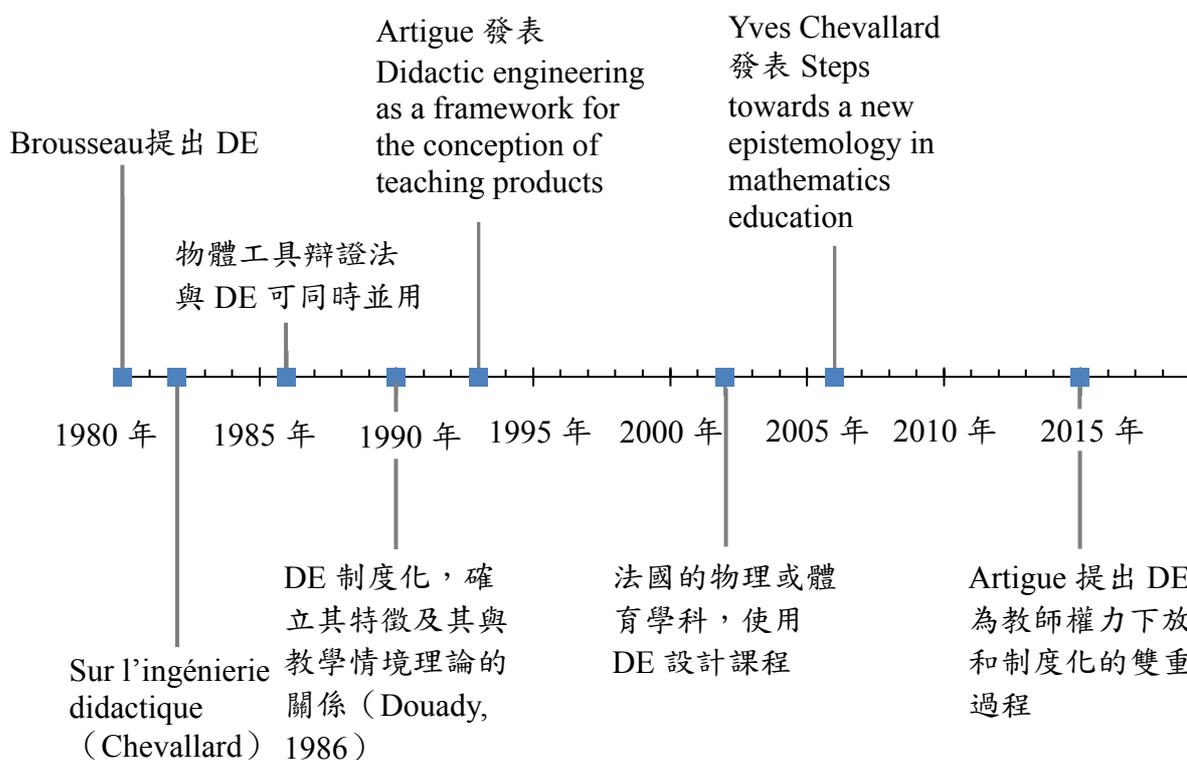


圖 3 DE 的發展時程

二. 學理基礎

DE 的定義如下：數學教育被視為組織教學設計時，教學者、學習者和實踐之間的關係，進行更深入的反思。DE 有五個主要特徵，分別為 (1) 賦予情境概念核心的作用，(2) 對知識認識論的關注，(3) 對環境特徵的重視，(4) 數學知識的三種不同功能：行動、制定、驗證 (辯證法)，(5) 教師的角色：組織教師與學生之間的關係，教學權力下放、制度化。

DE 的構成有 (1) 尋找基礎情境：將認識論本質融入數學情境 (Herbst & Kilpatrick, 1999)；(2) 媒介：傳遞給學生某種資訊，使學生發揮出最大的潛力，提供學生自主性的活動與回饋；(3) 制度化與知識傳遞：由教師主導課室，讓學生解決數學任務，連結數學專業知識與學生產生的知識。

DE 設計需要考量所有的事物，它可以決定學生和知識間、學生和老師間的相互影響。並回答兩個研究設計的問題（1）以實驗為基礎的教育背景：課堂的複雜性；（2）研究與實際操作之間的關係：注意課程內容的描述、分析和組織（Artigue & Perrin-Glorian, 1991; Artigue, 1994, 2009）。

依據上述特徵，發展出四個階段，以下說明之：

- 階段一：前置分析（Preliminary Analyses）

此階段的工作，即是整體研究核心之信念。一項兼具社會影響與價值的教育研究，在起始時，需要分析各種變因，並確定精確的目標。而 DE 為達此目的，它將以三個維度樹立屬於 DE 研究方法之標竿。不僅針對被探討對象、涉及內容有全盤性掌握，且依據實證延伸其研究上之設計，以下說明三個維度（Artigue, 2014, 2015; Barquero & Bosch, 2015）：

- （1） 認識論的分析

研究者針對學生的教育現況進行一系列的評估，包含實驗內容之脈絡，與在學習中可能遭遇的困難。此維度的分析有助於研究者以反思的角度，建立一個參考點，在解決問題時，創造最佳的引導與啟發之情境。

- （2） 機構的分析

教育研究牽涉層面繁雜，學生、教師、學校與其相關的環境皆有可能影響學科教學、技術資源、教學實踐的選擇。正如同課程的組織和選擇，是經過長時間演變的結果，若僅透過認識論分析當前課程，那麼校方文件和教科書就可能產生誤解，所以在分析課程時，必須同時兼顧實際與理論層面。

- （3） 教學法的分析

此維度是一個重要的認知維度，它考量實質性的認知。研究者除了發展教學策略，使學生完整地學習課程外，還必須根據研究目標及所涉及的内容，作為研究設計之參考。

- 階段二：先驗分析（Priori Analysis）

研究設計需要考量所有的事物，包含多樣的觀念、理論與情境的應用，且系統分屬不同的脈絡層次，相當複雜。對此系統，研究者必須以宏觀與微觀之角度，審慎辨別每一層次的教學變數。因為這些因素都將會決定學生和知識之間、學生與學生之間、學生和教師之間的相互作用。上述皆可能推測出研究當下的發展，學生與環境的互動，學生的策略及其演變，以及教師和學生之間的角色和責任。

此階段的工作在前置分析的結論下執行，研究者從確立研究假設後，將進行一系列的檢視，例如評估研究可能涉及理論之可行性或教學變數可能影響學生使用的策略，其中談及的變數可以附加到教學或學習動態上。同時它們和提供給學生的資源相關。此階段將釐清研究假設與教學設計之間的連結，但不是預測學生的表現或進步，而是面臨研究困境時，提供一個能實現於課堂的解決方案之參考。

- 階段三：實現、觀察與資料收集（Realization, Observation and Data Collection）

此階段的目標將進行資料收集，這些資料用於後驗分析，包含學生的文本（學生學習的手寫記錄、思考方式、計算過程等）、研究者的現場筆記和研究者現場的錄影錄音等。研究者人員在收集資料的種類中，通常會再加上問卷調查、學生的測驗結果以及對學生和教師的訪談，以便更好地評估 DE 的結果。這些資料將用於檢定研究目標和假設、推測先驗研究以及後驗分析，建立學生真實表現、文獻和先驗分析之間的對比。

此階段研究者被賦予一項重要任務：扮演課室的觀察者，在課室中觀察教師與學生的情境互動、蒐集學生學習與教師教學歷程的數據資料，他必須能夠從數據資料裡，發掘教學實驗中需要調整的設計或方式，或是與初始的研究基本原理有所不同之處，並將其結果納入後驗分析的討論。而上述之數據資料將受限於前兩階段，並非隨意、無章法地收集。重要的是這些數據資料，必須能使研究者更深度理解學生學習的歷程與情境，以及研究者能解析出教學情境中促使學生學習策略轉變的關鍵點。

● 階段四：後驗分析（Posteriori Analysis）

此階段研究者將進行先驗分析、真實教學情況與後驗分析的比較，從中探討後驗分析的組成與先驗分析對比後所架構的差異，以及針對在階段三收集的數據中，支持前導分析的程度有多高？有哪些證據是分歧或是共同點，以及如何解釋它們？發生了什麼出乎意料的事情，又該如何解釋呢？通過先驗和後驗分析之間的這種聯系，驗證了研究的基本假設，統整出一致性的結論或是分歧的觀點。

此外，為了驗證研究假設，可能需要收集一些補充數據（問卷、訪談等），並可以使用統計工具評價教學實驗的學習結果，但重要的是驗證關注於內部的比較，即學習歷程的差異性，而不是對照組和實驗組之間的外部比較。

上述構成 DE 四個階段，如圖 4。這些都是本研究在設計機率課程時，需要考慮的要點，以期望創造一個具有不確定性的數學情境。

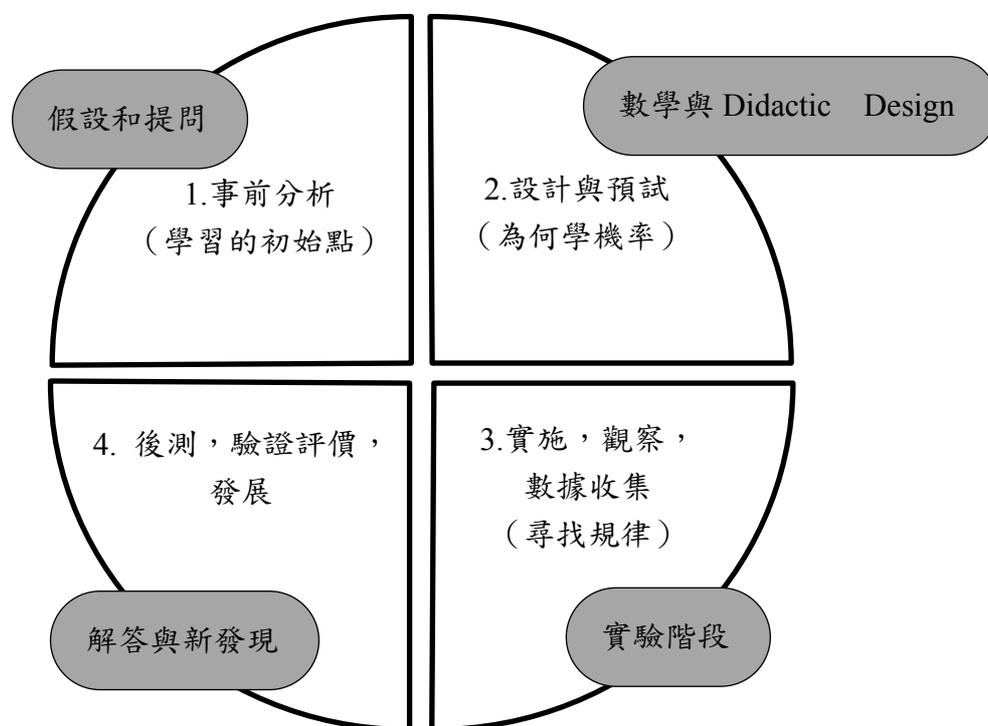


圖 4 Artigue (2009) 區分 DE 四個階段

第三章 研究方法

本章將針對研究流程、研究對象、機率教學實驗課程設計、研究方法與工具、資料收集與資料分析，詳細說明如下。

第一節 研究流程

2017年3月時，研究團隊對七年級學生實施機率測驗，探討七年級學生的不確定性概念。延續該測驗的研究結果，研究者於2017年10月，與指導教授討論及確認研究問題後，開始進行相關文獻的蒐集和探討。接著與許哲毓博士候選人著手設計機率課程和編製試卷、教材等工作，隨後開始入班教學實驗，最後為分析階段。研究流程圖如圖5。

第二節 研究對象

本研究因考量不影響正規學習及實驗的方便性等，故採方便抽樣。田野學校為桃園市郊區一所中型的國中，屬於十年內新成立之學校，全校共計30個班級。研究對象選取八年級4個班級的學生，作為機率教學實驗課程之研究對象，其中A班31人、B班29人、C班30人、D班30人，扣除未參與機率教學人數，實際採計人數為A班28人，B班27人，C班29人，D班27人，合計111名學生。在機率教學實驗前，研究者依據在校月考成績，評估此校學生經過七年級和八年級上學期的數學教學後，學生對於機率將使用到的數學先備知識與技能，如：「百分率」、「小數」和「分數的四則運算」等，屬於熟練的程度。

教學實驗的主題為「機率」單元，現今（108課綱）對應的課堂單元時程安排為九年級下學期，但因研究問題（八年級學生是否能學習機率課程）之探究，所以研究時程選擇八年級下學期。

為確認機率教學保留成效，於機率課程結束約六個月後，實施延後測驗，扣除測驗未到人數，實際採計人數為A班27人，B班23人，C班29人，D班26人，合計105名學生。

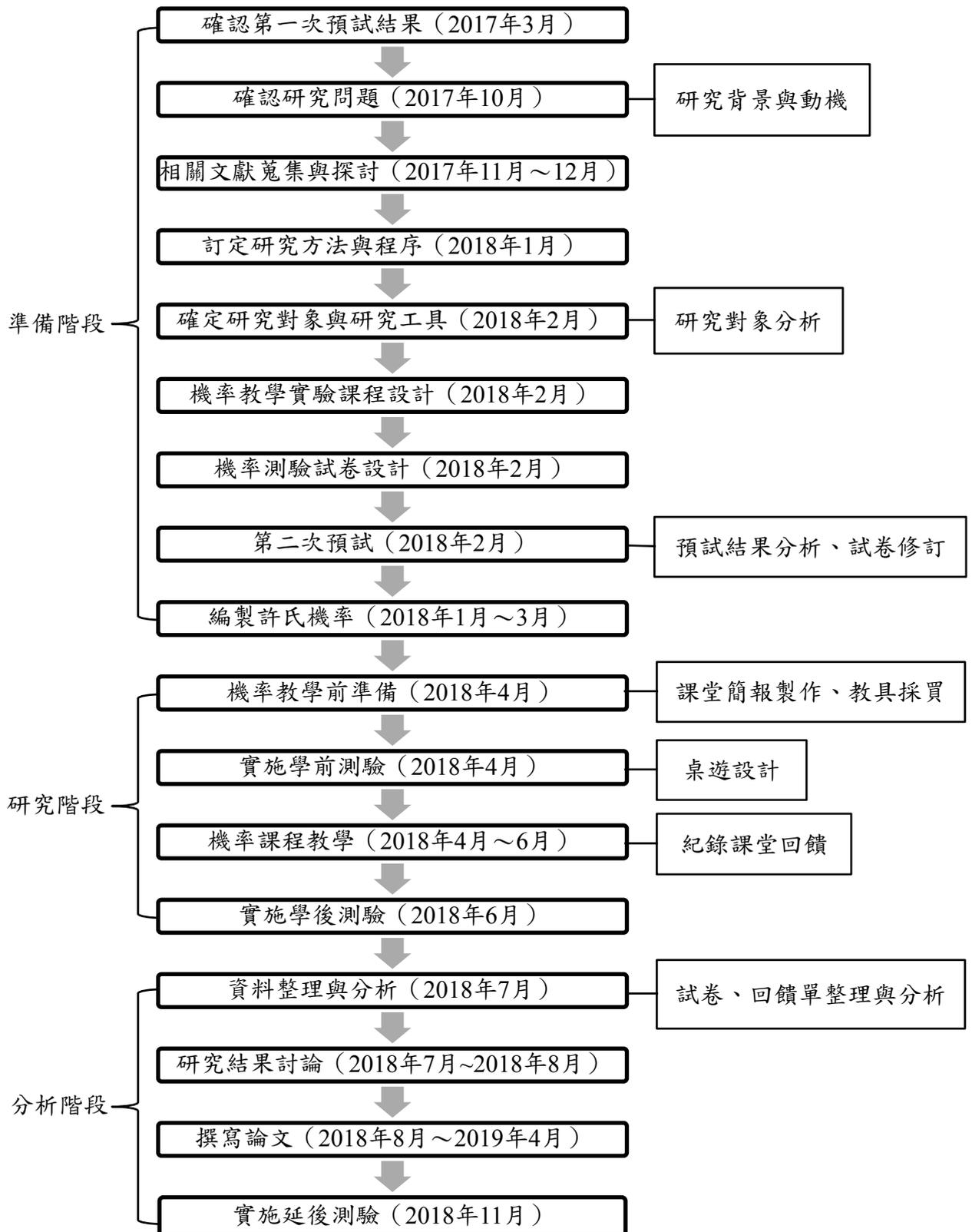


圖 5 研究流程圖

第三節 機率教學設計方法

此節探討如何設計機率實驗課程，包含 DE 課程設計和機率課程介紹。以 DE 為機率課程設計方法，以樹狀圖為技術工具，主觀機率、頻率機率和古典機率為主要課程內容，建立完整的機率脈絡，規畫一套全新的機率課程。目的為探討八年級學生經過完整的機率課程後，機率思維有何變化以及解決機率問題的能力是否提升。

一. DE 課程設計

本研究之機率課程設計，以 DE 為設計理論，共四個階段。目標在各階段以生活經驗切入知識。以下僅以樹狀圖作為 DE 設計範例，並簡單說明。

- 第一階段：前置分析

學習樹狀圖對於學生有什麼樣的幫助？有哪些文獻已證實學習樹狀圖的意義和用途？學生該具備什麼樣的能力，能學習樹狀圖？如果不學習樹狀圖，會造成日後哪些學習上的影響？思考學生對於樹狀圖的理解能到達什麼程度？學生在學習樹狀圖時，可能會產生哪些迷思？

- 第二階段：先驗分析

釐清研究假設與教學設計之間的連結。

(1) 尋找基礎情境：將樹狀圖的概念融入數學情境。

(2) 創造媒介：使學生發揮出最大的潛力，提供學生自主性的活動與回饋。

(3) 制度化與知識傳遞：由教師主導活動，讓學生學習使用樹狀圖解決機率問題。

- 第三階段：實驗、觀察、資料蒐集（目標探究、研究假設的檢定、前導研究的推論）

學生在機率課堂、機率教學成效測驗的真實表現、文獻和先驗分析之間的對比。

- 第四階段：後驗分析

先驗分析、學後測驗、延後測驗的比較，統整出學生學習樹狀圖的結論，或產生迷思的觀點。驗證性：評估學生學習樹狀圖的完整歷程。

二. 機率課程介紹

本研究之機率課程內容分為以下幾大方向：(1) 認識機率、機率概念迷思澄清，(2) 古典機率、餘事件，(3) 頻率機率，(4) 列舉，(5) 樹狀圖。並打造不確定性桌上遊戲，搭配課程進行，提升學生學習動機。以下說明主要學習內容：

(1) 認識機率、機率概念迷思澄清

這是國中數學課程中，八年級學生第一次接觸到「機率」。因此，將從介紹機率名詞和機率值的範圍開始談起，並介紹現行的機率觀點，特別是頻率機率、主觀機率，這是在現今課綱中未被提及的。學生將對機率有初步的認識，以及釐清潛在的自發性機率概念之迷思。預計以 1 節課完成。

(2) 認識古典機率和餘事件並執行運算

發展目標為除了認識古典機率外，亦能理解餘事件概念，並執行運算。首先，以實作經驗導入古典機率之定義。其實古典機率隱含著主觀機率概念，因為古典機率倚賴於以下先驗假設：樣本空間中每個樣本的發生機率均等，此假設本身倚賴於個人的主觀評估，故在此將古典機率和主觀機率做連結，以古典機率之概念，修正主觀機率值。然而餘事件可從字詞片面上的意思解釋，因其牽涉到反向思考，這也是國中階段的學生，較少被教授的思維。以兩種情況的機率試驗為例，當知道其中一情況的機率時，便可以由餘事件的定義，從機率總和為 1，理解至另一情況的機率應該為何。預計以 1 節課完成。

(3) 頻率機率

又稱為「實驗機率」，透過實作，將某事件重複試驗所發生之相對次數（即「頻率」）的極限當作該事件的機率，讓學生感受「大數法則」的觀點。與古典機率之「理想值」對應，連結古典機率和頻率機率，強調「理想值（機率值）」和「實驗的機率值」之間的關係。預計以 1 節課完成。

(4) 列舉

發展目標為培養學生能夠有系統性地「列舉」樣本空間之能力。特別一提，此處為連結後續的樹狀圖課程，強調讓學生以較邏輯性且無遺漏的方式列舉出所有可能結果，再求出事件發生的機率值。例如：列舉甲、乙兩人的所有猜拳結果，須先考慮其中甲方的出拳可能（剪刀、石頭、布），固定其猜拳可能（剪刀）後，再考慮另一人的出拳可能（剪刀、石頭、布），如此就能邏輯性地列出（剪刀，剪刀）、（剪刀、石頭）、（剪刀、布）3種可能結果，依此類推，列出9種所有可能結果。預計以1節課完成。

(5) 建立樹狀圖

發展目標為培養學生建立樹狀圖之能力。首先，說明什麼是樹狀圖，並舉例樹狀圖之各式樣貌。接著，讓學生思考在什麼時候，會看到這樣的圖形，以及在哪些科目中也有使用。最後，引導學生理解樹狀圖在機率中，所能呈現之意義，並運用第四階段之「列舉」，建立屬於機率之樹狀圖。本階段將著重讓學生將兩項能力（建立樹狀圖與理解其意義）融合，達成建立樹狀圖之目標。值得注意的是，此階段之樹狀圖皆限定在三階層內。預計以3節課完成。

以上共7節課，另外再加上3節課的回饋活動（學前測驗、學後測驗和延後測驗）。由於本研究是採用DE設計課程，有別於一般實驗設計，DE關注的是整體的教學歷程，只需實驗組，不需對照組，它強調的是一種內部歷程的比較，所以將採用學後測驗與延後測驗的方式來確認教學成效和教學保留效果。

第四節 機率課程教材設計

本研究之機率教材，為研究指導教授、許哲毓博士候選人與研究者自編內容，取其編寫者之姓氏，命名為《許氏機率》。教材編製參考英、德、日等國之教科書特色，以其機率教學脈絡為基礎，在內容編寫上，尚加入臺灣教科書未提及的內容：主觀機率以及頻率機率，將這兩者與古典機率在教材中靈活運用，幫助學生建立完整的機率知識，使教材編寫達到最完善。

本教材運用跨領域的教材設計，搭配我國的課程規畫，學生在七年級的生物課程遺傳主題上，已經接觸了機率概念，而本研究將在教材設計中，融入遺傳課題，以跨領域

的知識作為學習動機，並作為前置經驗（單維彰、許哲毓，2019）。除了生物領域外，亦舉例樹狀圖在不同領域的各式樣貌。這樣的內容設計符合十二年國教中所提及的素養學習具跨領域的性質，使得課程不局限於數學上的知識。

研究團隊在編製教材時，不提供過多的題目練習，避免精熟學習之操作。教材著眼於使學習者更積極參與課室活動，進行「做中學」，研究團隊將練習題目連結生活經驗，強調以具體的生活實例來體會抽象的機率思考，並跳脫傳統課本題型之框架，刺激學生對機率的理理解，並以樹狀圖連貫機率思路，建立完整的機率脈絡。教材搭配許哲毓博士候選人精心繪製、與教材內容對應的機率插圖，以豐富的圖文設計，搭配生活情境，培養學生解決生活實際問題的素養，並使學生在閱讀教材時，不會感到乏味，導致學習動機不足。以下分別說明教材的三大特色：

(1) 樹狀圖

教材的設計除了介紹樹狀圖、教導如何繪製樹狀圖以及利用樹狀圖計算樣本空間之總數外，再強調將事件發生之機率，填在對應的樹枝上。更著重利用樹狀圖之表徵，幫助學生理解機率的抽象概念，釐清機率迷思。雖然現在的國中課本，例題中曾出現三階的結構，但若仔細觀察則可知道在二階時已被固定。並非真正帶有不確定的三階樹狀圖，類似圖 6 為典型的例子（單維彰、許哲毓，2019）。所以在教材設計中，所舉範例皆經研究團隊重新編寫，如三人猜拳、拉霸機或約會穿搭等例子，皆是真實生活中，具有不確定性的三階樹狀圖之例題。

例 6 利用樹狀圖求某事件的機率 對應能力指標 9-d-05

有 5、6、7 三張紙牌，今將此三張紙牌任意排成一個三位數，試問：

- (1) 共可排出幾個不同的三位數？
- (2) 排出的三位數是奇數的機率是多少？
- (3) 排出的三位數是 4 的倍數的機率是多少？

解 (1) 將所有排出的三位數以樹狀圖表示，如下圖所示：

百位數	十位數	個位數	三位數
5	6	7	567
5	7	6	576
6	5	7	657
6	7	5	675
7	5	6	756
7	6	5	765

共可排出 6 個不同的三位數。

圖 6 三階樹狀圖之範例（南一版）

(2) 題目練習

根據單維彰等人（2018）指出，九年級上學期的學生在尚未學習機率前，即已具備機率的自發概念。所以在設計題目時，以是非題（包含寫下理由）的方式來釐清學生潛在的自發性機率概念與迷思。在每一章節的後方，提供了近 10 年來機率的歷屆基測和會考試題，希望能培養學生具有解決真實生活中的機率問題之素養外，亦對升學提供幫助。在最後的章節，加入了跟機率有關的 AMC（American Mathematics Competition）試題、高中課本練習題、大學學測和指考試題，學生可以自我練習外，也可讓學生感受自己已具備解決較高層次機率問題的能力，增強其自信。此編排之目的為透過題目的引導，使學生釐清機率的迷思，習得機率概念，提升學生解決機率問題的能力，亦幫助學生建立學習的信心。

(3) 實作活動

根據十二年國教素養，課堂除了傳遞知識外，培養學生的實作能力亦十分重要。而且數學教學應注重數、量、形的連繫，讓學生在實作、實測與直覺中，精熟數、量、形及其相互關係的概念，並逐步抽象化與程序化成為精鍊有效的數學語言，再經由反思、論證、練習與解題，讓學生逐步穩定，以掌握其概念，作為進一步學習的基礎（引自教育部，2018）。在本研究的機率課程中，讓學生動手實作，例如：操作水管帽、海盜桶、丟擲瓶蓋與操作砸派機，在實作過程中，學生將學會如何計算古典機率值（計算會使帽子漏水的水管之機率和計算一次就放到會使海盜叔叔彈起來的洞之機率），以及藉由紀錄（個人、組別以及全班）丟擲瓶蓋的結果，感受「大數法則」的觀點。

然而在真實情境中使用機率推論或解決問題時，主觀機率、頻率機率和古典機率的機率概念都必須能靈活地被交互應用才行（單維彰、許哲毓，2019）。所以在教材中加入擲瓶蓋的活動操作，請學生寫下認為擲瓶蓋擲出正、反、側三面的機率，為主觀機率，利用餘事件算出瓶蓋擲出非正面的機率，為古典機率，讓學生從餘事件的觀點去修正自己寫下的主觀機率值，此為古典機率連結主觀機率。透過大數法則的觀點，丟擲瓶蓋的活動，與古典機率之「理想值」對應，此又為連結頻率機率。

值得一提的是，教材內容中丟擲瓶蓋的實作活動，此為研究者參考日本教科書所編製，相較於我國教材中，最常見的活動不外乎丟擲硬幣的試驗，但硬幣為一公正物體，且正、反面出現的機率各為 $\frac{1}{2}$ ，考量學生在操作時可能無較深刻的印象，而瓶蓋為不公正物體，無法直觀地寫出各試驗發生的機率，需由實驗的結果觀察出每一情況發生情況的機率值不同，且事件的機率值會因試驗的次數越多次而趨近於一定值。期望藉由瓶蓋的舉例以及實作，加深學生對於頻率機率之概念的理解與應用。

此編排之目的在於，讓學生透過生活情境中的問題，連結生活經驗，來理解機率概念和學會計算試驗的機率值。

第五節 不確定性桌遊設計

TIMSS 報告指出臺灣學生本身的學習意願低落，但學習表現卻不差。因此，研究團隊在機率課程中，打造一項結合教學內容的桌上遊戲，命名為雲單毓起。透過桌上遊戲（簡稱桌遊），在遊戲的過程中可訓練遊戲者大腦邏輯推論（侯采伶，2016），且教育類桌遊可以在彈指遊戲間幫助孩子，也能從複雜的桌遊學會邏輯、推理、表達和專注（李岳霞，2015）。

桌遊的目標除了符合本研究之課程模組，亦考量十二年國教的素養導向。因此，也將系統思考、解決問題、符號運用、溝通表達、及人際團隊合作等素養，列入桌遊操作的要點中。而這些素養適合用來創造 21 世紀學習需要的問題情境（詹明峰、張鐵懷，2018）。

然而編製一個桌遊十分不易，有諸多考量。為滿足桌遊的創新度和豐富性且製作教具的經費有限，自行製作桌遊教具為第一考量。製作有效教學的桌遊，使得桌遊與教學內容密切相關，但又不失有趣性，此為第二考量。因桌遊為輔助課堂教學，遊戲內容不宜太過複雜，且方便於課程中執行，桌遊的規則設計則為第三考量。總結以上，如何編製符合上述三點考量的桌遊為研究團隊的一大課題。

在設計過程中，主要參酌線上桌遊「璀璨寶石」。研究團隊反思在課程中使用遊戲教學與操作線上桌遊的經驗，研擬設計出一套達到寓教於樂效果的桌遊。將點數、關卡、

經驗值與等級等遊戲機制融入閱讀與數學的學習（陳德懷，2011）。以歷史科古歐洲的封建制度發展，為桌遊的故事背景，以籌碼和卡片為教具。以下簡單說明遊戲：

卡片共有三類，貧民（白色卡片）、百姓（綠色卡片）和貴族（粉色卡片）。貧民為奴役，可被視作一商品，價值為在被交易買賣時可換取金錢，購買更高階級的卡片，百姓為封臣，價值為擁有土地的產出（在桌遊中即為獎勵），例如：糖果，同樣地百姓亦可被交易，換取購買貴族卡片的籌碼；貴族為領主，擁有最多財富，在課堂中便是擁有糖果和餅乾等財產，和擁有些許特權，例如「指定」為指定他組任一人回答問題，若答對，則指定的組別獲得籌碼，若答錯，則被指定的組別被扣奪籌碼。

卡片左上方為分數，即購買卡片時便可獲得該張卡片的分數，貴族擁有崇高的地位，故分數最高，依此類推，貧民的卡片分數最低，最後擁有卡片總分最高的組別獲勝，可獲得獎勵。

在第七次的機率課堂，教師講解桌遊規則後，各組猜拳決定回答順序，組別可選擇1~15號問題（此序號與題號無關）回答。教師抽籤，抽到對應號碼的組員負責回答。教師檢討題目，若答對，教師立刻給予籌碼，該組約有20秒的時間購買黑板上的卡片。當卡片被購買後，教師在黑板上補上新的卡片。在學生回答的過程中，藉由口語化訓練，有助於培養跟機率有關的「解讀與詮釋」能力。透過學生的表達，亦可釐清機率迷思。此外，卡片上的籌碼與分數，因階級不同，故在黑板上有限的卡片（隨機放置卡片），決定是否購買檯面的卡片。以及在有限的時間下，如何購買到分數較高的卡片，使其組別獲勝。正是培養學生「不確定性思考」與「最佳化決策」的能力。

第六節 研究方法與工具

一. 研究方法

本研究將以複本測驗的方式進行資料的統計分析，分析學生經過完整的機率教學後，其解決機率問題的能力之提升。所以本研究將編製「學前測驗」、「學後測驗」和「延後測驗」試卷，做為學生起始能力、機率思維的進展之分析，以及機率教學保留成效之探討。

此外，本研究亦從學生試卷中的作答理由和解題過程做質性分析，探討八年級學生是否能學會機率課程。研究者將分析學生在接受機率教學前，具備哪些自發性機率概念，

以提供本研究編製機率課程之素材，以及經過完整的機率教學後，學生解決機率問題的進展表現和有哪些常見的機率迷思及錯誤類型，以提供本研究建議機率教學內容之調整。

二. 編製機率試卷

本研究將採用許哲毓、單維彰（2018）所建立之數學「不確定性」教材與評量之分析規準，以深入機率課程內涵的研究。這一套規準分為知識向度：主觀機率、古典機率、頻率機率、統計量、圖表判讀、樹狀圖，與認知向度：概念理解、程序執行、數學思維的解題思考、不確定性思維的解題思考。各概念細項說明於表 3 和表 4。

本研究考量機率測驗試卷是否能有效測得學生之表現，前後共經過兩次預試，兩次樣本數皆選取 100 人以上。

研究者將機率試卷試題分為四碼說明：

第一碼：I 為第一次預試，II 為第二次預試。

第二碼：A 表示第一大題是非題，B 表示第二大題（簡答及）計算題，C 表示第三大題想一想（第一次預試無第三大題）。

第三碼：數字用以表示題號。

第四碼：(1)、(2)分別表示題目之小題；若無小題，則省略第四碼。

舉例說明：I-A-2 表示第一次預試的是非第 2 題，II-B-9-(1)表示第二次預試的計算第 9 題第(1)小題。

本研究的第一次預試試卷（請見附錄二）為紙筆測驗，試題來源主要參考歷屆基測與會考試題。第一次預試，選取北部地區 3 間學校的七年級學生，合計 272 名學生為預試樣本。測驗時間為 45 分鐘，在該班教師協助下完成測驗。試卷的分數制定為每題 1 分，共 15 分，在試題效度上，採內容效度及專家效度，內容效度以雙向細目表來分析試題、知識向度與認知向度之間的關係，如表 5 所示；專家效度則為研究指導教授、許哲毓博士候選人及研究者進行三角檢證所建構。

表 3
「不確定性」知識向度各概念細項的定義

知識向度	定義
主觀機率	指一個事件發生的機率由某人決定，包括設計上的安排設定，或者根據相信的程度而評定。
古典機率	假設樣本空間 S 中的每一個樣本出現機會均等，則事件 A 發生的機率 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ，其中 $n(*)$ 表示樣本個數。
頻率機率	用實驗設計所觀察的事件發生相對次數，當作事件發生的機率。
統計量的知識	對數據進行運算而獲得統計知識，不涉及圖表者。
圖表判讀	對圖表進行報讀、詮釋和判斷而獲得統計知識。
樹狀圖	將原始數據或統計量依指定的或適用的樹狀圖繪製出來。

表 4
「不確定性」認知向度各概念細項的定義

認知向度	定義
概念理解	能以記憶性的知識來辨識、轉換機率或統計的概念或原理。
程序執行	能選擇適當的機率或統計定義、公式執行計算，能判讀圖表呈現的資訊，能製作指定的圖表，並能檢驗結果的正確性。
數學思維 的解題思考	遭遇不確定的情境時，能組織機率或統計的知識，根據定義、定理或公式做「確定」的演算或推論，以解決問題。
不確定性思維 的解題思考	遭遇不確定的情境時，能組織機率或統計的知識，必要時輔以計算，在「不確定」的前提之下做出合理的判斷或決策。

表 5

第一次預試試題分析之雙向細目表

認知向度 知識向度	概念理解		程序執行		數學思維 的解題思考		不確定性思維 的解題思考		合計 (比例)
	題號	配分	題號	配分	題號	配分	題號	配分	
主觀機率	I-A-1	1							1 (7%)
古典機率	I-A-2 I-A-4 I-B-1 I-B-2	4	I-B-3 I-B-4 I-B-6	3	I-B-5 I-B-7 I-B-10	3	I-A-3	1	11 (73%)
頻率機率							I-B-11	1	1 (7%)
樹狀圖			I-B-8	1	I-B-9	1			2 (13%)
合計	5 (33%)		4 (27%)		4 (27%)		2 (13%)		15 (100%)

根據雙向細目表和預試結果，雖然第一次預試試卷其 α 值為 0.787，已是一份可進行施測的試卷。但是從雙向細目表來看，古典機率的出題比例偏高，所以刪除部分古典機率的試題。且在試卷中應多增加主觀機率、頻率機率和樹狀圖的試題。而指導教授、許哲毓博士候選人與研究者編修試題後，需經第二次預試來確認新修編試卷的品質與參數，故以第一次預試試題搭配新修編試題，為第二次預試試題，以表 6 簡單說明。

表 6

第一次預試試題決策表

題型	題號	客觀的題目分析					決策
		答對率	高分組 答對率	低分組 答對率	難度	鑑別度	
是非題 A	1	0.73	0.81	0.67	0.74	0.14	刪除
	2	0.92	0.98	0.82	0.90	0.16	刪除
	3	0.79	0.92	0.58	0.75	0.34	保留
	4	0.85	0.97	0.71	0.84	0.26	更改題目敘述
簡答及 計算題 B	1	0.78	0.98	0.48	0.73	0.50	刪除
	2	0.84	0.94	0.67	0.81	0.27	更改題目類型
	3	0.72	0.96	0.37	0.67	0.59	刪除
	4	0.72	0.94	0.34	0.64	0.60	更改題目敘述
	5	0.69	0.92	0.30	0.61	0.62	刪除
	6	0.67	0.94	0.27	0.61	0.67	刪除
	7	0.32	0.79	0.01	0.40	0.78	刪除
	8	0.21	0.49	0.03	0.26	0.46	刪除
	9	0.06	0.18	0.00	0.09	0.18	刪除
	10	0.47	0.88	0.11	0.50	0.77	刪除
	11	0.33	0.67	0.08	0.38	0.59	調整題意

從表 6 中，可看出研究者將部分數據良好的試題刪除，例如：I-B-3 及 I-B-10，原因乃為這幾題與 I-B-4 為類似題型，預測概念皆為古典機率的計算，但因本研究需測量多種機率類型的試題，試卷題數不宜過多，故將試題刪除。

本研究第二次預試試卷（請見附錄三）為紙筆測驗，試題來源除了第一次預試的優良試題外，尚參考歷屆基測與會考試題、三大版本課本、習作、測驗卷練習題，和指導教授、許哲毓博士候選人與研究者自編之試題，三人加以討論編寫，成第二次預試試卷。第二次預試，採用群集抽樣，盡量排除地區性差異，分為北區和中區，共 4 個班級，合

計 104 名學生為第二次預試樣本。測驗時間為 45 分鐘，在該班教師協助下完成測驗。試卷的分數制定為是非題每題 2 分，其中答案和理由各占 1 分；計算題每題 3 分，其中過程 2 分、答案 1 分；最後一大題想一想一題 1 分，總分共 42 分，以雙向細目表來分析試題、知識向度與認知向度之間的關係，如表 7 所示。

表 7
第二次預試試題分析之雙向細目表

認知向度 知識向度	概念理解		程序執行		數學思維 的解題思考		不確定性思維 的解題思考		合計 (比例)
	題號	配分	題號	配分	題號	配分	題號	配分	
主觀機率	II-A-1	2					II-C-1	1	3 (7%)
古典機率	II-A-3 II-A-4 II-B-5-(1)	7	II-B-1 II-B-3	6	II-B-4 II-B-5-(2)	6	II-A-2	2	21 (50%)
頻率機率			II-B-9-(1)	3			II-B-2	3	6 (14%)
樹狀圖			II-B-6 II-B-7	6	II-B-8 II-B-9-(2)	6			12 (29%)
合計	9 (21%)		15 (36%)		12 (29%)		6 (14%)		42 (100%)

第二次預試試卷其 α 值為 0.854。測驗題目部分來自課本例題或歷屆試題，所以試題品質皆具國家考試的水準，或經由教科書審查通過，部分由研究團隊自編的題目，信度與效度皆經過預試也有良好的驗證。題目類型涵蓋主觀機率、古典機率、頻率機率、列舉及樹狀圖。經過測試。根據雙向細目表和預試結果，相較於第一次預試試卷，除了

信度提升外，試題的分配也較為平均，所以第二次預試試卷經過指導教授、許哲毓博士候選人與研究者討論及審核後修正，如表 8 所示，再稍做編修為學前測驗。

因考量學前測驗、學後測驗及延後測驗為複本測驗，其試卷的編製應測驗相同概念，所以將學前測驗的題目修改數字以及變更題目前後順序，為學後測驗試卷及延後測驗試卷。

表 8
第二次預試試題決策表

題型	題號	客觀的題目分析					決策	
		答對率	高分組 答對率	低分組 答對率	難度	鑑別度		
是非題 A	1	0.53	0.71	0.50	0.60	0.21	修改題目敘述	
	2	0.50	0.82	0.18	0.50	0.65	保留	
	3	0.57	0.71	0.38	0.54	0.32	保留	
	4	0.66	0.88	0.26	0.57	0.62	保留	
計算題 B	1	0.47	0.88	0.00	0.44	0.88	增加表格填空	
	2	0.57	0.94	0.12	0.53	0.82	保留	
	3	0.34	0.71	0.00	0.35	0.71	修改題目敘述	
	4	0.23	0.50	0.00	0.25	0.50	保留	
	5	(1)	0.48	0.85	0.03	0.44	0.82	更改示例
		(2)	0.35	0.71	0.00	0.35	0.71	保留
	6	0.19	0.50	0.00	0.25	0.50	修改題目敘述	
	7	0.15	0.47	0.00	0.24	0.47	保留	
	8	0.02	0.06	0.00	0.03	0.06	增加提示	
	9	(1)	0.52	0.94	0.03	0.49	0.91	保留
(2)		0.10	0.26	0.00	0.13	0.26	修改題目敘述	
想一想 C	1	0.63	0.79	0.29	0.54	0.50	保留	

因為第一次預試之目的為測試試卷品質，且第二次預試與正式測驗之試題為複本測驗，故僅針對第二次預試討論試題決策表及評分規準。以下針對試題決策表有異動的題目說明：

● A-1 原試題：

嘟嘟到桃園機場追星，前九次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第十次她應該好好念書，不用去追星。

根據預試結果，多數學生的理由會寫下「應該好好念書」是正確的，因此判定敘述是正確的。但因此題的預測概念為「時進效應」迷思（陳欣民、劉祥通，2002）。而此作答與機率並無相關，與學生的價值判斷較有關係，所以將好好念書等字刪除。

修正後試題：

嘟嘟到桃園機場追星，前九次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第十次她不用去追星。

● B-1 原試題：

在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？

HINT：

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

修改提示中的表格，將其挖空，預期從填空的過程中，有助於學生解決機率問題。

修正後試題：

在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？

提示：(完成下方表格)

	A	a
A		Aa
a		

● B-3 原試題：

負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{1}{50}$

根據預試結果，有少數學生無法判斷五月花為衛生紙，而造成答題錯誤，為避免在正式測驗時，有相同情況發生，故在題目中補述五月花衛生紙。

修改後試題：

負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有五月花衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{1}{50}$

● B-5-(1)原試題：

從連續正整數 40、41、42、……、97、98、99 中隨機取一數，則

(1)個位數字等於十位數字的可能有哪幾種？

(例：11、22、33……)

根據預試結果，學生易受題目舉例的影響，將舉例中的例子也寫上，寫出 11、22、33、……、99 共 9 種答案，但研究者認為學生並非不瞭解題意所問，故將題目中的舉例更改為其中一答案。

修正後試題：

從連續正整數 40、41、42、……、97、98、99 中隨機取一數，則

(1)個位數字等於十位數字的可能有哪幾種？

(例：77)

● B-6 原試題：

劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則江辰是第二個被家庭訪問的機率為多少？

根據預試結果，多數學生直接寫出答案為 $\frac{1}{3}$ ，並無其他過程，研究者無法判斷學生是否經過計算後得知答案，或是根據題目有三位學生，直接猜測答案。討論後，調整題意所問，再加入一條件「小希是第一個被家庭訪問」，避免發生學生臆測之情況。

修正後試題：

劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則小希是第一個、江辰是第二個被家庭訪問的機率為多少？

● B-8 原試題：

川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？

根據預試結果，學生在作答三人猜拳不分勝負的情況時，只會寫出三人出相同的拳種，未多加思考仍有三人皆出不一樣的結果之可能，故題目後方給予提示，提醒學生其他的可能性。而此題的難度和鑑別度皆不理想，但經過與指導教授討論後，因此題乃為此機率教學實驗之關鍵，在未學習樹狀圖之前，學生未能正確地將 9 種可能結果列出。期望經過機率教學後，學生能利用樹狀圖系統性地列出 9 種可能結果，故仍保留此題。

修正後試題：

川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？

提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況喔！

● B-9 原試題：

福珠為了練舉重，考慮要不要吃蘇打餅乾，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，不論有沒有吃蘇打餅乾，選擇喝草莓牛奶的機率都是 $\frac{3}{7}$ 。

- (1) 福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
- (2) 福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

根據預試結果，原試題「不論有沒有吃蘇打餅乾，選擇喝草莓牛奶的機率都是 $\frac{3}{7}$ 。」，易使學生產生答題上的混淆，第(2)小題作答 $\frac{3}{7}$ ，故將題目重新敘述。而第(2)小題的難度和鑑別度皆不理想，但經過與指導教授討論後，因此題欲探究八年級學生是否能自行理解獨立性的概念，及經過機率教學後，樹狀圖的結構是否有助於理解獨立性概念，故仍保留此題。

修正後試題：

金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{3}{7}$ 。

- (1) 福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
- (2) 福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

三. 機率試卷評分規準

因本研究需探討學生的作答情況，且理由為批改者之主觀看法，故制定一評分規準，如表 9 所示。以下針對試卷的評分規準簡易說明：(1) 為了將學生是非題的答案和理由分開計算，所以是非題的計分為一題 2 分，但單題需滿分方算全對。(2) 為了將學生計算題的答案和過程分開計算，且考量學生在計算過程可能有粗心或計算錯誤等失誤，所以計算題的計分為答案 1 分，理由 2 分，單題滿分為 3 分，需滿分方算全對。

表 9

第二次預試的機率測驗試卷評分規準表

題號	評分依據	給分規準	
		給分	規準
A-1	擁有主觀機率之概念，但不會認為前九次皆未遇到，而第十次也不會遇到(未有正時進效應迷思)。	1分	不因前九次皆未遇到，而放棄第十次可能遇到的機會。
		1分	認為有遇到的可能，但是有可能有其他因素，例如：要好好讀書、收集追星資料等。
		0分	機率概念錯誤，認為若遇到的機率為 $\frac{1}{10}$ ，則前9次沒遇到，第10次一定會遇到。
		0分	機率概念錯誤，認為只有遇到和不遇到兩種可能，所以遇到的機率為 $\frac{1}{2}$ 。
		0分	言之無物。
A-2	判斷正確的樣本分群。	1分	中獎發票數量少，中獎機率小於 $\frac{1}{2}$ 。
		1分	根據生活經驗判斷，中獎機率未達 $\frac{1}{2}$ 。
		0分	只有中獎與不中獎兩種可能，故中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。
A-3	能瞭解機率值為一理想值。	1分	20次為理想次數，實際結果可能遠低於或遠高於20次，也有可能1次都沒有，也有可能120次皆丟出6點。
		1分	些許因素(力道、角度、運氣等)造成不會剛好出現20次。
		0分	認為其他面點數會較常出現，未有公正骰子之概念。
		0分	每一面被擲出的機會均等，故答案為 $120 \div 6 = 20$ (次)。
A-4	機率值範圍介於0~1之間，且不可能發生的事件其機率值為0。	1分	機率值介於0~1之間。
		1分	骰子沒有7點。

(續下頁)

		0 分	擲出的機率為 $\frac{1}{7}$ 。
B-1	利用機率值公式 $\frac{n(\text{該事件發生的結果})}{n(\text{所有可能發生的結果})}$ ，判斷出正確答案為 $\frac{3}{4}$ 。	2 分	完成表格，從表格知所有可能發生的結果有 4 種，發生耳垂分離的情況有 3 種，答案為 $\frac{3}{4}$ 。
		2 分	利用餘事件解題，發生耳垂分離的機率值 = 1 - 發生耳垂緊貼的機率值，答案為 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 。
		1 分	未具生物顯、隱性基因之概念，根據題意判斷耳垂分離基因型只有 Aa 一種，將答案寫作 $\frac{2}{4}$ ，仍具有機率值之概念。
		1 分	將兩種 Aa 視為重覆情況，故所有可能發生的結果為 3 種，具簡單的機率值概念，但有樣本空間錯誤之迷思。
		0 分	未能正確作答。
B-2	知道頻率機率如何操作與應用。	2 分	正確計算出答案，四捨五入，寫出答案為 62 或 63 個。
		2 分	計算出答案為 62.5 個。
		2 分	過程中將數字捨五入，造成算出結果與答案有些許誤差。 例： $2500 \div 200 = 12.5 \approx 13$ $13 \times 5 = 65$ （個）
		2 分	正確列出算式，但過程計算錯誤（答案 0 分）。
		0 分	未能正確作答。
B-3	機率值相加。	2 分	將機率值相加。
		2 分	將機率值相加但計算錯誤（答案 0 分）。
		2 分	看錯題意，將錯誤的機率值相加，但仍具有機率值相加之概念。
		0 分	機率概念錯誤，作答 $\frac{3}{5}$ 。（續下頁）

		0分	機率概念錯誤，將機率值相乘。
B-4	列舉出所有可能發生的結果，並會計算其機率值。	2分	列舉出所有結果或列出部分結果即可有邏輯算出所有結果數，再計算出機率值。
		2分	正確畫出樹狀圖。
		2分	未能清楚理解題意，但仍具列舉能力，列出所有偶數情況（答案0分）。
		2分	扣除 A、B 兩骰為相同點數的情況，但仍具列舉之能力。
		0分	未能正確作答。
B-5-(1)	列舉出所有可能發生的結果。	2分	利用列舉或樹狀圖，寫出所有的可能結果。
		2分	僅寫出可能的結果有 6 種，但未列舉出 6 種可能（答案 0 分）。
		2分	列舉錯誤，列出超過或少於 6 種答案（答案 0 分）。
		0分	未能正確作答。
B-5-(2)	利用機率值公式	2分	根據上題答案，且能算出所有可能結果為 60 種，答案為 $\frac{1}{10}$ ($\frac{6}{60}$ 亦可)。
	$\frac{n(\text{該事件發生的結果})}{n(\text{所有可能發生的結果})}$	2分	所有可能結果計算錯誤或上題答案錯誤造成錯誤，但知道如何利用公式求出答案（答案 0 分）。
	，判斷出正確答案為 $\frac{1}{10}$ 。	0分	未能正確作答。
B-6	利用樹狀圖有系統性地列出所有的 6 種可能結果，算出機率值為 $\frac{1}{3}$ 。	2分	利用樹狀圖或列舉，寫出正確答案。
		2分	共有 3 人，任選一人為第二個被家庭訪問，機率為 $\frac{1}{3}$ 。
		1分	未能清楚理解題意「各做一次家庭訪問」，畫出樹狀圖為第一位被家庭訪問後，同一個人仍有可能被第二次家庭訪問。
		0分	未能正確作答。

(續下頁)

B-7	1. 利用樹狀圖有系統性地列出所有的 6 種可能結果，算出機率值為 $\frac{1}{6}$ 。	2 分	利用樹狀圖、列舉，寫出正確答案。
		2 分	早餐吃到肉的機率為 $\frac{1}{2}$ ，午餐吃到肉的機率為 $\frac{1}{3}$ ，利用獨立性概念作答
			$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 。
		2 分	乘法原理算出所有可能結果為 2×3 種，而兩餐皆吃肉的可能結果為其中 1 種，答案為 $\frac{1}{6}$ 。
		1 分	畫出樹狀圖，早餐未吃到的，仍有可能在午餐被吃到。
		0 分	機率概念錯誤，作答 $\frac{2}{5}$ 。
		0 分	早餐有吃到肉的機率為 $\frac{1}{2}$ ，午餐有吃到肉的機率為 $\frac{1}{2}$ ，（ $\frac{1}{2}$ 為有吃到或沒吃到），所以答案為 $\frac{1}{4}$ 。
B-8	利用樹狀圖有系統性地列出所有的 27 種可能結果，並從樹狀圖中判斷出 9 種不分勝負的情況，算出機率值為 $\frac{1}{3}$ 。	2 分	利用樹狀圖、列舉，寫出正確答案。
		1 分	僅考慮三人出相同拳法為平手狀況，未考慮三人出不同拳法的平手情況。
		0 分	三人猜拳，故臆測答案為 $\frac{1}{3}$ （答案 1 分）。
		0 分	未能正確作答。
B-9-(1)	利用餘事件概念解題，算出答案為 $\frac{1}{3}$ 。	2 分	從樹狀圖結構中，計算出答案為 $\frac{1}{3}$ 。
		2 分	餘事件解題，未吃餅乾的機率值 = $1 -$ （選擇吃餅乾的機率值），答案為計算出答案為 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 。
		0 分	未能正確作答。

（續下頁）

B-9-(2)	利用獨立性概念解題，將機率值相乘，算出答案為 $\frac{1}{7}$ 。	2分	將機率值相乘，答案為 $\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$ 。
		0分	將機率值相加。
		0分	吃且喝、吃但不喝、不吃但喝、不吃且不喝 4 種可能結果，故答案為將機率值相乘，答案為 $\frac{1}{4}$ 。
C-1	擁有主觀機率概念，並明白機率值範圍為 0 至 1 之間。	1分	能依照主觀價值判斷寫出機率值。
		0分	未能正確作答。

四. 機率實驗課程回饋單

本研究為理解學生在接受機率實驗課程後之態度上的感受，故在課程完成後，由學生填寫一份課程回饋單。內容如：你覺得你可以利用樹狀圖解釋事件的機率？你閱讀和寫過這本書後，你學到了什麼？（詳見附錄七）希冀從學生的論述中，瞭解學生的學習狀況，並統整出有價值之建議，以改善機率實驗課程。

第七節 資料收集

一. 機率測驗題目卷

首先，本研究實施的機率測驗試題共有 14 題，測驗時間為 45 分鐘，研究對象在該班教師協助下完成測驗。機率測驗分為學前測驗、學後測驗及延後測驗。

學後測驗對應學前測驗以檢視學習成效，其實施時間分別為機率實驗課程開始前一週（2018 年 4 月）和結束後一週（2018 年 6 月），實際採計人數為 A 班 28 人，B 班 27 人，C 班 29 人，D 班 27 人，共回收 111 份試卷。

延後測驗對應學後測驗以檢視教學保留效果，其實施時間為機率實驗課程結束約六個月後（2018 年 11 月），實際採計人數為 A 班 27 人，B 班 23 人，C 班 29 人，D 班 26 人，共回收 105 份試卷。

二. 機率實驗課程回饋單

本研究設計之課程回饋單共有 7 題，與學後測驗同時實施。實際採計人數為 A 班 28 人，B 班 27 人，C 班 29 人，D 班 27 人，共回收 111 份回饋單。

第八節 資料分析

本研究將蒐集「學前測驗試卷」、「學後測驗試卷」、「延後測驗試卷」及「機率實驗課程回饋單」，採用「量化分析」輔以「質性分析」之方式進行資料的統計與分析。在量化分析方面，以 R 進行描述性統計、相依樣本單因子變異數分析(Repeated Measures ANOVA)和多重比較分析檢定(Multiple comparison analysis testing)，輔以各題之進步幅度，藉以討論經過機率實驗課程教學後，學生的機率思維有何進展？學生解決機率問題的進展表現為何？以及經過完整的機率教學後，教學的保留成效如何？並從文本資料中，探討學生常見的機率迷思與樹狀圖錯誤類型，以及學生學後之情意改變。

本研究將蒐集「學前測驗試卷」、「學後測驗試卷」、「延後測驗試卷」及「機率實驗課程回饋單」，採用「量化分析」輔以「質性分析」之方式進行資料的統計與分析。在量化分析方面，以 R 進行描述性統計、相依樣本單因子變異數分析(Repeated Measures ANOVA)和多重比較分析檢定(Multiple comparison analysis testing)，輔以各題之進步幅度，藉以討論經過機率實驗課程教學後，學生的機率思維有何進展？學生解決機率問題的進展表現為何？以及經過完整的機率教學後，教學的保留成效如何？並從文本資料中，探討學生常見的機率迷思與樹狀圖錯誤類型，以及學生學後之情意改變。

特別說明，因歷經六個月，原研究對象中的幾位學生轉出原學校和幾位因特殊原因未到校進行施測的學生，「學前測驗試卷」、「學後測驗試卷」及「延後測驗試卷」三份試卷的樣本數未達一致。但考量資料收集需完整，故使用 R 軟體 car package、tidyr package 和 dplyr package 之功能，進行遺漏值之估計，共 6 筆，以便研究結果分析。

本節將在以下個別說明資料分析中的資料編碼及機率測驗試卷。

一. 資料編碼

研究者將機率測驗試卷的試題分為四碼說明：

第一碼：III 為學前測驗，IV 為學後測驗。

第二碼：A 表示第一大題是非題，B 表示第二大題計算題，C 表示第三大題想一想。

第三碼：數字用以表示題號。

第四碼：(1)、(2)分別表示題目之小題；若無小題，則省略第三碼。

舉例說明：III-A-3 表示學前測驗的是非第 3 題，IV-B-4-(2)表示學後測驗的計算第 4 題之第(2)小題。

特別說明，本研究所呈現之圖表皆是以「學前測驗試卷」的題號為代表，以方便研究者與讀者閱讀，如圖 7、圖 29、圖 30 和圖 32。

二. 機率測驗試卷

研究者將分別蒐集「學前測驗」、「學後測驗」和「延後測驗」試卷，作為學生起始能力、機率思維進展、解決機率問題的能力和教學保留效果之判斷。試卷的分數制定為是非題每題 2 分，其中答案和理由各占 1 分；計算題每題 3 分，其中過程 2 分、答案 1 分；最後一大題想一想一題 1 分，共 42 分。

根據研究對象在機率測驗的答對率，搭配研究工具—數學「不確定性」教材與評量之分析規準，用以量化數據資料，接著進行資料的統計與分析。研究分析採取相依樣本單因子變異數分析和多重比較分析檢定來探討學生經過完整的機率教學後，其解決機率問題的能力以及機率教學的保留成效。除了數據資料外，研究者亦將針對學生在試卷中寫下的理由及計算過程做質性分析，探討學生在未經正式機率課程前，解決機率問題的能力狀態，以及經過完整的機率教學後，學生解決機率問題的進展表現。

三. 機率實驗課程回饋單

研究者將蒐集機率實驗課程回饋單，以瞭解學生在機率課程後的感想及回饋。選取回饋單之核心問題，第 6 題「你閱讀和寫過這本書後，你學到了什麼？」作為探討學生在經過機率課程後，認為自己的機率思維進展以及對於機率課程之回饋。

本研究共回收 111 份回饋單，其中僅一位學生並未回答第 6 題，故此題之有效樣本為 110 份。研究者將學生給予之回饋分為三種類型：第一類型為未學過機率的學生，表示自己經過本實驗之機率課程後，建立哪些機率概念；第二類型和第三類型為已學過機率的學生對於本研究機率課程的回饋，能說明與曾經接觸過的機率課程不同之處或在課程種釐清原有的錯誤機率概念。而第三類型，能展現涉及高中階段機率概念的表現。

第四章 研究結果

本章欲分析學生在經過完整的機率教學後，其機率思維的進展表現與教學的保留效果，以及探討學生在學習機率時的狀況、解決機率問題時容易產生的迷思和在繪製樹狀圖時，易產生的錯誤類型。分別說明機率測驗的結果、機率課程、學生課後感想及回饋、機率教學的驗證、教學工法及結果討論。最後將根據研究結果進行分析與簡單歸納結論。

第一節 機率教學成效測驗

本研究採用相依樣本單因子變異數分析，其中選定學前測驗、學後測驗和延後測驗三份試卷作檢定。描述性統計結果如表 10。實際採計人數為 A 班 28 人，B 班 27 人，C 班 29 人，D 班 27 人，合計 111 名學生。六個月後的延後測驗，實際採計人數為 A 班 27 人，B 班 23 人，C 班 29 人，D 班 26 人，合計 105 名學生。

表 10
機率教學成效測驗之描述性統計

類別	平均分數	標準差	樣本數
學前測驗	16.69	8.19	111
學後測驗	26.49	10.80	111
延後測驗	26.93	9.97	105

由相依樣本單因子變異數分析的結果，可知 F 值為 207.723， p 值小於 0.05 達顯著，如表 11。顯示三次測驗之平均數是有差異的，而本研究目的為探討經過完整的機率教學後，學生的機率概念是否成長及教學保留效果。但無法得知哪些測驗間是有差異的，所以本研究採用事後比較檢定 (Post hoc tests)，進行成對比較 (Pair wise difference)，採用其中的 Tukey's Test 進行測試，結果如表 12。

表 11

相依樣本單因子變異數分析

	自由度	平方和	平均平方和	<i>F</i>	<i>p</i> 值
組間	2	7357.6	3678.8	207.723	2.2×10^{-16}
組內	110	27035.9	245.8		
殘差	214	3790.0	17.7		

事後比較結果顯示，「學前測驗對學後測驗」*p* 值小於 0.05 達顯著，且平均分數之差為正數，表示經過完整的機率教學後，學生的機率知識有明顯的提升；「延後測驗對學後測驗」*p* 值大於 0.05，表示經過半年，學生的機率學習有保留效果，顯示課程的成效顯著。特別說明，雖然「學前測驗對延後測驗」*p* 值小於 0.05 達顯著，但是在此並不探討，因為經過機率教學後的表現勢必會高於教學前。

表 12

事後比較檢定

	平均分數之差	信賴區間		<i>p</i> 值
		下界	上界	
學後測驗 - 學前測驗	9.79	8.46	11.13	< .05
延後測驗 - 學前測驗	10.24	8.89	11.59	< .05
延後測驗 - 學後測驗	0.45	-0.91	1.80	0.72

接著，本節將對「學前測驗對學後測驗」和「延後測驗對學後測驗」的結果進行探討。

一. 學前測驗對學後測驗

研究者將各題答對人數以長條圖表示，示如圖 7。由圖 7 中，可以看出每題的答題人數明顯地上升之外，研究者亦將從答題狀況分析解決機率問題的進展表現及在學習機率時易產生的機率錯誤類型，以下進行說明。

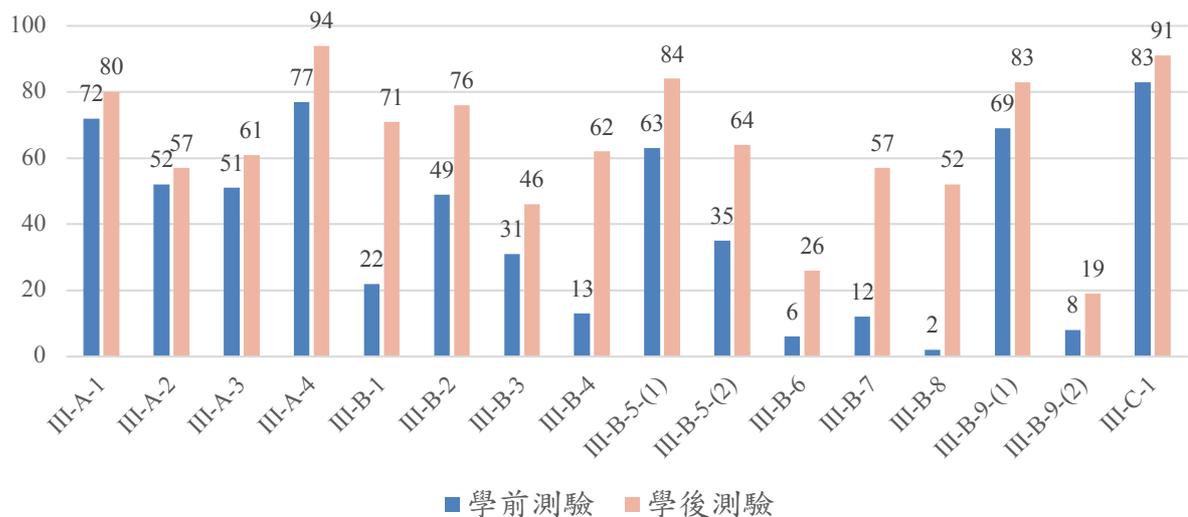


圖 7 學前測驗與學後測驗各題答對人數長條圖

本研究將透過學生的答對率分析「不確定性」概念的各向度中，學生機率概念的進展表現。每一題答對人數除以總受測人數，定義為該題之答對率。

研究者為了分析在經過完整的機率教學後，學生在各題的成長表現，將每一題的學後測驗答對率減去學前測驗答對率，定義為該題之進步幅度。如果該題之進步幅度為正數，表示此題為正成長；反之，則為負成長；如果該題之進步幅度為零，表示此題為零成長。再來，比較整體平均數和標準差，我們以一個標準差判斷各題成長的幅度。

本測驗平均進步幅度為 0.21，標準差為 0.14。結果顯示，不論進步幅度高於或低於進步率之平均數加減一個標準差，在整體表現而言皆是正成長；只是如果低於一個標準差，意味成長幅度未達平均成長水準。

(1) 主觀機率

主觀機率的兩道題目皆為正成長，但兩題之進步幅度皆低於 1 個標準差，如表 13。但在學前測驗的答對率來看，兩題的答對率皆大於 0.5，表示學生在接受本研究的機率教學前，對於主觀機率已有初步的認知，或許是這個原因，導致經過機率教學後，進步幅度較不明顯。以下針對各題逐一探討：

表 13

機率測驗－主觀機率的答對率與進步幅度

認知向度	概念理解		不確定性思維的解題思考	
	學前	學後	學前	學後
測驗				
答對率	0.65	0.72	0.75	0.82
(對應題號)	(III-A-1)	(IV-A-3)	(III-C-1)	(IV-C-1)
進步幅度	0.07(低於平均數 1 個標準差)		0.07(低於平均數 1 個標準差)	

● 主觀機率的概念理解

嘟嘟到桃園機場追星，前九次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第十次她不用去追星。

此題為進一步探討「時進效應迷思」對於主觀機率的影響，由學生自行判斷是否前往追星，在前九次未遇見明星的狀況下，第十次是否就不可能遇見明星，與「丟擲一顆公正骰子，前五次皆出現 6 點，第六次出現 6 點的機率值是否較高」有異曲同工之處。整理學生的答題過程中，不論在學前測驗或學後測驗中，皆發現有兩種常見錯誤的答題型態，第一種為「若遇見明星的機率為 $\frac{1}{10}$ ，前九次未遇見明星，則第十次一定會遇見」，如圖 8，此回答表示學生未能理解機率值為理想值，即在 10 次的會面中，未必會遇見 1 次；第二種為「僅有遇見和不遇見兩種可能，故遇見明星的機率為 $\frac{1}{2}$ 」，如圖 9，這表示學生對於樣本分群存有迷思。

(X) 3. 嘟嘟到桃園機場追星，前五次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第六次她不用去追星。
理由：假設她遇見的機率為 $\frac{1}{10}$ 沒遇見為 $\frac{9}{10}$ 則 5 次沒遇見都前五次第五次就有機會

圖 8 常見的錯誤答題型態-1

(X) 3. 嘟嘟到桃園機場追星，前五次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第六次她不用去追星。
理由：每次機率都要重算。 start 有 start 有 start 有 start 有

圖 9 常見的錯誤答題型態-2

● 主觀機率的不確定性思維的解題思考

民國 108 年時，請你(妳)評估自己考上中大附中(中壢高中)的機率是多少？

研究者分析學生的作答內容，發現學生在接受相關的機率教學前，已清楚瞭解機率值的範圍介於 0% 至 100% 之間。而此題在每個班級的平均答錯人數約 3 至 4 人，研究者調閱試卷，發現這些答錯人數的作答情況皆為空白。所以可以說明學生在有作答的情況下，皆能正確回答此題。

(2) 古典機率

將古典機率各題之答對率與進度幅度，整理成表格，但因考量版面配置，分為兩個表格討論，如表 14 和表 15 所示。

表 14
機率測驗—古典機率的答對率與進步幅度-1

認知向度	概念理解		程序執行	
測驗	學前	學後	學前	學後
答對率	0.46	0.55	0.20	0.64
(對應題號)	(III-A-3)	(IV-A-1)	(III-B-1)	(IV-B-1)
進步幅度	0.09 (低於平均數且未滿 1 個標準差)		0.44 (高於平均數且超過 1 個標準差)	
答對率	0.69	0.85	0.28	0.41
(對應題號)	(III-A-4)	(IV-A-1)	(III-B-3)	(IV-B-6)
進步幅度	0.15 (低於平均數且未滿 1 個標準差)		0.14 (低於平均數且未滿 1 個標準差)	
答對率	0.57	0.76		
(對應題號)	(III-B-5-(1))	(IV-B-4-(1))		
進步幅度	0.19 (低於平均數且未滿 1 個標準差)			

表 14 中，概念理解在學前測驗的答對率，顯示學生在接受本研究的機率教學前，已有基本的機率概念，同樣地可以解釋為學生在概念理解的進步幅度較不明顯的原因。而程序執行的二題進步幅度差異較大，乃是因為其中一題為學生在七年級下學期生物課程中的習題，經過機率教學後，學生能加深曾經學過的知識印象，並能得到完整且正確的解釋，所以這也是進步幅度較為明顯的原因；另一題則為測驗機率值相加的題型，在課程中，並沒有特別強調數學運算符號的使用，但從學生的進步幅度中，仍可說明在機率教學中，有類似的概念幫助學生理解如何運用運算符號。

表 15
機率測驗－古典機率的答對率與進步幅度-2

認知向度	數學思維 的解題思考		不確定性思維 的解題思考	
	學前	學後	學前	學後
測驗				
答對率	0.12	0.56	0.47	0.51
(對應題號)	(III-B-4)	(IV-B-2)	(III-A-2)	(IV-A-2)
進步幅度	0.44 (高於平均數且超過 1 個標準差)		0.05 (低於平均數且超過 1 個標準差)	
答對率	0.32	0.58		
(對應題號)	(III-B-5-(2))	(IV-B-4-(2))		
進步幅度	0.26 (高於平均數且未滿 1 個標準差)			

表 15 中，數學思維的解題思考的兩道題目，皆為正成長。這兩道題目皆為測驗學生列舉能力之題型，其進步幅度亦皆高於平均數，可說明培養學生系統性列舉樣本空間的能力之教學是有效的。而不確定性思維的解題思考該題，進步幅度雖不甚明顯，但在學前測驗的答對率在 0.5 左右，顯示多數學生在學前測驗已具備解決該問題之能力。以下針對各題逐一探討：

- 古典機率的概念理解

連續投擲一顆 1~6 點的公正骰子 120 次(意思是說骰子每一面被擲出的機會相等),則「6 點」剛好會出現 20 次。

在學前測驗,多數學生會直觀地寫下 $120 \times \frac{1}{6} = 20$,認為題目敘述是正確的,部分學生會根據生活經驗,認為丟擲骰子不會剛好出現 20 次,僅有很少數的學生會正確地寫出 20 次為一理想值。在經過完整的機率教學後,學生的機率思維提升,多數學生皆能利用機率語言表達出機率值為一理想值,是經過很多次的試驗而得到的數值,如圖 10。

值得注意的是,此題在經過完整的機率教學後,進步幅度較低,研究者認為實驗次數 120 次已接近大數法則,很有可能 6 點會剛好出現 20 次,推測有可能因此造成學生答題上的錯誤,若將題意改為 30 次,也許會更加恰當。

(X)1. 連續投擲一顆 1~6 點的公正骰子 126 次(意即骰子每一面被擲出的機會相等),則「6 點」剛好會出現 21 次。

+2 理由: 不一定,那只是理想數字

圖 10 學生能使用機率語言表達理由

- 古典機率的概念理解

投擲一顆 1~6 點的公正骰子(意思是說骰子每一面被擲出的機會相等),則投擲一次丟出「7 點」的機率為 $\frac{7}{6}$ 。

在學前測驗時,學生能輕易地判斷此題對錯,研究者從學生的理由「骰子不可能出現 7 點」推測,為根據生活經驗而作答。值得一提的是,經過完整的機率教學後,研究者發現學生在文字表述上的提升,知道如何運用機率語言來進行文字上的敘述,寫下理由為「機率值介於 0~1 之間」,如圖 11。

(X)4. 投擲一顆 1~6 點的公正骰子(意即骰子每一面被擲出的機會相等),則投擲一次丟出「10 點」的機率為 $\frac{10}{6}$ 。

2 理由: 跟本沒到 10 點而且機率超過 1,要 0~1 之間

圖 11 學生在文字表述上的進步

- 古典機率的概念理解

從連續正整數 40、41、42、.....、97、98、99 中隨機取一數,則個位數字等於十位數字的可能有哪幾種?(例:77)

此題為引導學生列舉出所有結果後，在下一小題完成作答。此題概念容易，常見於國小數學課程。但在此題的學前測驗，學生未能有很好的表現，乃是因為學生對於題目文字敘述產生誤解，僅簡答 6 種，並沒有將所有結果列舉出來。而經過完整的機率教學，學生學習到如何列舉後，在學後測驗能將所有的樣本列出，並能完整地作答此題，所以可以簡單說明學生在經過機率教學後，列舉能力獲得大幅的提升。

但仍須檢討的是，若將題目問法改成「從連續正整數 40、41、42、.....、97、98、99 中隨機取一數，請列舉出個位數字等於十位數字的所有可能」，也許能更加深入地探討學生列舉能力的進展。

● 古典機率的程序執行

在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？

提示：(完成下方表格)

	A	a
A		Aa
a		

此題為國中生物科題目，學生對於此題型應不感到陌生，但在七年級學習時，未能理解機率之概念，經過機率教學後，學生能夠明白題目中機率所代表的意義。其中值得注意的是，在經過完整的機率教學後，研究者發現有些學生會使用繪製樹狀圖的方式，解決問題，如圖 12。另有一部分學生判斷出耳垂分離的樣本數多於耳垂緊貼的樣本數，利用「餘事件」解題，如圖 13。

1. 在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？

提示：(完成下方表格)

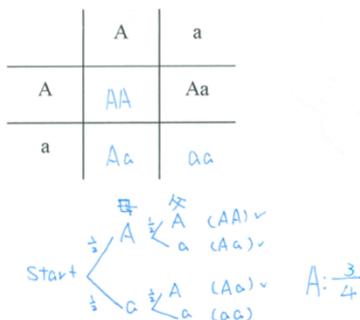


圖 12 學生能使用完整的樹狀圖解決機率問題-1

1. 在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？

提示：(完成下方表格)

+3

	A	a
A	AA $\frac{1}{4}$	Aa $\frac{1}{4}$
a	Aa $\frac{1}{4}$	aa $\frac{1}{4}$

$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
 A: $\frac{3}{4}$

圖 13 學生使用餘事件概念解題

● 古典機率的程序執行

負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有五月花衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{1}{50}$

此題為機率值相加的概念，在上述提到機率教學中，未特別強調如何使用數學運算符號，但有類似的概念幫助學生理解如何運用運算符號，此類似的概念即為在機率教學中，教導學生使用樹狀圖列出所有節點後，圈選出符合題意的樣本數，再將其加總。雖在教學上並未正式說明機率相加或相乘的概念，但從該題的進步幅度，說明部分學生從樹狀圖的圖形結構中，理解了加法概念。但因為未特別教導運算符號的使用，導致學生在使用數學工具的能力上沒有問題，但卻無法根據題意判斷使用正確的運算符號，如圖 14，但若在教學中能強調透過樹形結構區分加法和乘法的使用，必能使學生更加釐清機率概念。另一原因為學生樣本空間的迷思，不懂得樣本分群的思維，認為每一樣本分群皆為對稱，無法理解各分群樣本所對應不同的抽中機率，如圖 15。

6. 負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有五月花衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{50}$

$$\frac{1}{4} \times \frac{17}{100} \times \frac{1}{50}$$

$$= \frac{17}{20000}$$

$$A: \frac{17}{20000}$$

圖 14 學生無法根據題意，使用正確的運算符號-1

6. 負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有五月花衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{50}$

$$\frac{3}{5}$$

5個中有3個有

圖 15 學生無法理解樣本分群的思維-1

● 古典機率的數學思維的解題思考

有兩個 1~6 點的公正骰子 A 與骰子 B，A 骰出現的點數為 a，B 骰出現的點數為 b，則點數 a 與 b 依序所組成的數為偶數的機率是多少？
例如：當 a=1，b=2 時，所組成的數為 12。

此題的進步幅度非常明顯，研究者發現會有如此大幅的進步乃是因為約有 46% 的學生已具備樹狀圖解題的能力，使得在作答過程中能以較有邏輯性的方式列出所有樣本空間和寫出正確答案，如圖 16。在繪製樹狀圖的過程中，研究者亦發現有部分學生雖未將完整樹狀圖畫出，但他們便可以從樹狀圖結構觀察其對稱性，使用乘法原理推導出所有

樣本數，如圖 17，表示有部分學生已具備抽象性思考之能力。但仍有少部分學生不瞭解題目所問組合數的意思（即前一小題答錯），導致無法作答，但並不可說明他們未具備使用列舉或樹狀圖解題之能力。

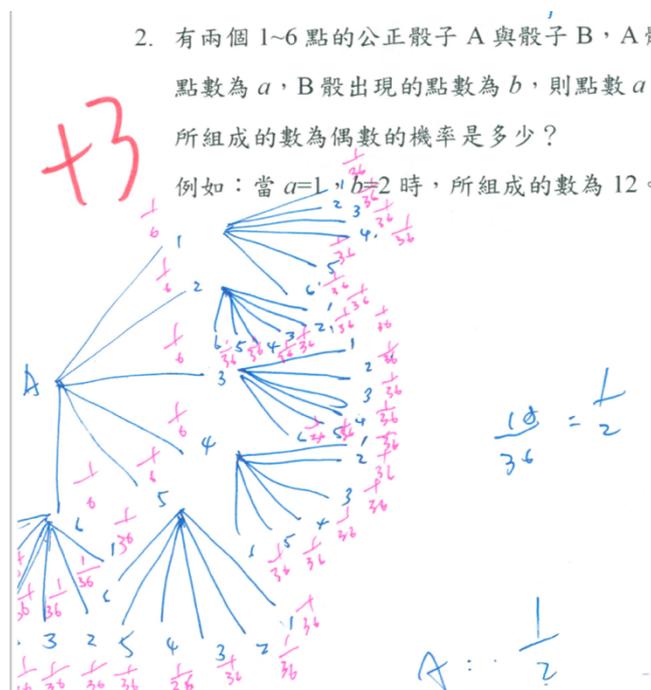


圖 16 學生能使用完整的樹狀圖解決機率問題-2

2. 有兩個 1~6 點的公正骰子 A 與骰子 B，A 骰出現的點數為 a ，B 骰出現的點數為 b ，則點數 a 與 b 依序所組成的數為偶數的機率是多少？

例如：當 $a=1, b=2$ 時，所組成的數為 12。

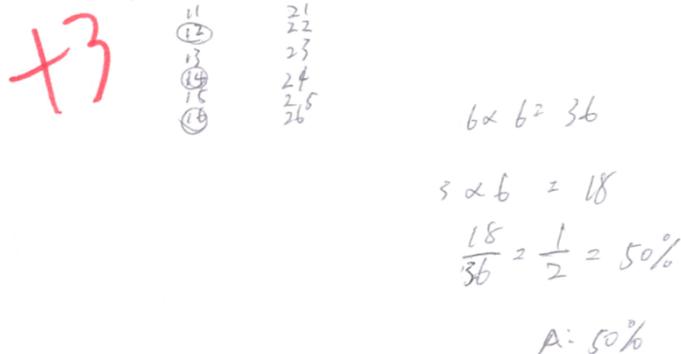


圖 17 學生使用乘法原理解題

● 古典機率的數學思維的解題思考

從連續正整數 40、41、42、.....、97、98、99 中隨機取一數，則個位數字等於十位數字的機率是多少？

此一小題在答對率尚未能有良好的表現，原因為部分學生無法完成數與量的計算（40~99 有 60 個數）或上一小題答題錯誤（列舉出個位數字等於十位數字的所有可能），而造成答題錯誤。但是從他們的作答過程中，可以發現他們已瞭解機率值為 $\frac{\text{該事件發生的個數}}{\text{所有可能發生結果的個數}}$ 。

● 古典機率的不確定性思維的解題思考

統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。

此題為歷屆基測試題，測驗的是樣本空間分群的迷思。分析學生的答對情況有兩種，第一種為能清楚說明不中獎樣本數多於中獎樣本數，故中獎機率較低，第二種為利用生活經驗判斷出中獎機率遠小於 50%，說明學生可以從生活經驗感受機率的思維，如圖 18。但在分析過程中，發現答錯的學生皆直觀地從字面上的意思，將樣本分群，所以認為中獎機率為 $\frac{1}{2}$ ，並未正確地判斷樣本空間，表示學生在樣本空間的分群上仍有些迷思，抑或可能是學生未能清楚明白發票對獎的方式，造成答題錯誤，而這兩個原因也是此題進步幅度較不明顯的原因。

(X)2. 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。

+2 理由：沒有那麼好中獎，大家都不上班了

圖 18 學生使用生活經驗判斷機率問題的對錯

(3) 頻率機率

將頻率機率的兩道題目其答對率和進步幅度整理於表 16 中，頻率機率的兩道題目皆為正成長。從學前測驗的答對率，可以發現學生在接受本研究的機率教學前，對頻率事件已有基本的概念，或許也是因為如此，答對幅度較不明顯。其中，程序執行的題目為餘事件，在接受本研究的機率教學前，學生已能從字面上的意思，理解餘事件；另一題則為不確定思維的解題思考，從學生的解題過程中，亦能發現學生從七年級數學單元「比與比例式」中，學會計算頻率機率。以下針對各題逐一探討：

表 16

機率測驗－頻率機率的答對率與進步幅度

認知向度	程序執行		不確定性思維的解題思考	
測驗	學前	學後	學前	學後
答對率	0.62	0.75	0.44	0.68
(對應題號)	(III-B-9-(1))	(IV-B-7-(1))	(III-B-2)	(IV-B-3)
進步幅度	0.13 (低於平均數且未滿 1 個標準差)		0.24 (高於平均數且未滿 1 個標準差)	

● 頻率機率的程序執行

金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{3}{7}$ 。金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？

此題欲測驗餘事件，檢視學生以往所學的數學知識，他們從未學過類似的概念。但令研究者出乎意料的是，在現今課綱中，餘事件的課程為高中階段的範疇，但竟然有超過半數的八年級學生能答對此題，研究者也猜測學生應該是從「剩餘」的字面意思去解釋，看到題目數字為分數，直觀地利用 1 扣掉其機率值，如圖 19。也正是如此，研究者與指導教授討論後，決定將餘事件放入機率實驗課程中，而學後測驗的結果也告訴我們，八年級學生已能發展解決餘事件問題的能力，並從樹狀圖的結構理解餘事件，如圖 20。

9. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$ 。
 選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，
 而她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{3}{7}$ 。

+2 (1) 金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
 +2 (2) 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的
 機率為多少？

① $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{3} \times \frac{3}{7}$
 $= \frac{3}{21}$

A: $\frac{1}{3}$ A: $\frac{3}{21}$

圖 19 未接受機率教學的學生便能使用餘事件概念解題

7. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{3}{4}$ 。

選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，

則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{4}{7}$ 。

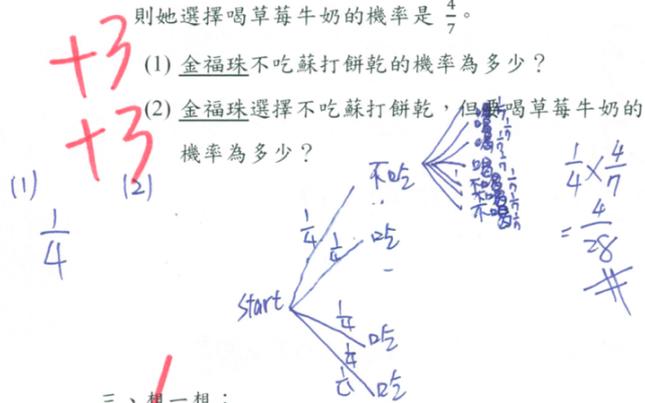


圖 20 學生從樹形結構理解餘事件

● 頻率機率的不確定性思維的解題思考

鼎猩工廠共生產 2500 個燈泡，從中隨機抽出 200 個做測試，其中有 5 個燈泡是瑕疵品，則在整批燈泡中，可能會有幾個是瑕疵品？

在學前測驗，多數學生會使用七年級下學期學到比與比例式作答此題。在機率教學中，雖未特別提及如何計算頻率機率，但透過多個生活實例的講解讓學生感受頻率機率，所以在學後測驗時，從大多數學生的解題過程中看出，學生學會先求出燈泡的瑕疵率，再乘以總樣本數 2500 個，進而求出瑕疵品的數量。由此也可見，他們在機率思維上的提升。

(4) 樹狀圖

將樹狀圖的試題分析後，將其答對率和進步幅度整理於表 17。樹狀圖測驗的是學生繪製樹狀圖以解決機率問題之能力，經過機率教學後，學生皆能學會繪製樹狀圖，所以各題皆為正成長。但其中有兩題的進步幅度較不明顯，分別為 III-B-6 和 III-B-9-(2)，其中 III-B-6 題的進步幅度不明顯的原因為學生的題意理解上產生錯誤，但從學生的作答過程中，可看出他們都會使用樹狀圖解決機率問題，甚至還可能說明學生可能隱含條件機率的觀念，但可惜的是證據不夠充裕；III-B-9-(2)題則測驗獨立性概念，因在課程中並未特別強調如何解決獨立性的問題，故可解釋為進步幅度較不明顯的原因，但從進步幅度中，仍可說明樹狀圖的樹形結構有助於理解獨立性概念。以下針對各題逐一探討：

表 17

機率測驗－樹狀圖的答對率與進步幅度

認知向度	程序執行		數學思維的解題思考	
測驗	學前	學後	學前	學後
答對率	0.05	0.23	0.02	0.47
(對應題號)	(III-B-6)	(IV-B-5)	(III-B-8)	(IV-B-9)
進步幅度	0.18 (低於平均數且未滿 1 個標準差)		0.45 (高於平均數且超過 1 個標準差)	
答對率	0.11	0.51	0.07	0.17
(對應題號)	(III-B-7)	(IV-B-8)	(III-B-9-(2))	(IV-B-7-(2))
進步幅度	0.40 (高於平均數且超過 1 個標準差)		0.10 (低於平均數且超過 1 個標準差)	

● 樹狀圖的程序執行

劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則小希是第一個、江辰是第二個被家庭訪問的機率為多少？

從學生的作答過程中，發現答錯此題的學生，約有 23%其題意理解錯誤，將題目理解成「小希為固定第一個被家庭訪問，所以江辰被第二個家庭訪問的機率為 $\frac{1}{2}$ 」，導致繪製錯誤的樹狀圖，重點是他們都會使用樹狀圖解決此題，如圖 21。這表示學生在閱讀機率問題時，可能產生文字邏輯上的混亂。但或許我們還可以猜測學生這樣的理解是否隱藏條件機率的觀念，安排小希為第一位之條件下，則江辰為第二之機率為 $\frac{1}{2}$ 。但可惜的是學生紙本所呈現證據不夠充裕，不過是一項值得後續探討的事情。

● 樹狀圖的程序執行

胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？

從此題的作答過程中，我們發現多數學生仍有樣本空間的迷思，以下為最常見的兩種迷思，其中一種為不懂得樣本分群的思維，認為每一樣本分群皆為對稱，無法理解各分群樣本所對應不同的機率，如圖 22；另一種為無法使用正確的運算符號，如圖 23。但從數據中還是可以發現經過完整的機率教學後，答對率提升至 51%，且大多數學生皆能畫出正確的樹狀圖並作答正確，如圖 24。部分學生已能理解獨立性概念，如圖 25，說明樹狀圖能使學生更有脈絡地思考和解決機率問題。

5. 劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則江辰是第一個、小希是第二個被家庭訪問的機率為多少？

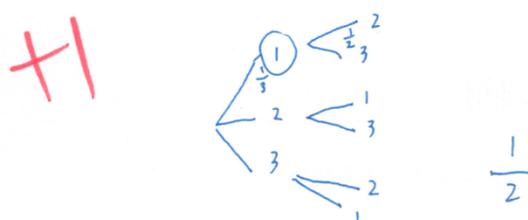


圖 21 學生可能已發展條件機率概念

8. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？

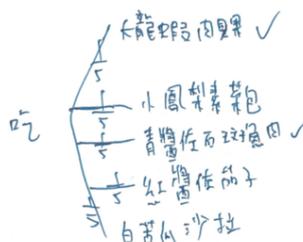


圖 22 學生無法理解樣本分群的思維-2

8. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

圖 23 學生無法根據題意，使用正確的運算符號-2

8. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？

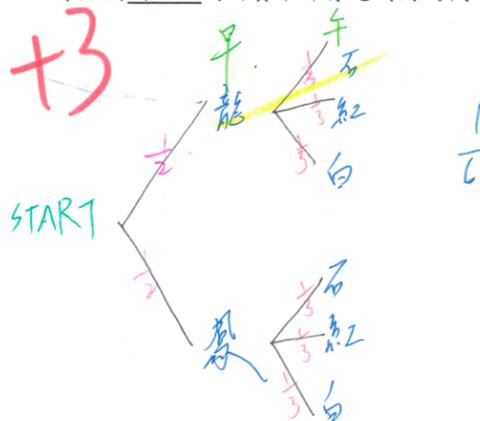


圖 24 學生能使用完整的樹狀圖解決機率問題-3

8. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？

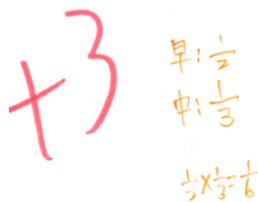


圖 25 部分學生具備獨立性概念

● 樹狀圖的數學思維的解題思考

川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？

經過完整的機率教學後，在學後測驗，約有 47% 的學生能答對此題，略為可惜的是，答錯的學生中，有多數皆能畫出完整的樹狀圖，如圖 26。但有些學生會因無法完整判斷出猜一拳不分勝負的情況（即未考慮三人皆出不同拳種仍是平手的狀況），而造成答題錯誤。

9. 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？
提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況囉！

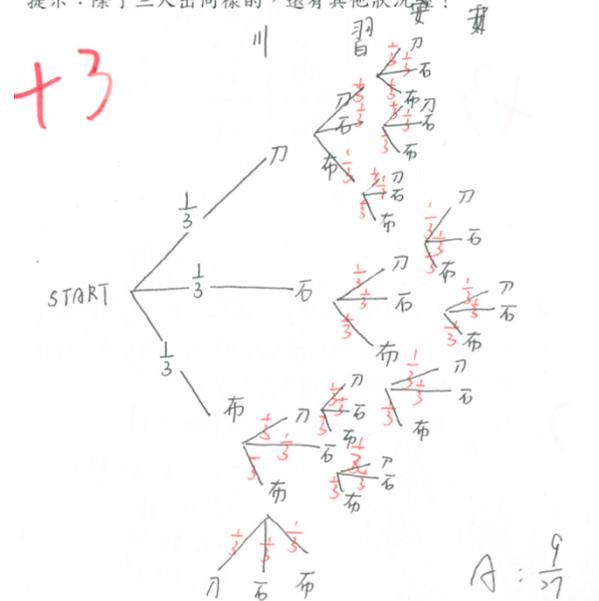


圖 26 學生能使用完整的樹狀圖解決機率問題-4

● 樹狀圖的數學思維的解題思考

金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{3}{7}$ 。金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

在試題設計時，此題即為測試學生是否能在未教授樹狀圖解決獨立性所使用之技術下，可自行依據樹狀圖結構，解決此類問題。在學前測驗，僅有 7% 的學生答對，人數比例與單維彰等人（2018）的研究結果大致相同，所以大致可以推測北區的學童中，僅少數具備獨立性的概念與解題能力。經過完整的機率教學後，答對率提升至 17%，可以說明學生對於樹狀圖之使用，可啟發解決獨立性概念之技術，如圖 27。然而從答題錯誤學生的作答過中，發現學生未考慮吃蘇打餅乾有對應的機率值，僅考慮吃和不吃兩種可能，故作答不吃蘇打餅乾的機率值為 $\frac{1}{2}$ ，由此亦可說明八年級學生尚未具有解決不對稱事件問題的能力，如圖 28。

7. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{3}{4}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{4}{7}$ 。

(1) 金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？ $\frac{1}{4}$

(2) 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？ $\frac{1}{7}$

(1) $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

三、想一想：

圖 27 學生能從樹形結構理解獨立性概念

7. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{3}{4}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{4}{7}$ 。

(1) 金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？ $\frac{1}{4}$

(2) 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？ $\frac{1}{7}$

(1) $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

A = $\frac{1}{4}$

圖 28 八年級學生尚未具有解決不對稱事件問題的能力

(5) 樹狀圖

將學前測驗與學後測驗中，繪製出正確的樹狀圖並作答正確的學生比例以長條圖表示，如圖 29 所示。從圖 29 可看出，在尚未教授樹狀圖之前，學生在解題時，不會使用樹狀圖，且無法解決機率問題。但經過完整的機率教學後，超過半數的學生能畫出樹狀圖，依據題意判斷出問題所問之解。表示樹狀圖是需要經過教學，非自身能依據經驗而使用之解題工具。此外，從學生的紙本中，我們也發現有部分的同學能從樹形結構中，已能解決超出國中範圍的課程，例如：獨立性概念和乘法原理。

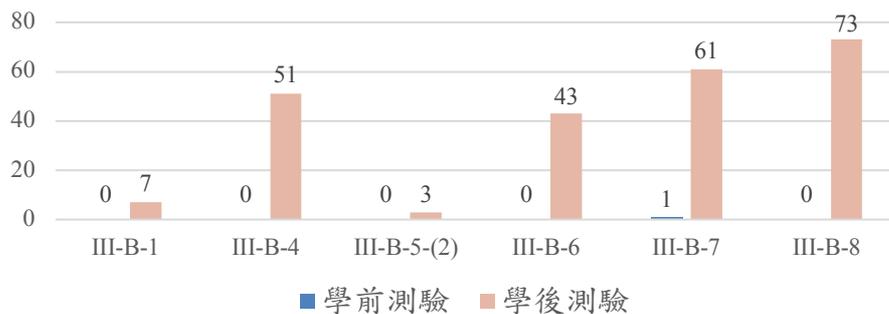


圖 29 學前測驗和學後測驗使用樹狀圖解題之人數長條圖

二. 延後測驗對學後測驗

事後比較結果顯示，「延後測驗對學後測驗」 p 值大於 0.05，統計不顯著。且平均分數之差為正數，表示學生在機率教學後六個月，其解題思維略顯成熟。然而，學生在延後測驗的表現，仍存有機率迷思和錯誤類型，以下進行探討。

研究者將每題學後測驗和延後測驗的答對人數以長條圖表示，示如圖 30。由圖 30 中，可以看出各題在學後測驗和延後測驗的答對人數差異不大，表示機率實驗課程的成效良好。而從圖中，III-B-1 到 III-C-1 可說明，臺灣的學生在計算上呈現一個穩定的能力，或許這是因為在國中階段代數主題訓練中，所得到的成長，但是在圖中 III-A-1 到 III-A-4，顯示學生在概念上的理解仍有一些迷思，例如：運算符號的使用、研究者也發現不論學生的機率概念程度高低，都會產生這些迷思。以下將針對這些題型進行說明。

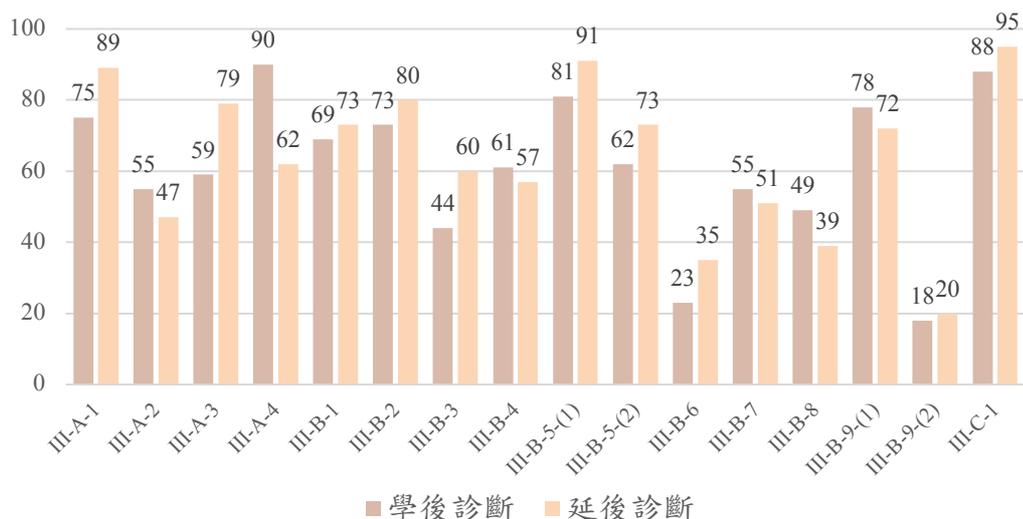


圖 30 學後測驗和延後測驗各題答對人數長條圖

- (1) 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。

在學前測驗與學後測驗的分析中，此題的進步幅度就較不明顯，顯示學生在樣本空間的分群上仍有些迷思。然而在機率教學過後六個月，學生的迷思仍存在，且有一些原本有正確概念的學生，在經過這段時間後，也開始存有這些迷思。這是一件非常值得關注的事情，顯示在機率課程內容的編排上，仍需多加強此部分的概念。

- (2) 投擲一顆 1~6 點的公正骰子(意即骰子每一面被擲出的機會相等)，則投擲一次

丟出「12點」的機率為 $\frac{12}{6}$ 。

學生多能判斷問題之對錯，但理由欄為空白，研究者並無從得知學生答案空白的理由。

- (3) 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？

此題在學後測驗時，學生就因無法判斷題意中的「不分勝負」而無法答題，其次，此題的樹狀圖較為複雜，有些學生無法完整畫出樹狀圖，再來為樹狀圖的分類，學生無法判斷要如何填入樹狀圖上方的分類，使得無法繪製完整的樹狀圖，如圖 31。顯示在樹狀圖的教學上，仍需釐清學生此部分的概念。

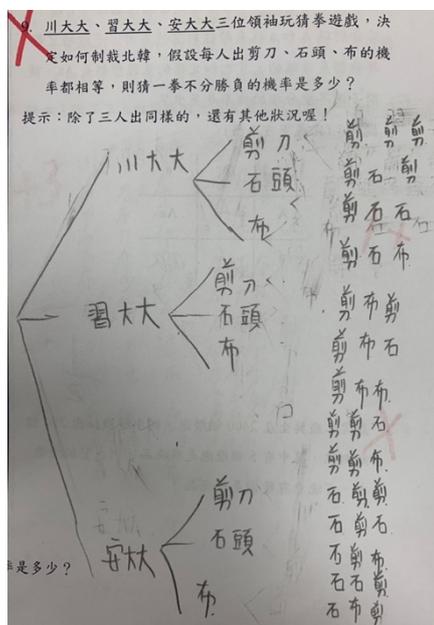


圖 31 學生在繪製樹狀圖時，無法完成正確的分類

在延後測驗中，將與學後測驗之各題使用樹狀圖解題之人數以長條圖表示，如圖 32。雖然使用樹狀圖解題的人數下降了，但是每題的答對率並未有太大的差異。研究者分析學生的文本，發現不僅機率教學保留效果非常好，且研究對象隨著年齡的增長，其機率概念有所成長。相較於學後測驗，更多的學生在不使用樹狀圖的狀況下，能使用乘法原理或者獨立性概念解題，如圖 33，甚至還有學生已能區分運算符號的使用，如圖 34。特別是 III-B-9-(2)該題，在學後測驗時，八年級學生無法具備解決不對稱事件之能力，但在延後測驗中，學生能畫出不對稱事件的樹狀圖，並解決問題，說明九年級學生已能學習不對稱事件之問題，如圖 35。

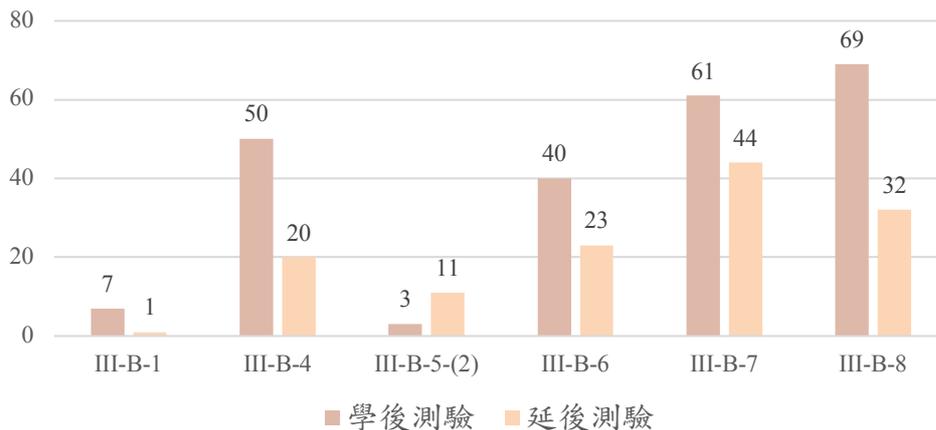


圖 32 學後測驗和延後測驗使用樹狀圖解題之人數長條圖

5. 有兩個 1~6 點的公正骰子 A 與骰子 B，A 骰出現的點數為 a ，B 骰出現的點數為 b ，則點數 a 與 b 依序所組成的數為奇數的機率是多少？
 例如：當 $a=1, b=3$ 時，所組成的數為 13。
 此兩數所組成的數為 $10a+b$

+3
 $\therefore 10a+b$ 為奇數
 b 必為奇數
 $\therefore \frac{3}{6} = 50\%$

6. 劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則江辰是第一、小希是第二個被家庭訪問的機率為多少？

+3
 第一次：每人機率皆為 $\frac{1}{3}$ ，得江辰被抽到的機率為 $\frac{1}{3}$
 第二次：剩兩人的機率皆為 $\frac{1}{2}$ ，得小希被抽到的機率為 $\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

7. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？

+3
 早餐： $\frac{1}{2}$
 午餐： $\frac{1}{3}$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

8. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{3}{4}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{4}{7}$ 。

+3
+3
 (1) 金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
 (2) 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

\therefore 吃蘇打的機率為 $\frac{3}{4}$
 \therefore 不吃的機率為 $\frac{1}{4}$
 (1) 喝草莓牛奶的機率為 $\frac{4}{7}$
 $\Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

9. 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？
 提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況囉！

+3
 川 \rightarrow 剪刀, 石頭, 布
 習 \rightarrow 剪刀, 石頭, 布
 安 \rightarrow 剪刀, 石頭, 布
 \therefore 可能出現 27 種狀況
 平手為 9 種
 $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

圖 33 學生能使用乘法原理或者獨立性概念解題

9. 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？

提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況喔！

A: $\frac{9}{27}$

	剪	石	布
川	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
習	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
安	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

剪: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

石: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

布: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

三個不一樣: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

率是多少? $\frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27}$

$= \frac{9}{27}$

圖 34 學生已能區分運算符號的使用

8. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{3}{4}$ 。

選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{4}{7}$ 。

(1) 金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？

(2) 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

(1) $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ #

(2) $\frac{4}{28}$ #

圖 35 學生能使用樹狀圖解決不對稱事件之問題

第二節 機率課程內容

第一堂課

- 教學目標：介紹機率是什麼，理解機率值的範圍，發展主觀機率猜測機率值。主觀機率、古典機率、頻率機率、機率值範圍的問題與迷思討論。澄清時進效應和賭徒效應（陳欣民、劉祥通，2002）。
- 預設學生學習困難：無法具體說出機率是什麼，認為機率值範圍超過 1，無法使用機率語言解釋機率思維，無法辨識公正與不公正試驗，樣本空間錯誤，無法理解機率值為理想值。
- 教具：撲克牌、骰子。
- 環境：面向講臺單排座，座位與座位間留有可讓教師行走的走道。教室上方有投影設備將上課內容投放至講臺上的投影幕。
- 媒介：機率相關影片（臭手光洙）。
- 課程內容：

教師準備一副撲克牌，說明若參與課堂中進行的活動，可獲得一張撲克牌，教師亦抽取一張撲克牌，蓋住牌面上的花色與數字，貼在黑板上，先賣關子，不告訴學生撲克牌有什麼用處，引起學生好奇，為了得到撲克牌而積極參與課堂活動。

教師以提問的方式引導學生認識「機率就是將不確定的事情用數字表示出來」，如下。

師：機率是什麼？

生：機率就是幾分之幾，小數點。

師：那什麼事件可用「幾分之幾」或「小數點」表示呢？

師：你今天與隔壁同學告白的成功機率或是你今天被老師罵的機率諸如此類的事情，是不是都可用機率去表示呢？

生：對。

師：那麼老師剛剛講的例子是確定還是不確定的事呢？

生：不確定的。

藉由生活中的物品，讓學生知道一定不可能發生的事件其機率值為 0；一定會發生的事件其機率值為 1，且機率值的範圍介於 0 至 1 之間。

師：那麼機率有沒有一個範圍呢？

生：（同學們相互討論，有著不同的答案。）

師：（教師走到教室中央，拿出骰子）你們觀察這顆骰子，骰子上有 1~6 點，請問我丟出 7 點的機率是多少呢？

生：0%。

師：（拿出一疊花色為紅心和方塊的撲克牌）若從中隨機抽取一張撲克牌，牌的花色是紅色的機率是多少呢？

生：100%！

師：很好，大家都答對了！但其實我們在表示機率值時不一定要用%，我們知道 0% 等於 0，100% 等於 1。所以我們知道機率值的範圍也會介於 0 到 1 之間。

師：接下來，我們要看一段影片。影片裡的光洙每次玩遊戲都輸了，那他是真的運氣不好嗎？還是可以用科學一點的方式來解釋呢？

播放機率相關影片（臭手光洙），播畢後請三位學生簡述感想，教師先不給予回饋。

教師在教室隨機走動，與學生互動，傳遞麥克風，當哪位學生拿到麥克風時，則由該學生回答問題，回答問題的學生可得到一張撲克牌。藉由是非問答進行主觀機率、古典機率、頻率機率、機率值範圍的問題與迷思討論和澄清時進效應和賭徒效應。在主觀機率請學生寫下第 2 及第 4 題的答案，但不給予回饋。

藉由生活經驗澄清學生的迷思。

師：統一發票有「中獎」或「不中獎」兩種可能，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。

生：（回答對和錯的學生各占半數）

師：中獎和不中獎的發票哪個多呢？

生：不中獎的發票比較多。

師：我們可以知道不中獎的機率比較高，這樣中獎機率還會等於 $\frac{1}{2}$ 嗎？

生：不會，而且會小於 $\frac{1}{2}$ 。

師：某個醫生手術的成功率為 $\frac{1}{10}$ ，已知該醫生的前九位病患手術皆失敗，一病患為該醫生的第十位病患，那麼他的手術一定會成功。

生：（討論熱烈）

師：我們說的機率值 $\frac{1}{10}$ 只是理想值，第十次醫生未必會手術成功。

回饋是非問答前的影片討論。

師：所以從剛剛的問答中，我們知道遊戲的機率值是可以計算出來的，但是選擇是不確定的。所以光洙會這麼衰是因為他的選擇，並非他抽到不好結果的機率特別高。

最後揭曉貼在黑板上的撲克牌，若牌面上的數字比老師的牌大者，即可獲得獎勵，此互動的意義在於除了讓學生引起學習動機外，亦可讓學生體驗不確定性思維。課堂結束。

第三節 學生機率課堂體驗之回饋

在課後回饋中，讓學生描述「在閱讀和使用機率教材後，認為自己學到什麼」的開放性問題。研究者從學生的回饋中，發現多數學生皆表示自己學會機率和學習到如何繪製樹狀圖以解決機率問題，顯示機率教學課程帶給學生教學上有益的幫助。但因版面有限，故不放上全部學生的回饋單，僅挑選其中幾份回饋單為代表，並將回饋單進行分類後並討論之。

第一種類型為從未接觸過機率的學生，表示之前完全不懂機率概念，在經過完整的機率教學後，建立完整的機率概念，如圖 36；第二種為曾經接觸過機率的學生，但擁有錯誤的機率迷思，在經過完整的機率教學後，澄清原本錯誤的機率概念，學到正確的機率知識，如圖 37；第三種類型為已有一些機率概念的學生，在經過完整的機率教學後，學到更多機率知識，並能以樹狀圖解決更多層次的機率問題，如圖 38。

6. 你閱讀和寫過這本書後，你學到了什麼？

原本完全不會機率，上了課後會了。

6. 你閱讀和寫過這本書後，你學到了什麼？

本來對機率沒很大的概念，但上了之後學到很多！

圖 36 學生回饋單-1

從學生的回饋單中可以看出，經過完整的機率教學後，機率課程內容有助於學生建構完整的機率概念，並有效地澄清在學習機率時，產生的迷思，也說明了樹狀圖能幫助學生系統性地學習機率和解決更多的機率問題。

6. 你閱讀和寫過這本書後，你學到了什麼？

從以前覺得機率最高
是100到現在知道最多
是1 差了100倍，收穫多多！

6. 你閱讀和寫過這本書後，你學到了什麼？

能學到正確的機率觀念
I feel very nice!

圖 37 學生回饋單-2

6. 你閱讀和寫過這本書後，你學到了什麼？

對機率有更多的認識，也清楚知道該如何計算。

6. 你閱讀和寫過這本書後，你學到了什麼？

我學到許多關於機率的知識，也學會畫樹狀圖解決許多題目，
真是獲益匪淺。

圖 38 學生回饋單-3

第四節 驗證機率教學

從學後測驗，我們可以得知經過完整的機率教學後，學生的機率思維有所提升，但在實際課程中，仍可依據學生的回饋，調整教材。以下為研究者根據在教學現場和學後測驗得到的回饋，對於課程和教材提出的建議與看法。

一. 發展機率值 $\frac{1}{m}$ 至 $\frac{n}{m}$ 的概念

在講解古典機率時，研究者先透過實際物品的舉例，讓學生從實例中感受如何計算機率值。但在編寫教材時，未考慮到書本的實例中，事件發生的情況僅有一種，並未擴展多種情況的機率值。所以若能對教材進行些許調整，使學生能夠發展機率值 $\frac{1}{m}$ 至 $\frac{n}{m}$

(分母 m 為所有可能發生的結果數，分子為該事件發生的個數) 的概念，對於學生建立古典機率的觀念會更加有幫助。

二. 貼近學生的生活經驗

在編製「列舉」時，為使題意單純一點，所以教材中僅考慮到兩人猜拳時，只出 2 種拳種的情況；三人猜拳時出 3 種拳種，並且不考慮兩人以上出同樣拳種（亦即一人 1 種拳種）的情況。但在教學後，研究者認為這樣的題意反倒使學生不好理解，且侷限學生的思考，認為應將題意回歸為兩人可出 3 種拳種或兩人以上出同樣的拳種等題型，這樣的出題方式也更貼近學生的日常生活，使學生在練習列舉時能駕輕就熟。此外，在講解數對列舉時，亦可加入更多古典機率的問題，例如：在課堂中，要求學生列舉出投擲 2 顆骰子的所有結果時，可再加入「投擲 2 顆公正的骰子，2 顆骰子出現同點數的機率為何？」等問題，學生不僅需要將所有情況列舉出來，還能應用第 2 堂課所學的古典機率，解決機率問題。

三. 樣本空間分群

從學後測驗中，看出學生對於樣本空間分群的概念仍不清楚，容易以二分法區分樣本空間，例如：試題 III-B-7 中，午餐選擇有三種（其中一項有肉），但學生會以吃肉和不吃肉區分樣本空間，認為午餐吃到肉的機率為 $\frac{1}{2}$ 。雖然這部分在教材中已被提及，丟擲筊杯時，須考慮四種情況，提醒學生常見的錯誤類型為分為「不獲得神明認可」及「神明認可」兩種情況。研究者認為倘若老師能在課堂中多加敘述，例如：生產手機時，會有瑕疵品，但不能以二分法「正常手機」和「瑕疵手機」為買到不良品的機率，應以實際生產手機的瑕疵率為考量，以更多生活實例，必能使學生對於樣本空間分群的概念更加理解。

四. 樹狀圖的形式

在介紹樹狀圖的形式時，有直立的樹狀圖，也有橫躺的樹狀圖，因為樹形結構只是一個概念，所以沒有限定單一的形式，但發現學生若繪製直立的樹狀圖時，在往後較無法使用樹狀圖以解決機率問題。所以之後研究者便統一樹狀圖的形式，和學生說明縱然

樹狀圖有多種形式，但在解決機率問題時，仍需使用書本上的樹狀圖形式（橫躺的樹狀圖），讓學生建立繪製樹狀圖的基礎，使樹狀圖可以成為幫助機率學習的工具。

第五節 教學工法之分享

DE 提供一套從事數學教育研究的方法論，包含教學設計與課堂實踐的規準，雖然教學者在教學前需要較多的前置作業、學生教學現況分析以及 DE 各階段的比對學生可能遭遇的問題，但它能避免研究上產生的阻礙以及排除預期上的困境。DE 也給予一套研究設計的程序，但教學目標內容、情境都是由研究者所自行評估與設計。相較於臺灣目前的教育現況，DE 重視的是教學創造適合學生的數學情境以及學生須負更多的課堂責任，例如：課堂參與，所以 DE 在課堂中也產生很大的幫助，學生分組投入活動，產生論述，達到研究預測目標。研究者實際操作一回之後，獲得肯定的經驗，也歸納出在使用 DE 上的難處。以下分享研究者身兼設計者與教學者，所遭遇的困境。

首先，對應機率概念層次和適學年齡，多項研究指出機率教學可至少提前至八年級，但對照我國機率課程，我國的機率教學實在太晚，且僅強調嚴謹計算的古典機率，所以研究者擘畫一套全新的機率課程，除了將機率課程提前至八年級外，還需將教學內容擴展至主觀機率與頻率機率，在主觀機率、頻率機率和古典機率三種機率類型的交互應用下，以建立完整的機率概念。但這是八年級學生第一次接觸到「機率」，所以在分析時，無法真實掌握學生的學習現況，對於學生的機率概念探討，研究者需收集大量文獻及與現場教師做大量的討論，探討八年級學生能學習哪些機率概念以及會產生哪些機率迷思。

再者，機率的知識出現在多個領域，在佈置教學情境時，研究者需考量機率如何應用在各個領域，使機率概念更能夠貼近學生的生活，以創造解決機率問題的情境。然而，研究者所學有限，很多知識需請教各領域專家，必要時須組織知識社群。在課室中，會有很多的教學變數，必須找到研究假設與前置分析的關聯性，所以研究者必須謹慎地選擇教學變數，在教學中所產生的影響是否能回應研究目標。我們必須分辨出什麼樣的教學變數能使學生自行發展有效的學習策略。

最後，由於本研究之機率課程無法產生對照組，且臺灣目前尚未有八年級機率教學之相關文獻，故在傳統的實驗設計上是無法比較的。但本研究所採用之教學工法，是針

對內部的比較，而非外部的比較（實驗組與對照組），故本研究倘若不使用教學工法設計課程，則在研究分析上就會產生非常大的困難。

以上為研究者的分享，提供給未來以 DE 從事教學設計的教育同仁參考。

第六節 結果討論

一. 自發性機率概念

以下歸納出在學前測驗時(未接受機率教學)，學生具備什麼樣的自發性機率概念，以及這些自發性的概念中，對於機率課程有哪些幫助。

(1) 以生活經驗發展的機率概念

在 III-A-2「發票中獎機率」一題，發現多數學生能從生活經驗中判斷發票中獎未達 50%，故不該僅以二分法「中獎」及「不中獎」判斷中獎的機率值。在課堂中，當提問何謂機率時，研究者也發現學生對於「機率」這個名詞不陌生，能從生活經驗中說出機率的例子，例如：降雨機率，但也因為降雨機率的例子，學生認為機率和百分率有關，這可以說明學生雖有自發性的機率性概念但卻無法使用機率語言具體地表達機率的定義。但經過完整的機率教學後，學生也能接受機率能以分數或小數的形式表示。

正是因為生活經驗與機率有著密不可分的關係，在機率教學中，研究者也使用大量的實例，例如：小明被老師罵的機率或是阿美告白成功的機率，皆為不確定的事情，使得學生加瞭解和體會機率的含義。

(2) 主觀機率及機率值的範圍

在國中現行機率課程的編排，主觀機率的部分毫無內容陳述，但在學前測驗或是課堂中與學生的問答，可以說明學生自發地具有主觀機率概念，例如：評估自己考上某高中的機率或是踩到狗大便的機率。而且從學生的回答中，也發現學生在未接受正式的機率教學前，已略知機率值的範圍介於 0 至 1 之間，在機率教學中，也以絕對不可能發生的事件其機率值為 0，反之一定會發生的事件其機率值為 1，以明確定義機率值 0 和 1 所代表的意義。

(3) 餘事件

雖然在現今課綱，餘事件的課程為高中階段的範疇，但在學前測驗中，餘事件的答對率已高達 62%，顯示八年級學生可能已先發展餘事件的概念。與指導教授討論後，決定將餘事件加入課堂中，並從「剩餘」字面上的意思教導學生餘事件的概念，例如「全」班 30 人，女生為 17 人，其「餘」為男生，故男生有 $30-17=13$ 人。對照於機率概念，只要先明白「全」機率為 1，則若踩到狗屎的機率為 0.4，其「餘」是「不」踩到狗屎的機率，故為 $1-0.4=0.6$ （單維彰、許哲毓，2019）。經過教學後，學生對於餘事件的思考脈絡也變得更加地完整。

二. 八年級學生的機率迷思

經過完整的機率教學後，雖然學生的機率思維有明顯的進步外，但仍有些常見的迷思，說明學生對於此概念的理解不易外，也表示在機率教材和課程內容上，需再微幅調整。以下說明：

(1) 機率值為一理想值

經過完整的機率教學後，在 IV-A-3「嘟嘟到桃園機場追星，前五次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第六次她不用去追星」的理由中，有少數學生寫下理由「若遇見明星的機率為 $\frac{1}{6}$ ，前五次未遇見明星，則第六次一定會遇見」，表示對於理想機率值的定義不夠強烈。所以研究者將教材再調整，加強學生對於理想值的定義，例如：舉更多相關的例子，使得學生再加深古典機率（理想值）與頻率機率之間關係的印象。

(2) 樣本空間分群

在解決機率問題中，最常見的迷思即為樣本空間的分群，學生容易以二分法區分樣本空間，例如：IV-A-2 一題，發票有中獎或不中獎兩種可能，故中獎機率為 $\frac{1}{2}$ ，以及 IV-A-3 一題的理由中，遇見或不遇見偶像兩種可能，故遇見機率為 $\frac{1}{2}$ ，這種迷思為學生無法判斷正確的樣本分群，造成答題錯誤。這也顯示在機率課程中對於主觀機率的訓練仍不足，對於首次學習機率的學生，可先使用主觀機率猜測發票中獎

機率值，再以頻率機率實際操作的方式，驗證主觀機率值的正確性，如此，亦可強化三種機率類型之間的連結。

三. 繪製樹狀圖時，常見的錯誤類型

在繪製樹狀圖時，學生最常發生以下問題，(1) 無法將文字敘述轉換為樹狀圖：學生看得懂題目，但無法繪製出樹狀圖，仍需使用列舉將所有結果列出來。(2) 樹狀圖的繪製不夠完整：學生易忽略在樹枝上寫機率或末端寫上結果等小細節。(3) 無法使用樹狀圖判斷可能結果：學生在畫出完整的樹狀圖後，無法根據題意，判斷出符合題意的可能結果。這三者問題的發生原因應為學生剛開始接觸樹狀圖而產生的生疏感，經過反覆練習及熟悉使用樹狀圖的應用後，便較無這些問題。

對於八年級學生而言，樹狀圖相較於主觀機率或頻率機率，是較不直觀的概念，也確實屬於陌生的技術，是一門不同於以往僅強調數學計算的課程，所以學生在學習樹狀圖時，也容易有較多的問題發生。以下說明學生在繪製樹狀圖時，常見的錯誤類型：

(1) 樹狀圖分類

學生最不易克服的問題為在繪製樹狀圖時，會將分類搞混，例如在學習繪製「猜拳」的題目時，學生無法判斷最上方的分類名稱要填入人名或者拳種，使得無法繪製完整的樹狀圖。研究者思考到此一嚴重問題，樹狀圖應該是幫助學生有邏輯地架構機率問題，而非使學生產生困惑，在此同時，也發現一項有趣的事實，學生在列舉時卻無此困難發生，有鑑於此，研究者將利用列舉作為建立樹狀圖之鷹架，如甲、乙兩人猜拳，若以列舉的方式，學生能直覺地寫出所有可能，那學生是如何分類的呢？若以相同模式去思考，是否能較輕易地繪製出樹狀圖呢？猜拳中，我們會紀錄（剪刀，石頭）、（剪刀，布）等 9 種兩人猜拳的所有可能，這是以人會出什麼拳種為思考的出發點，進行列舉。因此，研究者認為同樣的思考模式，可套用在樹狀圖的分類上，接著繪製甲或乙所屬階層的拳種，便可知道分類上要填入人名。學生對於此教學內容改變的接受度，縱使我們在現階段無法得知明確，但相信此一改變相較於先前的教學內容，能使學生對於繪製樹狀圖的細節更加清楚，如圖 39。

(2) 不對稱事件的機率值

在課堂中，每一根樹枝皆是均勻的機率。這樣的論述，學生是能接受這樣的操作。但在不對稱事件下，每一根樹枝變成非均勻的機率。學生在繪製時，無法正確辨認在不對稱事件下，每一根樹枝所代表之機率值。例如：IV-B-6 一題中，不同組合的獎品，有各個對應的中獎機率，其中三個的組合中含有衛生紙，但是學生在作答抽中衛生紙的機率時，會寫下 $\frac{3}{5}$ ，而未考慮其對應的機率值；以及 IV-B-7-(2) 一題，學生在作答時，未考慮吃蘇打餅乾有對應的機率值，認為吃與不吃，故選擇不吃蘇打餅乾的機率值為 $\frac{1}{2}$ 。對此，亦說明了八年級的機率教學中不宜太過複雜，可能只適合對稱事件，即每一根樹枝的機率皆是相等的。

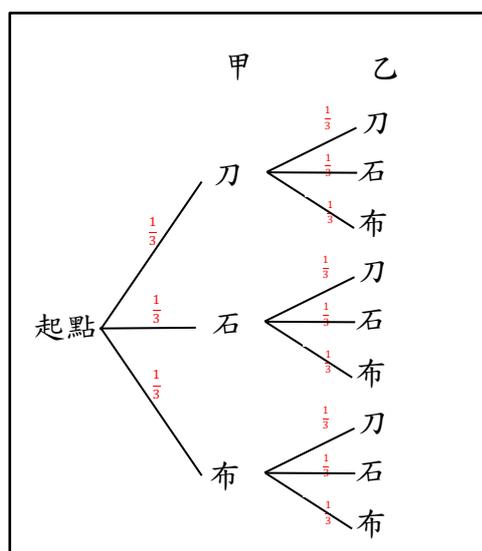
步驟1. 在列舉甲、乙兩人猜拳情況時，表示列舉的符號中要填入什麼呢？

步驟2. 引導學生思考：該填入（甲，乙）還是（剪刀，石頭）呢？

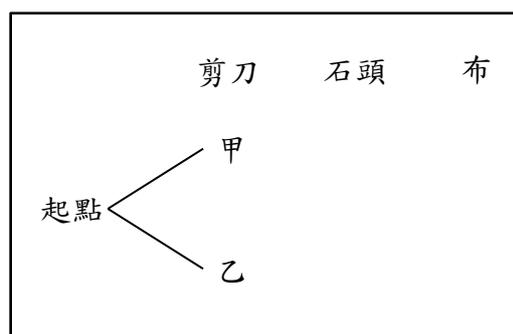
步驟3. 學生能判斷出應填入（剪刀，石頭），即括弧中應填入甲和乙所有可能出的拳種。

步驟4. 所以在繪製樹狀圖時，應以甲和乙所有可能出的拳種為分類名稱。

步驟5. 教師畫出正確和錯誤類型，幫助學生釐清樹狀圖分類。



正確類型



錯誤類型

圖 39 樹狀圖的分類教學

(3) 加法原理與乘法原理

在學生的作答過程中，發現在繪製出正確的樹狀圖後，學生無法根據題意判斷該相加或相乘，亦即學生在使用數學工具的能力上沒有問題，但卻無法根據題意判斷使用正確的運算符號。所以在八年級的機率課程中，不需過分強調該相加或相乘，僅需利用樹狀圖的樹形結構，強調將節點的機率值加總之概念即可。

四. 涉及高中階段機率概念的表現

在機率課程及學後測驗中，有部分的八年級學生展現超前或不是國中課程上的技術方式答題，說明樹狀圖有助於機率思維的延伸，以下簡述：

(1) 乘法概念

在作答過程中，發現有些學生僅畫出部分的樹狀圖，便能以對稱性推導出總樣本數，即乘法原理，說明樹狀圖能幫助學生系統性地列出樣本空間。

(2) 獨立性

接受過機率正式課程的八年級學生，出現了像「獨立事件」的思維，而這思維的課程雖然為高中階段的範疇，但藉由樹狀圖之結構，來思考獨立事件是非常有幫助的。

(3) 條件機率

雖然 IV-B-5 該題，顯示部分學生能夠達到條件機率概念層次，但證據不足（亦有可能是題意敘述問題）以顯示學生準備好學習條件機率。

第五章 結論與建議

第一節 結論

一. 機率課程的成功

經過完整的機率教學後，除了看到在量化數據資料上，學生的機率測驗分數明顯地提升外，從學生的作答過程中，亦發現其機率思維的提升，以及解決機率問題時的能力進步。這些都顯示機率教材和課程內容編製的成功，除此之外，也說明學生確實可以提前在八年級學習機率概念，包含主觀機率、頻率機率和古典機率，且能以樹狀圖為機率技術工具，在樹枝上寫機率，從學生的回饋中，也說明樹狀圖的圖形結構能幫助學生解決機率問題，甚至能達到更高層次的機率思維。

二. 自發性機率概念

單維彰等人（2018）透露學生在未經學校正式的數學課程之前，已經擁有某種程度的機率知識。將該篇文獻之結論與本研究對照，發現未經正式機率課程的八年級學生，已經自行發展了主觀機率與古典機率的觀念，不同的是，本研究的結果顯示八年級學生亦發展了頻率機率、餘事件等概念。在機率教學課堂上和學生的對話，研究者歸納出自發性的機率概念來自於生活經驗，顯示生活經驗與機率之間有非常大的關聯性。

三. 機率思維的發展

在機率思維的發展上，學生在未接觸正式的機率教學前，有自發性的概念發展出不同的機率層次。而在正式接受機率課程教導後，從學後測驗的數據中得知，八年級的學生已具備學習不確定性概念的能力，不僅在機率思維的提升外，在作答上，也多能以機率語言解釋錯誤的機率問題。

四. 善用機率技術工具

經由研究團隊進行機率教學後，大多數學生也能夠繪製出正確的樹狀圖，並解決機率問題。甚至更有部分學生使用超過國中課程的技術進行解題，如加法原理和乘法原理。而機率概念上亦有部分學生顯示可能具備獨立性、條件機率之能力。而在列舉方法中，

學生當下無法區分（事件①，事件②）、（事件②，事件①）為兩種不同的情況，但透過樹狀圖之圖形結構，學生對於此種事件之樣本主體更加清楚。

五. 常見的機率錯誤類型與迷思

然而在機率教學上，學生還尚未熟練地操作樹狀圖、熟悉機率概念，或思考起點存有錯誤。因此出現了一些機率錯誤類型與迷思：（1）理想值的概念：學生對於機率理想值的定義感受仍不夠強調；（2）樣本空間分群：學生容易就片面字詞區分樣本空間，而忽略原樣本空間與其機率值；（3）樹狀圖的分類：學生在繪製樹狀圖時，無法進行分類，畫出正確的樹狀圖；（4）不對稱事件的機率值：學生認為樹狀圖上的每一根樹枝上的機率值皆為相同（對稱事件）以及（5）加法原理與乘法原理：學生在解決機率問題時，無法正確使用運算符號以解決機率問題。

六. 教學工法之研究設計

雖然在使用 DE 設計課程時，需考慮的因子非常多，所以研究者在首次執行時需耗費大量的時間，但它確實能幫助研究者制定一套合適的機率課程。特別是機率課程無法產生對照組，但 DE 是討論內部的比較，故無須對照組的產生。DE 相當適合新式課程的設計與實驗。

同時，DE 讓學生在學習時有更多的責任，提供學生自主學習的機會，能夠自己延伸知識，創造數學情境，DE 在課堂中產生很大的幫助，這些都是過去的教學實驗所未涉及的。DE 也給予研究設計一套非常好的研究規準，可避免研究上產生的阻礙以及排除預期上的困境，並且能夠應用在課堂設計上，是一個非常實用的方法。

七. 學生對於機率課程之反思

在課後回饋中，有一道題目讓學生勾選在課程中喜歡的部分，如圖 40 所示，結果顯示約有 65% 的學生勾選喜愛階級遊戲（不確定性桌遊），以及現場教師的回饋，均顯示學生與現場教師皆喜愛遊戲導向的教學（徐右任，2001），而這樣的遊戲設計也可使學生不只聚焦於在遊戲中的策略思考，透過挑戰、合作與獎勵等遊戲元素，將學習遊戲化（詹明峰、張鐵懷，2018）。在桌遊操作過程中，研究者發現在短時間的課堂操作內，當學生無法購買全數的卡片時，籌碼配置應符合期望值，使得遊戲更具公平性。課後，

數學教師也給予關於機率桌遊的建議，但發現此遊戲設計偏向處理動機問題，對於學生學習問題的解決，仍須再修正（詹明峰、張鐵懷，2018），認為桌遊可串連七堂機率課程，例如在前六堂課，對於學生在課堂中的良好表現給予籌碼，使得桌遊不僅為了輔助第七堂課探討機率問題，亦可融貫在整個機率課程中。

這本書(課程)你最喜歡哪一個部分? (可複選)			
<input type="checkbox"/> 插圖	<input type="checkbox"/> 機率知識	<input type="checkbox"/> 接力畫樹狀圖	<input type="checkbox"/> 階級遊戲
<input type="checkbox"/> 例題提供你練習畫樹狀圖的機會	<input type="checkbox"/> 其他: _____		

圖 40 課後回饋單

最後，根據第四章第三節對於學生回饋之整理，在學生對於機率課程的整體感受上，多數持正面回饋，普遍認為活動能帶給他們上課的動力，特別是動手實作加深他們機率概念的印象，助於機率學習。這樣的教學模式，更減輕機率運算的程序性知識之負擔。

第二節 建議

一. 機率課程的提前學習

根據機率概念發展的研究，以及對照國外之機率課程，不確定性主題對於我國的數學教學而言，明顯已是一個迫切的需求。而本研究設計的新機率課程內容，不但符合學生的認知發展，並且經過八年級的機率教學實驗後，從學後測驗上的成績表現和理由撰寫，不僅可以看出學生能習得機率知識，還有其機率思維的提升。故透過本研究可說明，機率主題可提前至八年級學習，且有助於銜接日後的機率課程。

二. 機率課程編排的建議

本研究重構我國國中階段的機率課程，不再停留於過於基本的古典機率，以及過於數學化的運算，以樹狀圖為機率技術工具，並引導學生發展主觀機率、頻率機率的觀念，並達到處理餘事件的思維層次，使其機率概念發展脈絡能夠更加完整。

對比於現行機率課程只安排在九年級的下學期，研究者建議在機率課程的安排上，能夠重新檢視其時程，並以螺旋模式安排機率課程，結合學生的認知發展，提供一套具邏輯先後順序的機率概念組合，讓學生建構一套完整的機率知識。

然而給予學生完整的機率是有意義的，能夠幫助初學機率之學生有效地釐清機率迷思。所以本研究參考國外之機率教學脈絡，將其轉換為我國機率教學之板模。以「生活經驗」連結機率概念，透過動手實作和桌上遊戲，讓學生對於機率學習有參與感，引起其學習動機，以投入思考，且能加深對於機率學習的印象。

三. 機率工具的使用

本研究除了建議機率教學適合提前至八年級，亦發現幫助學生更有系統性地學習機率的技術工具：樹狀圖。因此，本研究建議利用樹狀圖之結構，建立一套課程模組，配合學生的機率思維，不單只強調計數的功能，將其功能拓展，使得初學者能利用圖形結構理解機率概念。但從學生的文本中，發現學生在繪製出正確的樹狀圖後，無法根據題意判斷其機率運算為加法或乘法。故在八年級的機率課程中，僅需利用樹狀圖的樹形結構，強調將節點的機率值加總即可。

四. 九年級機率課程的建議

根據學生在經過機率教學後的表現，部分學生已展現機率相乘和獨立性等超出國中課程範圍的機率概念，所以對照將現今課綱中的機率主題提前至八年級，本研究建議將屬於高中課程範疇中的獨立性與互斥和事件的概念納入九年級課程。而從學生的學後測驗及延後測驗的表現可以解釋，在應用樹狀圖解決機率問題之脈絡下，能夠藉由圖形的視覺化表徵，導入不對稱事件、互斥和事件、獨立性以及機率相乘的概念，藉由圖形的結構自然地呈現互斥與獨立性概念，以視覺化表徵讓學生使用樹狀圖來解決更高層次的機率問題。不過，在延後測驗中仍有少數題目，學生表現退步（例：III-A-4），這表示在九年級的課程中仍需加強機率基礎概念。

五. 教學工法與機率課程推廣之建議

本研究目前雖然只探討一個地區的結果，但研究團隊後續已在北區與南區展開一系列的機率教學實驗。未來，將從各區的資料中，進行教學工法的檢視以及機率課程的編

修。特別是即將實施的九年級機率教學課程，能有更完整的準備。尤其是人力與經費的籌備，期望本研究團隊能夠繼續獲得科技部之支持，讓教學工法在臺灣得以傳播到數學教育領域，供後人作為學習與參考。

參考文獻

- 李岳霞 (2015)。教孩子堅持不放棄！玩桌遊 5 大益處。親子天下雜誌電子報，69。取自 http://www.parenting.com.tw/article/506_7838-教孩子堅持不放棄！玩桌遊_5_大益處/?page=1
- 林福來 (2012)。統計教育研究—人才培育與資訊整合總計畫。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (編號：98-2511-S-003-004-M)。臺北市：國立臺灣師範大學。
- 林福來、單維彰、李源順、鄭章華 (2013)。十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究報告 (計畫編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12)。新北市：國家教育研究院。
- 侯采伶 (2016)。用桌遊來翻轉學習—以國中數學質數為例。臺灣教育評論月刊，5(5)，132-137。
- 徐右任 (2001)。和原住民學童「玩」數學：一個探究數學態度與數學遊戲的質性研究。臺東師院教育研究所碩士論文，未出版，台東市。
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。取自 http://teach.eje.edu.tw/data/files/class_rules/math.pdf
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要。取自 https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/49/pta_18524_6629744_60029.pdf
- 許哲毓 (2019)。初探教學工法。(投稿中)
- 許哲毓、單維彰 (2018)。數學「不確定性」教材與評量之分析規準。臺灣教育評論月刊，7(10)，170-177。取自 <https://shann.idv.tw/article/zheyu2018.pdf>
- 許哲毓、單維彰、劉柏伸 (2016)。樹狀圖在機率教學的應用-臺灣與英國教科書之比較。論文發表於國立臺灣大學舉辦之「第四屆師資培育國際學術研討會」，臺北市。
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛 (2005)。中小學數學科課程綱要評估與發展研究。教育部，臺北市。
- 陳欣民、劉祥通 (2002)。從兒童機率迷思概念之文獻分析談機率單元的教學與課程。科學教育研究與發展季刊，26，40-51。
- 陳德懷 (2011)。數位科技與臺灣未來二十年教學的趨勢。前瞻科技與管理，1(1)，1-13。
- 單維彰、許哲毓 (2019)。建構下一代國中階段數學課綱：機率新課程。科技部專題研究成果報告 (編號：NSC-107-2511-H-008-001)，未出版。

- 單維彰、許哲毓、陳斐卿 (2018)。以學前診測與自由擬題探討九年級學生的自發性機率概念。《臺灣數學教育期刊》，5(2)，39-64。取自 <http://shann.idv.tw/article/tjme2018.pdf>
- 單維彰、陳斐卿、許哲毓 (2017)。以裸測與擬題探討九年級學生的自發性機率概念。科技部專題研究成果報告 (編號：NSC-104-2511-S-008-002-MY2)，未出版。
- 詹明峰、張鐵懷 (2018)。遊戲學習分析架構。《數位學習科技期刊》，10(3)，1-20。
- 臺灣 PISA 國家研究中心 (2015)。PISA 數學樣本試題。取自 http://pisa.nutn.edu.tw/download/sample_papers/2009/2011_1223_mathematics.pdf。
- 劉秋木 (1996)。《國小數學科教學研究》。臺北：五南。
- Artigue, M. & Perrin-Glorian, M.-J. (1991). Didactic Engineering, Research and Development Tool: some Theoretical Problems linked to this Duality. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 13-18.
- Artigue, M. (1994). Didactic engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 27-39). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Artigue, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education. *Notices of the AMS*, 46(3), 1377-1385.
- Artigue, M. (2000). *Didactic engineering and the complexity of learning processes in classroom situations*. Communication to MADIF2. Gothembourg.
- Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winslow (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08* (p.7 - 16). Rotterdam: Sense Publishers.
- Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159-162). New York: Springer. Available from [http://www.springerreference.com/docs/navigation.do?m=Encyclopedia+of+Mathematics+Education+\(Humanities%2C+Social+Sciences+and+Law\)-book188](http://www.springerreference.com/docs/navigation.do?m=Encyclopedia+of+Mathematics+Education+(Humanities%2C+Social+Sciences+and+Law)-book188). Accessed on January 14, 2013.
- Artigue, M. (2015). Perspective on design research: The case of didactical engineering. In A. A. Bikner, K. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 467-496). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.
- Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Otani (Eds.), *Task design in mathematics education*. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.
- Bognár, K., & Nemetz, T. (1977). On the teaching of probability at secondary level. *Educational Studies in Mathematics*, 8(4), 399-404. doi: 10.1007/BF00310944

- Borovcnik, M., Bentz, H. J., & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia, & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-71). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-011-3532-0_2
- Chomsky, N. (1965). *Aspects of the Theory of Syntax*. Cambridge: The MIT Press.
- Cohen, J., & Hansel, M. (1956). *Risk and gambling: The study of subjective probability*. London, UK: Longmans, Green & Co.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel. doi: 10.1007/978-94-010-1858-6
- Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
- Herbst, P. & Kilpatrick, J. (1999). Pour lire Brousseau. *For the Learning of Mathematics*, 19(1), 3-10.
- Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers . doi: 10.1007/0-306-47201-5_7
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children* (L. J. Leake, P. D. Burrell, & H. D. Fischbein, Trans.). London, UK: Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1951)
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning : A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 465-494). New York: National Council of Teachers of Mathematics and MacMillan.
- Warfield, V. (2006). *Invitation to Didactique*. Seattle: University of Washington.

附錄一. 機率課程教案

(1) 認識機率、機率概念迷思澄清

第一堂課

- 教學目標：介紹機率是什麼，理解機率值的範圍，發展主觀機率猜測機率值。主觀機率、古典機率、頻率機率、機率值範圍的問題與迷思討論。澄清時進效應和賭徒效應（陳欣民、劉祥通，2002）。
- 預設學生學習困難：無法具體說出機率是什麼，認為機率值範圍超過 1，無法使用機率語言解釋機率思維，無法辨識公正與不公正試驗，樣本空間錯誤，無法理解機率值為理想值。
- 教具：撲克牌、骰子。
- 環境：面向講臺單排座，座位與座位間留有可讓教師行走的走道。教室上方有投影設備將上課內容投放至講臺上的投影幕。
- 媒介：機率相關影片（臭手光洩）。
- 課程內容：

教師準備一副撲克牌，說明若參與課堂中進行的活動，可獲得一張撲克牌，教師亦抽取一張撲克牌，蓋住牌面上的花色與數字，貼在黑板上，先賣關子，不告訴學生撲克牌有什麼用處，引起學生好奇，為了得到撲克牌而積極參與課堂活動。

教師以提問的方式引導學生思考機率就是將不確定的事情用數字表示出來。

師：機率是什麼？

生：機率就是幾分之幾，小數點。

師：那什麼事件可用「幾分之幾」或「小數點」表示呢？

師：你今天與隔壁同學告白的成功機率或是你今天被老師罵的機率諸如此類的事情，是不是都可用機率去表示呢？

生：對。

師：那麼老師剛剛講的例子是確定還是不確定的事呢？

生：不確定的。

藉由生活中的物品，讓學生知道一定不可能發生的事件其機率值為 0；一定會發生的事件其機率值為 1，且機率值的範圍介於 0 至 1 之間。

師：那麼機率有沒有一個範圍呢？

生：（同學們相互討論，有著不同的答案。）

師：（教師走到教室中央，拿出骰子）你們觀察這顆骰子，骰子上有 1~6 點，請問我丟出 7 點的機率是多少呢？

生：0%。

師：（拿出一疊花色為紅心和方塊的撲克牌）若從中隨機抽取一張撲克牌，牌的花色是紅色的機率是多少呢？

生：100%！

師：很好，大家都答對了！但其實我們在表示機率值時不一定要用%，我們知道 0% 等於 0，100% 等於 1。所以我們知道機率值的範圍也會介於 0 到 1 之間。

師：接下來，我們要看一段影片。影片裡的光洙每次玩遊戲都輸了，那他是真的運氣不好嗎？還是可以用科學一點的方式來解釋呢？

播放機率相關影片（臭手光洙），播畢後請三位學生簡述感想，教師先不給予回饋。

教師在教室隨機走動，與學生互動，傳遞麥克風，當哪位學生拿到麥克風時，則由該學生回答問題，回答問題的學生可得到一張撲克牌。藉由是非問答進行主觀機率、古典機率、頻率機率、機率值範圍的問題與迷思討論和澄清時進效應和賭徒效應。在主觀機率請學生寫下第 2 及第 4 題的答案，但不給予回饋。

藉由生活經驗澄清學生的迷思。

師：統一發票有「中獎」或「不中獎」兩種可能，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。

生：（回答對和錯的學生各占半數）

師：中獎和不中獎的發票哪個多呢？

生：不中獎的發票比較多。

師：我們可以知道不中獎的機率比較高，這樣中獎機率還會等於 $\frac{1}{2}$ 嗎？

生：不會，而且會小於 $\frac{1}{2}$ 。

師：某個醫生手術的成功率為 $\frac{1}{10}$ ，已知該醫生的前九位病患手術皆失敗，一病患為該醫生的第十位病患，那麼他的手術一定會成功。

生：（討論熱烈）

師：我們說的機率值 $\frac{1}{10}$ 只是理想值，第十次醫生未必會手術成功。

回饋是非問答前的影片討論。

師：所以從剛剛的問答中，我們知道遊戲的機率值是可以計算出來的，但是選擇是不確定的。所以光洙會這麼衰是因為他的選擇，並非他抽到不好結果的機率特別高。

最後揭曉貼在黑板上的撲克牌，若牌面上的數字比老師的牌大者，即可獲得獎勵，此互動的意義在於除了讓學生引起學習動機外，亦可讓學生體驗不確定性思維。課堂結束。

（2）認識古典機率和餘事件並執行運算

第二堂課

- 教學目標：如何計算古典機率，以古典機率解釋機率值的範圍，主觀機率對應古典機率，餘事件。
- 預設學生學習困難：無法將機率值 $\frac{1}{m}$ 擴展到 $\frac{n}{m}$ （分母為所有可能發生的結果數，分子為該事件發生的個數），無法以古典機率直接推導到機率值的範圍。
- 教具：濕水挑戰帽、海盜桶。
- 環境：採用組內差距大，組間差距小的分組方式，共分為四組，組別與組別間留有可讓教師行走的走道，圖 41 為示意圖。教室上方有投影設備將上課內容投放至講臺上的投影幕。
- 媒介：快問快答投影片。
- 課程內容：

各組發放一個濕水挑戰帽，讓學生將濕水挑戰帽戴在頭上，每組進行快問快答，回答正確的組別，可使其他組別的帽子各被老師拔取一根水管；回答錯誤的組別，

該組的帽子被老師拔取一根水管。拔到對應的水管會使帽子漏水，帽子漏水的小組別會被淘汰，淘汰至剩下最後一組，該組即獲勝。

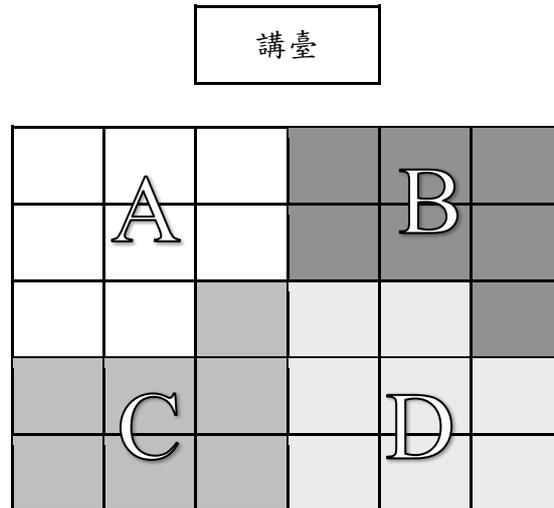


圖 41 第二堂課分組示意圖

教師以提問的方式引導學生思考如何計算古典機率值。

師：機率值的計算為 $\frac{\text{該事件發生的結果}}{\text{所有可能發生的結果}}$ 。而我們知道總共有 8 根水管，那如何計算一

次就拔到會使帽子漏水的水管之機率呢？

生： $\frac{1}{8}$ 。

各組輪流操作將劍放進木桶上的洞，若放到對應的洞，海盜叔叔就會彈起來。

組別使海盜叔叔彈起來時即結束操作，換至下一組。

師：那一次就放到會使海盜叔叔彈起來的洞之機率呢？

生：共有 24 根水管，機率為 $\frac{1}{24}$ 。

師：觀察課堂所進行的兩項活動，所有可能發生的結果都是數出來的，那麼我們就

可以用這個算式 $\text{機率值} = \frac{\text{該事件發生的結果}}{\text{所有可能發生的結果}}$ 來計算古典機率值。

閱讀書本 P.21 的新聞報導，讓學生觀察在報導中，是否使用錯的機率語言。

師：觀察這篇報導，你們有沒有發現什麼「異樣」呢？

生：機率值不會超過 1。

師：很好！請翻到書本 P.3，我們知道機率值的範圍介於 0~1 之間(亦即 0%~100%)，所以機率 120%其實並不存在。雖然這種說法很常見，但這只是一種誇飾的說法而已。

師：我們可以利用機率值的算式來思考，

$$\text{機率值} = \frac{\text{該事件發生的結果}}{\text{所有可能發生的結果}}$$

我們知道所有事件發生的機率值為 1。若機率值超過 1，表示「該事件發生的結果」多於「所有可能發生的結果」，但這是不可能的，所以機率值並不會超過 1。

翻到書本 P.9，並討論「你認為自己某天踩到狗大便的機率」。

師：除了踩到狗屎和沒有踩到狗屎這兩種情況，還有其他情況嗎？

生：沒有。

師：所以我們可以知道這兩種情況的機率相加應該為多少呢？

生：1。

請學生修改在書本 P.3 寫下的答案。

對照書本 P.19 和 P.20，讓學生列出事件的所有可能情況，透過問答的方式讓學生思考所有情況之機率和為 1。

師：在書本 P.19，一次就被水淋濕的機率為多少？而你能順利脫身（不被水淋溼）的機率又是多少呢？

生：被水淋溼的機率是 $\frac{1}{8}$ ，不被水淋溼的機率是 $\frac{7}{8}$ 。

師：還有其他情況嗎？

生：沒有。

師：所以我們可以知道這兩種情況的機率相加應該為多少呢？

生：1。

師：那我們在計算「順利脫身（不被水淋溼）的機率」時，是否會等於「1-被水淋溼的機率」呢？

生：會。

師：對照書本 P.20，若剩下最後 5 個洞，且只插入一把劍，你認為下列哪種情況，贏的機會比較大？

情況 1：讓海盜叔叔彈出來即為勝者。

情況 2：不讓海盜叔叔彈出來即為勝者。

生：（討論熱烈）

師：兩種情況的機率值分別為多少呢？

生：情況 1 的機率是 $\frac{1}{5}$ ，情況 2 的機率是 $\frac{4}{5}$ 。

師：還有其他情況嗎？

生：沒有。

師：所以我們可以知道這兩種情況的機率相加應該為多少呢？

生：1。

師：那我們在計算「不讓海盜叔叔彈出來的機率」時，是否會等於「1-讓海盜叔叔彈出來的機率」呢？

生：會。

師：透過上述三個例子，我們可以知道在所有不確定的事件中，各種事件的所有可能情況之機率何為多少呢？

生：1。

師：那麼請翻到書本 P.10 第 4 題，想想看擲到正面、反面或側面的機率和應該為多少呢？

生：1。

請學生修改在書本 P.4 寫下的答案。

課堂最後，與學生總結這次課程所學，如何計算古典機率值與餘事件。課堂結束。

(3) 頻率機率

第三堂課

- 教學目標：如何計算頻率機率，頻率機率對應古典機率，無法用頻率機率估計的試驗。

- 預設學生學習困難：無法理解古典機率（理想值）和頻率機率之間的關係，無法區分是否為可以用頻率機率估計的試驗。
- 教具：瓶蓋、砸派機。
- 環境：採用組內差距大，組間差距小的分組方式，共分為五組，組別與組別間留有可讓教師行走的走道，圖 42 為示意圖。教室上方有投影設備將上課內容投放至講臺上的投影幕。
- 媒介：瓶蓋、砸派機統計表格（excel 檔）。

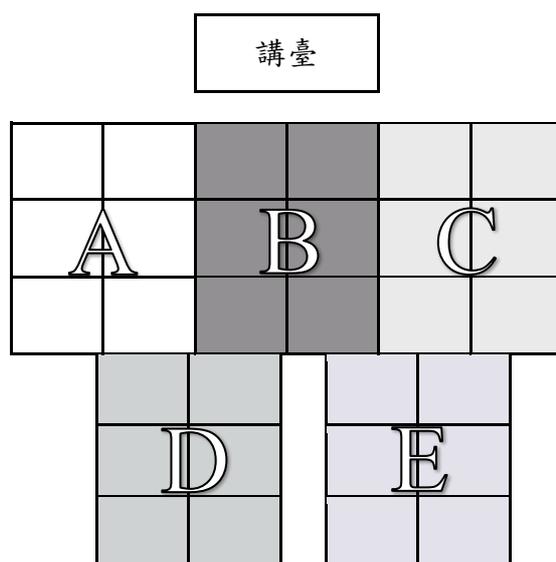


圖 42 第三堂課分組示意圖

- 課程內容：

教師以提問的方式引導學生思考如何透過實作算出事件的機率值。

師：投擲一個瓶蓋，會出現正面、反面和側面三種情況，在上堂課，我們知道這三種情況的機率相加為 1。

師：但我們知道瓶蓋是不均勻的，我們有方法可以測量出正面、反面和側面三種情況個別發生的機率嗎？

生：有，動手做。

讓學生操作丟擲瓶蓋，並分別紀錄個人、組別和班級的結果。

師：很好！請試著投擲一個瓶蓋，並在書本 P.37（表 18）紀錄投擲的結果。

學生投擲瓶蓋並紀錄結果。

表 18

書本 P.37 個人丟擲瓶蓋結果的紀錄表格

丟擲瓶蓋出現的情況	次數 (以正字記號標示)	相對次數
正面		
反面		
側面		

師：請每個小組統計組員投擲的結果，將次數加總，將結果紀錄在書本 P.38 的表格（表 19），你們發現了什麼？

表 19

書本 P.38 小組丟擲瓶蓋結果的紀錄表格

丟擲瓶蓋出現的情況	小組次數加總 (數字表示)	相對次數
正面		
反面		
側面		

生：（熱烈討論）

師：那我們來看看班上所有人的投擲結果吧！

各組將數據報告給教師，因數字較難計算，所以教師將結果輸入至 excel 檔，請學生將 excel 檔上的結果紀錄至書本 P.38（表 20）。

表 20

書本 P.38 全班丟擲瓶蓋結果的紀錄表格

丟擲瓶蓋出現的情況	全班次數加總 (數字表示)	相對次數
正面		
反面		
側面		

表 21 為擷取實驗學校其中一個班級的實驗結果，以便對於上課內容進行說明。

師：觀察投影幕上的表格，你們發現了什麼？

生：（熱烈討論）

教師引導學生觀察當試驗的樣本數越大時，事件的機率值會趨近於一理想值。

師：觀察每個人、每一組和全班的結果中，正面出現的機率值。我們是不是發現機率值會趨近於某一數？

生：對。

表 21

某一個班級丟擲瓶蓋的實驗結果

組別	第一組		第二組		第三組		第四組		第五組		加總
正面 出現次數	23	0.38	24	0.48	36	0.60	30	0.60	33	0.55	146
反面 出現次數	35	0.58	25	0.50	24	0.40	20	0.40	24	0.40	128
側面 出現次數	2	0.03	1	0.02	0	0.00	0	0	3	0.05	6
加總	60		50		60		50		60		280
正面出現機率			反面出現機率			側面出現機率			1		
0.52			0.46			0.02					

師：那正面、反面和側面的機率值各趨近於多少呢？

生：正面：0.52、反面：0.46、側面：0.02。

師：沒錯！當我們將試驗擴展到全校或者全區的時候，機率值會更加精確。所以我們發現當試驗的總數越大時，機率值會趨近於一個穩定的值。但我們知道這個穩定的機率值只是一個理想值，每次試驗的結果不一定都會和理想值吻合。你們可以將實驗結果對照書本 P.10，看看你們當初寫的機率值跟實驗結果的機率值是否一樣。

閱讀書本 P.39，讓學生思考文中的問題。

師：如果擲骰子 60 次，1 點一定會出現 10 次家務嗎？阿娟一定要做 10 次家務嗎？

生：不一定。

師：為什麼呢？

生：因為 10 次只是理想次數。

師：非常好，當投擲骰子非常多次時，每一面的機率值才會接近 $\frac{1}{6}$ ，換句話說， $\frac{1}{6}$ 是一個理想機率值，所以 $60 \times \frac{1}{6}$ 算出來的 10 次僅是一個理想次數。事實上，阿娟有可能 1 次家務也不用做，但也有可能阿娟要做 60 次家務，只是這些情況發生的機率很低。

各組輪流操作砸派機，每位組員輪流站在砸派機前方，按壓砸派機上的按鈕，當按到一定的次數時，機關即會彈起，機關上的刮鬍泡會砸至臉上，一組共操作 20 下。教師將操作的結果紀錄在 excel 檔。

師：（拿出砸派機）當我們不知道砸派機的機關時，要如何測量出「機關啟動的機率」呢？

生：動手做。

師：沒錯，接下來我們要動手操作。我會將本組的結果展示在投影幕上，請你們也將結果紀錄在書本 P.40。

表 22 為擷取實驗學校其中一個班級的實驗結果，以便對於上課內容進行說明。

師：觀察投影幕上的表格，你們發現了什麼？

生：趨近於一個理想值。

師：很好！所以我們知道機關啟動的機率為 0.12，也就表示操作 20 次，機關平均會被啟動 2 到 3 次。

將頻率機率應用在生活中的實例。

師：觀察書本 P.41 桃園市中壢區的歷史降雨資料，估計桃園市中壢區 2019 年 4 月 4 日的降雨機率。

生：（熱烈討論）

表 22

某一個班級操作砸派機的實驗結果

組別	跳起來次數	按壓總次數	機率
第 1 組	1	20	0.05
第 2 組	2	20	0.1
第 3 組	3	20	0.15
第 4 組	3	20	0.15
第 5 組	3	20	0.15
加總	12	100	0.12

師：我們發現歷史資料中，4 月份的降雨天數雖然沒有很明顯地趨於某一個值，但大致可以看出落在 15 天左右，所以我們可以估計桃園市中壢區 2019 年 4 月 4 日的降雨機率大約為 $\frac{15}{30}=50\%$ 。

引導學生思考當沒有規律的數字發生時，便不可估算其頻率機率。

師：我們知道臺灣位於板塊交界處，很常發生地震，若我們可以預測地震的發生，那對於防災是很有幫助的。現在請觀察書本 P.42 臺灣地震發生的時間點，請試著預測下個規模 7.0 以上的地震會發生在什麼時候？那機率又為多少呢？

生：無法估計。

師：為什麼呢？

生：因為沒有趨近於一個值。

師：很好，地震有時在同一年就發生了兩次，有時又隔了 6 年，還有一次間隔比較長，隔了 27 年。我們無法找到一個規律，所以無法估計地震發生的機率。

總結本次課堂所學，當事件的發生有規律時，樣本數越多，會趨近於一機率值，此機率值為一理想值；當事件的發生沒有規律時，則我們無法使用頻率機率估計事件發生的機率值。課堂結束。

(4) 列舉

第四堂課

- 教學目標：如何使用數對列舉出所有可能結果，樣本空間迷思澄清。
- 預設學生學習困難：無法有系統性地使用數對列舉出所有情況，無法辨識樣本空間為不同的情況，僅根據結果認為是同一種情況（例如：丟擲兩顆骰子，認為出現(1, 2)和(2, 1)為同一種情況。）
- 教具：筊、骰子。
- 環境：採用組內差距大，組間差距小的分組方式，共分為五組，組別與組別間留有可讓教師行走的走道，圖 43 為示意圖。教室上方有投影設備將上課內容投放至講臺上的投影幕。

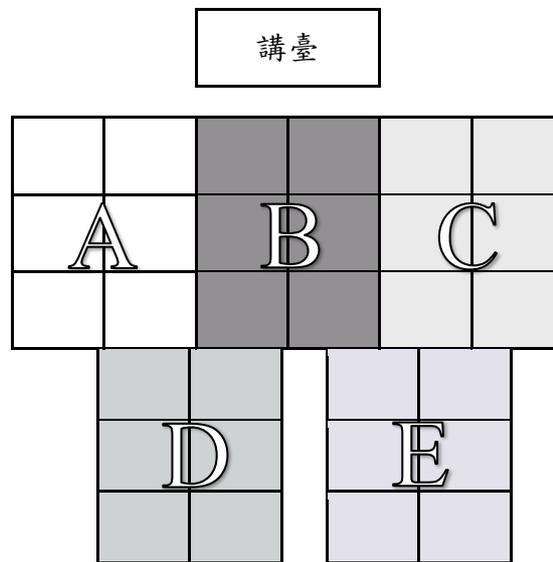


圖 43 第四堂課分組示意圖

- 課程內容：

利用數對列出所有可能結果。

師：兩個人玩猜拳遊戲，出拳的情況為「剪刀、石頭」有哪些呢？

請兩位學生上臺示範猜拳。

師：小明和小華猜拳，有可能小明出剪刀、小華出石頭，也有可能小明出石頭、小華出剪刀，我們在列出結果時，要考慮出拳的情況為「剪刀、石頭」有兩種不同的情況。

師：我們將情況用數對的方式表示。(將數對列舉的表示方式(圖 44)寫在黑板上)

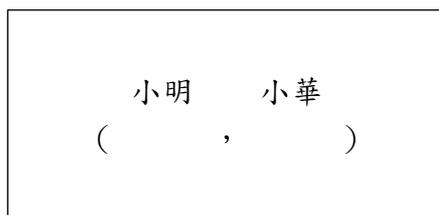


圖 44 兩人猜拳數對列舉的表示方式

請學生用數對表示出拳的情況為「剪刀、石頭」的兩種情況。教師巡視教室，確認學生是否會使用以及使用正確的數對表示。

各小組操作三人猜拳，小組內其中三人猜拳，另外兩人當紀錄，將所有的結果以數對的形式表示，特別注意僅記錄「剪刀、石頭、布」的出拳情況。教師巡視各組操作情況。

師：我們知道三人猜拳，出拳的情況有(剪刀，石頭，布)、(剪刀，布，石頭)、(石頭，剪刀，布)、(石頭，布，剪刀)、(布，剪刀，石頭)和(布，石頭，剪刀)6種。

簡單介紹道教信仰中，擲筊出現的所有情況。請各組派一代表，上臺體驗擲筊，擲的筊為一大一小，擲出最多「聖筊」的組別可以獲得獎勵。從擲出聖筊的體驗活動中，讓學生感受擲出聖筊的兩種情況。

師：在擲出聖筊時，你們覺得大的筊凸面朝上與小的筊凸面朝上的情況相同嗎？

生：(熱烈討論)

師：我們將大的筊稱為①號筊，小的筊稱為②號筊。有可能①號筊出現凸面朝上，②號筊出現凸面朝下，也有可能①號筊出現凸面朝下，②號筊出現凸面朝上，因此我們在列出結果時，出現「聖筊」有兩種不同的情況。

師：以凸面表示凸面朝上，以平面表示凸面朝下。用數對的形式表示(圖 45)，則寫成(凸面，平面)和(平面，凸面)。

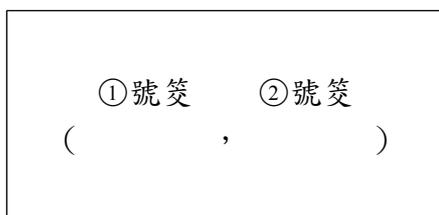


圖 45 擲筊數對列舉的表示方式

師：所以我們在列出擲筊的所有情況時，總共有 4 種情況。那擲出「聖筊」的機率為多少呢？

生： $\frac{2}{4}$ 。

師：那麼擲出「笑筊」和「陰筊」的機率分別為多少呢？

生：擲出「笑筊」的機率為 $\frac{1}{4}$ ，擲出「陰筊」的機率為 $\frac{1}{4}$ 。

師：此外，還有一個常見的錯誤，若將「笑筊」和「陰筊」都歸類為不獲得神明認可的類型，另一種就是獲得神明認同的「聖筊」，總共只有 2 種情況。

各組發放兩套骰子，一套有 2 顆不同色的骰子，讓學生體會擲兩顆骰子，擲出 1 點和 2 點，有 2 種情況。透過實作，列舉出投擲兩顆骰子所有的情況。教師巡視各組操作情況。

師：投擲兩顆骰子，若要列出擲到 1 點和 2 點的可能，並不是只有 1 種情況。我們將骰子分為①號骰和②號骰，想想看，有哪些情況呢？

生：（1 點，2 點）和（2 點，1 點）兩種。

師：很好！那請用同樣的想法列舉出投擲兩顆骰子所有的可能。

生：（紀錄在書本上）

師：投擲兩顆骰子的所有情況為（1 點，1 點）、（1 點，2 點）……（6 點，5 點）、（6 點，6 點），共 36 種情況。

師：那麼，投擲三顆骰子，擲出 2 點、4 點和 6 點的情況有哪些呢？

生：（2 點，4 點，6 點）、（2 點，6 點，4 點）、（4 點，2 點，6 點）、（4 點，6 點，2 點）、（6 點，2 點，4 點）和（6 點，4 點，2 點），共 6 種情況。

教師提問，為下一堂課的樹狀圖做鋪陳。

師：這堂課我們在做數對列舉時，過程是不是較麻煩，且較無邏輯性呢？

生：是！

師：請你們回家想想看，是不是有更系統性的方式來表示出所有結果呢？下一堂課，我們將來討論較有邏輯性地列出所有結果的方法。

課堂結束。

（5）建立樹狀圖

第五堂課

- 教學目標：介紹樹狀圖是什麼及如何繪製樹狀圖，學習如何將文字敘述轉換到樹狀圖方式呈現。
- 預設學生學習困難：各層為獨立試驗，機率值不會受它層影響，認為在第一層出現過的樣本不會在第二層後出現，無法根據題意判斷符合的可能結果。
- 教具：彩色筆、八開圖畫紙。
- 環境：採用組內差距大，組間差距小的分組方式，共分為五組，組別與組別間留有可讓教師行走的走道，圖 46 為示意圖。教室上方有投影設備將上課內容投放至講臺上的投影幕。

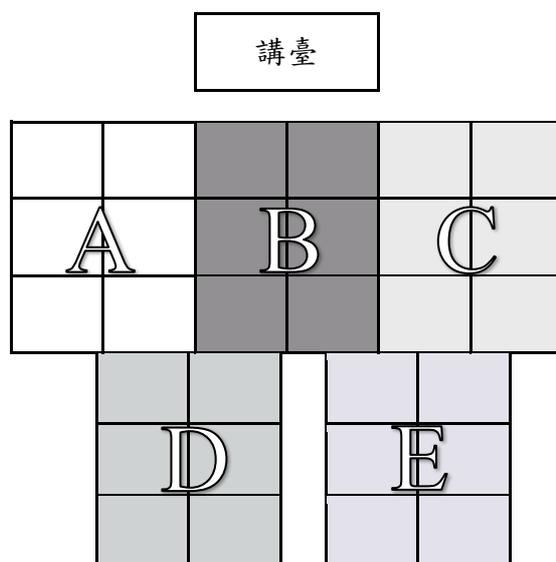


圖 46 第五堂課分組示意圖

- 課程內容：

學生從上堂課的列舉中，體會到列舉為較無系統性的方法，教師引導學生思考可使用較有邏輯性的樹狀圖解決機率問題。並介紹什麼是樹狀圖、樹狀圖的各式樣貌、樹狀圖的形式和如何繪製樹狀圖。

師：從上堂課，我們學到可以用數對列舉出不確定事件的所有可能結果，但是當事件較為複雜時，有沒有更好的方法呢？

生：樹狀圖。

閱讀書本 P.56 的文字。

師：在書本 P.57 中，數學家和電腦科學家他們腦中的樹，有可能是橫向的，也有可能是顛倒的，所以樹狀圖也有各種形式。在我們的機率課程中，我們先考慮橫的樹狀圖，以便我們解決機率問題。

師：首先，我們看到書本 P.58 中，知識界如何使用樹狀圖的例子。上方為八年級學到的理化課程中物質的分類，這時候樹狀圖將所有呈現出來，是不是比較有系統性呢？

生：對！

師：接著讓我們來學習怎麼畫樹狀圖吧！第一步要寫上起點(START 或題目名稱)，第二步在樹狀圖最上面寫上分類名稱，第三步畫出樹狀圖的分枝，第四步在樹枝上寫機率，最後一步為在樹枝末梢寫上結果與機率。

師：請翻到書本 P.59，讓我們根據題目畫出樹狀圖。第一步先寫上起點，亦可寫上「兩人猜拳」。第二步假設 A、B 兩人猜拳，便在樹狀圖最上面寫上 A、B。第三步 A 可以出「剪刀、石頭、布」三種拳種，所以在起點後方分出三根樹枝，分別寫上「剪刀、石頭、布」，不論 A 出什麼拳，都不影響 B 的出拳，B 也可以出「剪刀、石頭、布」，所以在 A 的每一個出拳後方再分出三根樹枝，分別寫上「剪刀、石頭、布」。第四步考慮總共有三種拳，A 隨機選擇其中一拳出，所以 A 出每一拳的機率皆為 $\frac{1}{3}$ ，同樣地，B 出每一拳的機率皆為 $\frac{1}{3}$ 。最後一步將結果用數對的形式寫出，看第一列，A 出剪刀，B 也出剪刀，結果即為(剪刀，剪刀)。總共有 9 種可能，所以機率為 $\frac{1}{9}$ (如圖 47)。

師：請你們從樹狀圖中回答「兩人猜拳一次就決定勝負」的機率是多少？

師：兩人猜拳情況一共有 9 種，其中一方勝利的情況有 6 種。所以一次決定勝負的機率為 $\frac{6}{9}$ (如圖 48)。

請學生接著畫出三個人的猜拳情況。教師巡視每位學生的作答情況，並適時地給予指導。

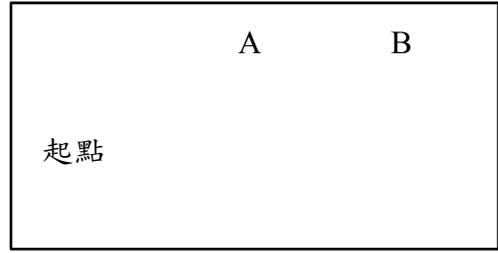
師：請你們從樹狀圖中回答「三個人猜拳時，一回合只有一人獲勝」的機率有多少？

生： $\frac{9}{27}$ 。

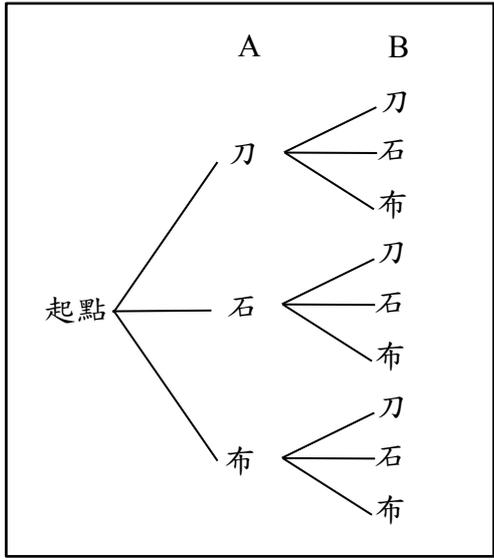
師：很好！



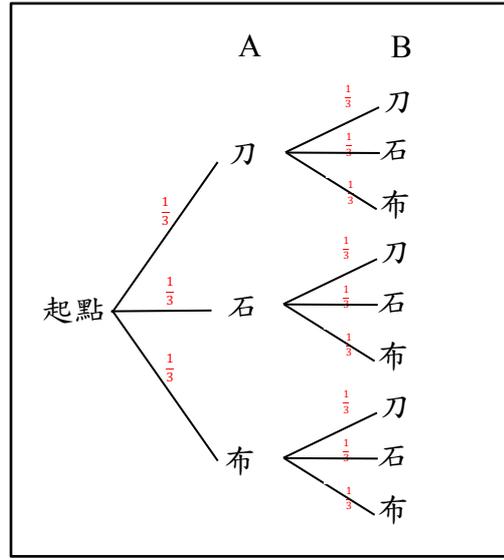
第一步 寫上起點



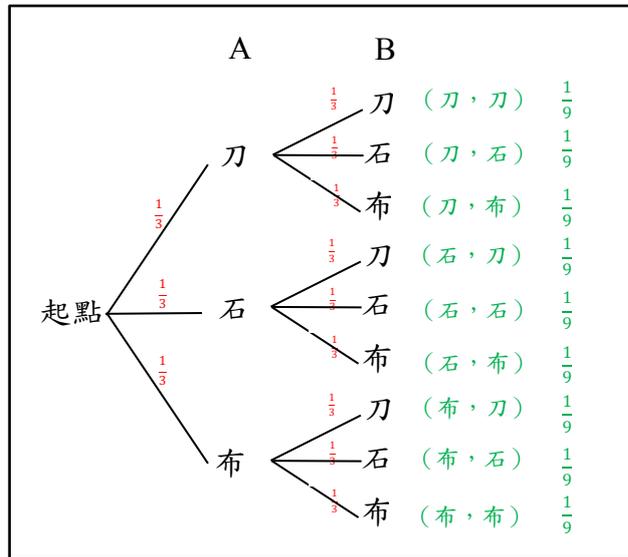
第二步 寫上分類名稱



第三步 畫出分枝



第四步 在樹枝上寫機率



第五步 在樹枝末梢上寫上結果及機率

圖 47 講解如何繪製樹狀圖的過程

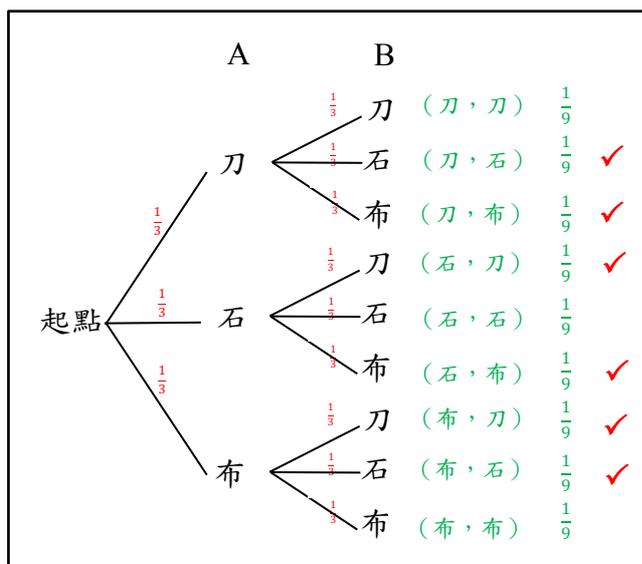


圖 48 圈選樹狀圖中符合題意的結果並算出機率值-1

請學生翻到書本 P.61。播放拉霸機影片，此用意為讓學生知道什麼是拉霸機，以及拉霸機如何運作。

師：在繪製拉霸機的樹狀圖時，要怎麼分類呢？

生：（熱烈討論）

師：將拉霸機分為第一面、第二面及第三面（圖 49）。



圖 49 繪製拉霸機的樹狀圖分類

師：樹狀圖的分枝為每一面可能出現的數字。所以在一開始先寫上起點，再來是寫上分類（第一面、第二面、第三面），第一面有 3、7、9 三種可能（如圖 50）。那接下來怎麼畫呢？請各位同學們練習看看，記得要在樹枝上寫上機率和在樹枝末梢寫上結果與機率。若小組內先畫好的同學，也可以教還沒畫好的組員喔！

請學生接著畫出拉霸機的樹狀圖。教師巡視每位學生的作答情況，並適時地給予指導。

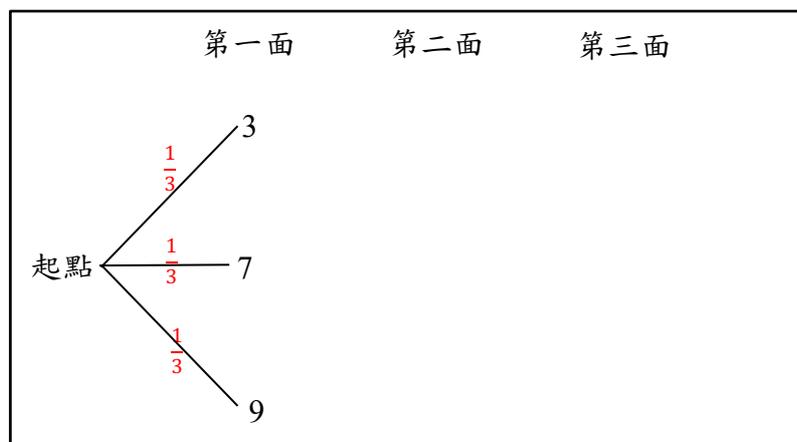


圖 50 繪製拉霸機樹狀圖的提示

師：大家都畫得很好！接下來的問題，請你們觀察樹狀圖後回答。

師：若三面滾輪都顯示 7 的圖案，則可獲得獎金。請問全部的情況有幾種？其中出現 (7, 7, 7) 的可能結果有幾種呢？

生：全部的情況有 27 種，出現 (7, 7, 7) 的可能結果有 1 種。

師：所以贏得獎金的機率為多少呢？

生： $\frac{1}{27}$ 。

師：若三面滾輪中，只要兩面顯示 9 的圖案，即可獲得牛奶。請問得到牛奶的機率為多少？

師：請特別注意，「只要」兩面顯示 9 的圖案，「即可」獲得牛奶，表示兩面以上顯示 9 的圖案就要列入考慮。所以兩面以上顯示 9 的圖案的情況有幾種呢？

生：6 種。

師：所以得到牛奶的機率為多少呢？

生： $\frac{6}{27}$ 。

師：若三面滾輪中，只要一面顯示 3 的圖案，即可獲得糖果，請問得到糖果的機率為多少？

師：「只要」一面，表示一面、兩面或三面出現 3 的圖案，皆要列入考慮。所有有幾種情況呢？

生：12 種。

師：所以得到糖果的機率為多少呢？

生： $\frac{12}{27}$ 。

各組發放彩色筆 4 支及圖畫紙 1 張。讓各組繪製書本 P.62 的樹狀圖及回答書本 P.63 的問題。

師：請翻到書本 P.62，請各組根據題目並依照繪製樹狀圖的步驟，畫出「完整」的樹狀圖，然後思考 P.63 的問題，將答案寫上，可以使用彩色筆，彩繪組內的樹狀圖。下堂課會依照各組繪製的情況，給予評分，最高分的組別將有獎勵。

各組繪製樹狀圖。教師巡視每組的情況，並適時地給予指導。課堂結束。

第六堂課

- 教學目標：使用樹狀圖，解決機率問題。
- 預設學生學習困難：無法將文字敘述轉換為樹狀圖，樹狀圖的繪製不夠完整。
- 環境：採用組內差距大，組間差距小的分組方式，共分為五組，組別與組別間留有可讓教師行走的走道，圖 51 為示意圖。教室上方有投影設備將上課內容投放至講臺上的投影幕。

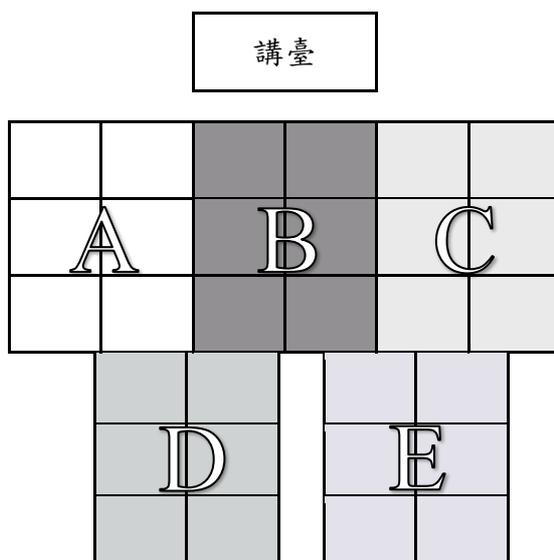


圖 51 第六堂課分組示意圖

● 課程內容：

教師展示上堂課中各組的成品，透過學生替各組作品打分數的過程，讓學生清楚地知道完整的樹狀圖結構。

以下選取兩個範例以示說明，如圖 52 和圖 53。

師：（圖 52）這組的樹狀圖畫得很好，分類對了，答案也正確。但是少了一個很重要的要素，是什麼呢？

生：樹枝上的機率。

師：很好。

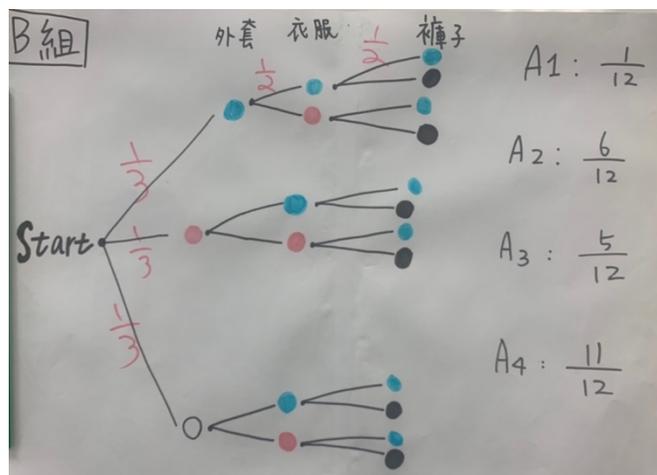


圖 52 小組繪製樹狀圖-1

師：（圖 53）這組畫得很棒，分類正確，樹枝圖上有寫機率，答案也正確，所以得到滿分 10 分。

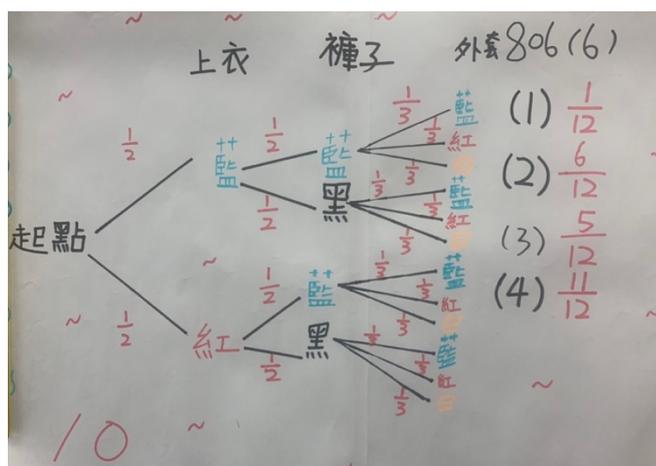


圖 53 小組繪製樹狀圖-2

選出最高分的組別後，頒發獎勵。

教師講解書本 P.65 的例題，練習應用例題，熟悉使用樹狀圖解決機率問題。

師：繪製樹狀圖時，一開始要先寫上什麼？

生：起點。

師：很好！根據題意，無論是薇薇或成成，他們的選擇都是這三條路，所以在繪製樹狀圖時，最上面的分類分別為薇薇和成成，分枝為三種選擇。

師：根據題目，選取任一條路的機會均等，所以每一根樹枝的機率應寫上多少？

生： $\frac{1}{3}$ 。

師：有了這些資料，我們可以畫出樹狀圖（教師畫出樹狀圖）。

師：全部的情況有幾種？

生：9種。

師：在同一條路相遇表示有可能在花田一路相遇，也有可能是在花田二路或花田三路相遇，所以在同一條路相遇的情況有幾種呢？

生：3種。

師：在同一條路相遇的機率為多少呢？

生： $\frac{3}{9}$ （如圖 54）。

師：沒錯。

學生練習 P.72~76 的歷屆試題，教師巡視每位學生的情況，並適時地給予指導。

課堂結束。

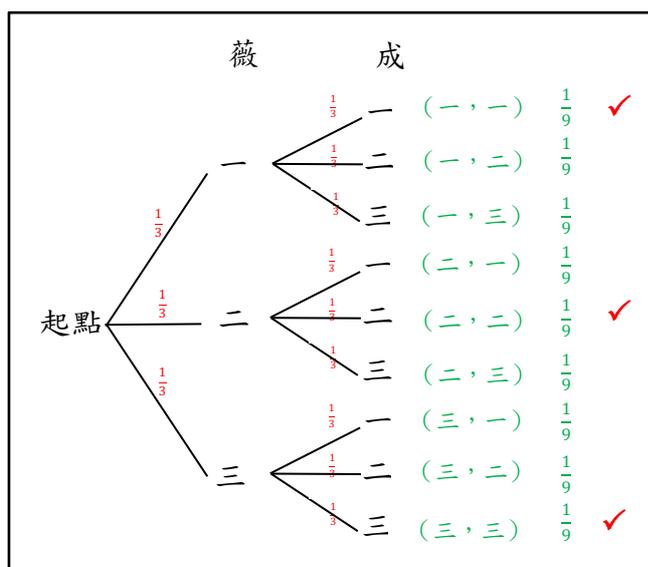


圖 54 圈選符合題意的結果並算出機率值-2

第七堂課

- 教學目標：澄清樹狀圖繪製的模式。
- 預設學生學習困難：無法分類樹狀圖的橫向與縱向。
- 教具：許氏機率桌遊（籌碼、桌遊卡片）、籤和籤筒。
- 環境：採用組內差距大，組間差距小的分組方式，共分為五組，組別與組別間留有可讓教師行走的走道，圖 55 為示意圖。教室上方有投影設備將上課內容投放至講臺上的投影幕。

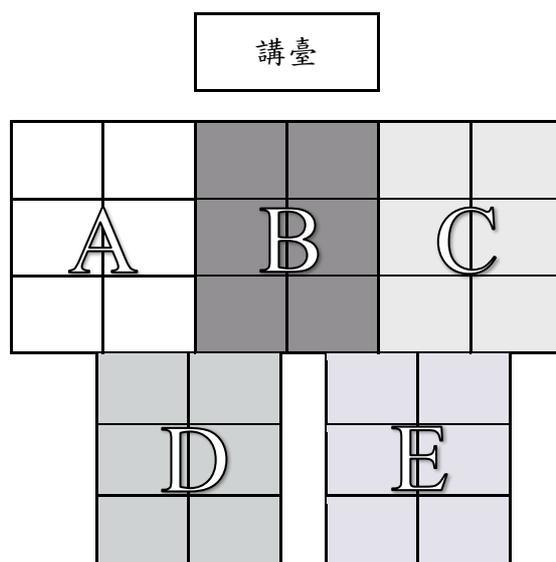


圖 55 第七堂課分組示意圖

- 媒介：快問快答投影片。
- 課程內容：

學生練習 P.67~71 的歷屆試題，教師巡視每位學生的情況，並適時地給予指導。
待各組完成題目後，教師講解桌遊規則。

師：從上堂課到這堂課，我們總共練習了 10 道的機率問題，現在我們來進行個小桌遊，簡報上有這些問題，答對每道題目，可獲得一些籌碼。

獎勵優先完成 10 道題目的組別，全組完成者，可獲得四種顏色的籌碼各 2 個。
教師在黑板上貼上 9 張卡片。

師：獲得的籌碼可以用來購買黑板上的卡片，黑板上有三種顏色的卡片，分別為貧民（白色卡片）、百姓（綠色卡片）和貴族（粉色卡片）。卡片的下方為購買卡片需付出的籌碼數。右上方為卡片的價值，有些可以獲得特別顏色的籌碼，

有些則可以獲得獎勵例如糖果，另有一些則可以獲得特權，其中特權「pass」為選擇不回答問題，相對地也無法得到籌碼，但可以購買卡片，「指定」為指定他組任一人回答問題，若答對，則指定的組別獲得籌碼，若答錯，則被指定的組別被掠奪籌碼。卡片左上方為分數，即購買卡片，可獲得該張卡片的分數，最後為總分最高的組別獲勝。

各組猜拳決定回答順序，組別可選擇 1~15 號問題（此序號與題號無關）回答。為確認每位學生是否會使用樹狀圖解決機率問題，在遊戲過程中，教師抽籤，抽到對應號碼的組員負責回答與解釋解題過程，所以當學生在進行小組討論時，高成就者可教導低成就者，讓組內的成員都學會，而學生除了理解每一道機率問題外，更要嘗試說明解題過程。各組回答完後，教師檢討題目，若答對，教師立刻給予籌碼，該組約有 20 秒的時間購買黑板上的卡片。當卡片被購買後，教師在黑板上補上新的卡片。

（桌遊活動進行）

計算各組總分，最高分的組別頒發獎勵。課堂結束。

附錄二. 機率測驗試卷 (第一次預試)

你有多厲害？—不學就會的機率測試

班級

座號

是非題 (正確答 O，錯誤答 X)

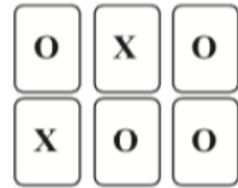
1. () 投擲一枚圖釘，釘尖朝上、朝下的機率一樣
2. () 投擲一枚公正硬幣，正面朝上的機率是 $\frac{1}{2}$
3. () 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率是 $\frac{1}{2}$
4. () 投擲一粒均勻骰子，每一種點數出現的機率都是 $\frac{1}{6}$ ，所以每投六次，必出現一次「1點」

簡答及計算題

1. 投擲一顆公正六面的骰子，出現 3 點的機率是 _____。
2. 投擲一顆公正六面的骰子，出現 7 點的機率是 _____。
3. 一副撲克牌有 52 張 (不含鬼牌)，分為黑桃 (♠)、紅心 (♥)、方塊 (♦) 及梅花 (♣) 4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、...、K。試問：從撲克牌中任取 1 張，抽到花色是黑桃的機率是多少？
4. 一個袋子裡有 10 顆相同大小的球，分別是 7 顆紅球、3 顆白球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球是紅球的機率是多少？
5. 一個袋子裡有 30 顆相同大小的球，編號：1、2、3、4、5、.....、29、30，從袋中任意取出一球，每顆球被取到的機會均等。試問：此球的號碼小於或等於 10 的機率是多少？
6. 下表顯示某籤筒中各種籤的數量。已知每支籤被抽中的機會均相等，若自此筒中抽出一支籤，則抽中紅籤的機率為何？

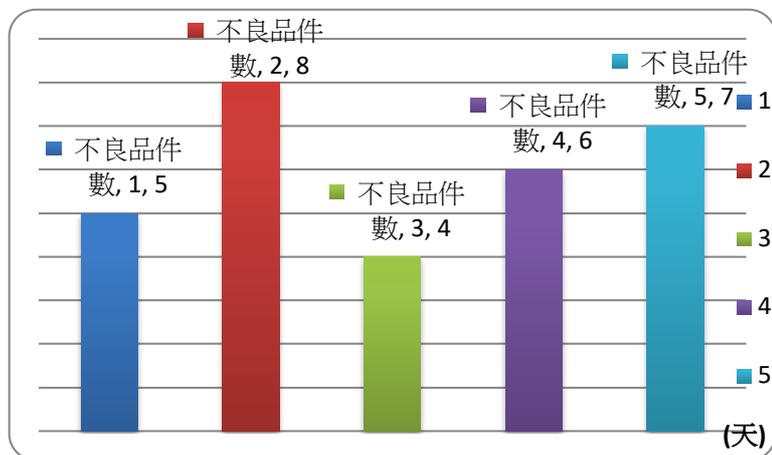
籤		數量(支)
紅籤	深紅	3
	淺紅	13
藍籤	深藍	7
	淺藍	1

7. 怡君有 24 張卡片，其中 12 張卡片被畫上 O 記號，另外 12 張卡片被畫上 X 記號。下圖表示怡君拿出 6 張卡片放在桌上的情形，且她打算從剩下的卡片中，再抽出一張卡片。若剩下的每張卡片被抽出的機會相等，則她抽出 O 記號卡片的機率為何？



8. 一袋子中有 4 個圓球，球上分別標記號碼 A、B、C、D。已知每一個球被取到的機會相等，若自袋中任取兩次球(一次一球，取後放回)，則取出的兩球號碼依序是 A、B 的機率為何？
9. 甲、乙各丟一次公正六面骰子比大小。若某人的點數較大時，算他獲勝；若兩人的點數相同時，算兩人平手。求甲獲勝的機率是多少？
10. 已知甲校有 600 人，其中男生佔 60%；乙校有 900 人，其中男生佔了 50%。今將甲、乙兩校合併後，任意抽出一位學生，每個人被抽到的機會相等，抽中男生的機率為何？
11. 某工廠連續五天、每天生產 100 件玩具，該工廠品管部對當天生產的每件玩具做不良品測試，下圖為五天內所測試的結果。以後該工廠每天正式生產 1000 件玩具，試問依此測試結果，預估此工廠生產不良玩具的機率為何？

不良品件數之結果統計長條圖



附錄三. 機率測驗試卷 (第二次預試)

國中機率測驗

班級：八年_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、是非題：請判斷下列敘述是否正確，若為正確，請畫○；若為錯誤，請畫×，並寫下理由。

- () 1. 嘟嘟到桃園機場追星，前九次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第十次她應該好好念書，不用去追星。

理由：_____

- () 2. 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。

理由：_____

- () 3. 連續投擲一顆公正的骰子 120 次 (意思是說骰子每一面被擲出的機會相等)，則「6 點」剛好會出現 20 次。

理由：_____

- () 4. 投擲一顆 1~6 點的公正骰子 (意思是說骰子每一面被擲出的機會相等)，則丟出「7 點」的機率為 $\frac{7}{6}$ 。

理由：_____

二、計算題：請閱讀下列題目，回答問題，並寫下完整的計算過程或作圖。

1. 在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？

HINT：

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

2. 鼎猩工廠共生產 2500 個燈泡，從中隨機抽出 200 個做測試，其中有 5 個燈泡是瑕疵品，則在整批燈泡中，可能會有幾個是瑕疵品？

3. 負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{1}{50}$

4. 有兩個公正的骰子 A 與骰子 B，A 骰出現的點數為 a，B 骰出現的點數為 b，則點數 a 與 b 依序所組成的數為偶數的機率是多少？

例如：當 a=1，b=2 時，所組成的數為 12。

5. 從連續正整數 40、41、42、……、97、98、99 中隨機取一數，則
- (1) 個位數字等於十位數字的可能有哪幾種？
(例：11、22、33……)
 - (2) 個位數字等於十位數字的機率是多少？
6. 劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則江辰是第二個被家庭訪問的機率為多少？
7. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？
8. 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？
9. 福珠為了練舉重，考慮要不要吃蘇打餅乾，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，不論有沒有吃蘇打餅乾，選擇喝草莓牛奶的機率都是 $\frac{3}{7}$ 。則
- (1) 福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
 - (2) 福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

三、想一想：請閱讀以下的問題並回答，如果可以，請寫下理由。

1. 民國 108 年時，請你(妳)評估自己考上中大附中的機率是多少？

附錄四. 機率學前測驗

國中機率測驗

班級：八年_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、是非題：請判斷下列敘述是否正確，若為正確，請畫○；若為錯誤，請畫×，並寫下理由。

- () 1. 嘟嘟到桃園機場追星，前九次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第十次她不用去追星。
理由：_____
- () 2. 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。
理由：_____
- () 3. 連續投擲一顆 1~6 點的公正骰子 120 次（意思是說骰子每一面被擲出的機會相等），則「6 點」剛好會出現 20 次。
理由：_____
- () 4. 投擲一顆 1~6 點的公正骰子（意思是說骰子每一面被擲出的機會相等），則投擲一次丟出「7 點」的機率為 $\frac{7}{6}$ 。
理由：_____

二、計算題：請閱讀下列題目，回答問題，並寫下完整的計算過程或作圖。

1. 在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？

提示：(完成下方表格)

	A	a
A		Aa
a		

2. 鼎猩工廠共生產 2500 個燈泡，從中隨機抽出 200 個做測試，其中有 5 個燈泡是瑕疵品，則在整批燈泡中，可能有幾個是瑕疵品？

3. 負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有五月花衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花	$\frac{1}{50}$

4. 有兩個 1~6 點的公正骰子 A 與骰子 B，A 骰出現的點數為 a，B 骰出現的點數為 b，則點數 a 與 b 依序所組成的數為偶數的機率是多少？

例如：當 a=1，b=2 時，所組成的數為 12。

5. 從連續正整數 40、41、42、……、97、98、99 中隨機取一數，則
- (1) 個位數字等於十位數字的可能有哪幾種？
(例：77)
 - (2) 個位數字等於十位數字的機率是多少？
6. 劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則小希是第一個、江辰是第二個被家庭訪問的機率為多少？
7. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？
8. 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？
提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況喔！
9. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{2}{3}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{3}{7}$ 。
- (1) 金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
 - (2) 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

三、想一想：請閱讀以下的問題並回答，如果可以，請寫下理由。

民國 108 年時，請你(妳)評估自己考上中大附中(中壢高中)的機率是多少？

附錄五. 機率學後測驗

TREE DIAGRAM

班級：八年_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、是非題：請判斷下列敘述是否正確，若為正確，請畫○；若為錯誤，請畫×。並寫下理由。

- () 1. 連續投擲一顆 1~6 點的公正骰子 126 次（意即骰子每一面被擲出的機會相等），則「6 點」剛好會出現 21 次。
理由：_____
- () 2. 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。
理由：_____
- () 3. 嘟嘟到桃園機場追星，前五次都沒遇到她心愛的男團 BTS，所以第六次她不用去追星。
理由：_____
- () 4. 投擲一顆 1~6 點的公正骰子（意即骰子每一面被擲出的機會相等），則投擲一次丟出「10 點」的機率為 $\frac{10}{6}$ 。
理由：_____

二、計算題：請閱讀下列題目，回答問題，並寫下完整的計算過程或畫出樹狀圖。

1. 在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？

提示：(完成下方表格)

	A	a
A		Aa
a		

2. 有兩個 1~6 點的公正骰子 A 與骰子 B，A 骰出現的點數為 a ，B 骰出現的點數為 b ，則點數 a 與 b 依序所組成的數為偶數的機率是多少？

例如：當 $a=1$ ， $b=2$ 時，所組成的數為 12。

3. 鼎猩工廠共生產 2400 個燈泡，從中隨機抽出 200 個做測試，其中有 5 個燈泡是瑕疵品，則在整批燈泡中，可能有幾個是瑕疵品？

4. 從連續正整數 40、41、42、……、97、98、99 中隨機取一數，則
- (1) 個位數字等於十位數字的可能有哪幾種？
(例：77)
- (2) 個位數字等於十位數字的機率是多少？

5. 劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則江辰是第一個、小希是第二個被家庭訪問的機率為多少？

6. 負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有五月花衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{50}$

7. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{3}{4}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{4}{7}$ 。

(3) 金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？

(4) 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？

8. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？

9. 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？
提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況喔！

三、想一想：請閱讀以下的問題並回答，如果可以，請寫下理由。

民國 108 年時，請你(妳)評估自己考上中壢高商的機率是多少？

附錄六. 機率延後測驗

TREE DIAGRAM

班級：九年_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、是非題：請判斷下列敘述是否正確，若為正確，請畫○；若為錯誤，請畫×。並寫下理由。

- () 1. 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率為 $\frac{1}{2}$ 。
理由：_____
- () 2. 連續投擲一顆 1~6 點的公正骰子 150 次（意即骰子每一面被擲出的機會相等），則「6 點」剛好會出現 25 次。
理由：_____
- () 3. 嘟嘟到松山機場追星，前五次都沒遇到她心愛的女團 TWICE，所以第六次他不用去追星。
理由：_____
- () 4. 投擲一顆 1~6 點的公正骰子（意即骰子每一面被擲出的機會相等），則投擲一次丟出「12 點」的機率為 $\frac{12}{6}$ 。
理由：_____

二、計算題：請閱讀下列題目，回答問題，並寫下完整的計算過程或畫出樹狀圖。

1. 在生物遺傳學上，耳垂分離是由顯性基因所引起，若分別以 A 和 a 代表顯性和隱性基因，子源的父母耳垂都是分離的，且已知父母的基因型都是 Aa，請問子源耳垂分離的機率是多少？

提示：(完成下方表格)

	A	a
A		Aa
a		

2. 鼎猩工廠共生產 2400 個燈泡，從中隨機抽出 200 個做測試，其中有 5 個燈泡是瑕疵品，則在整批燈泡中，可能有幾個是瑕疵品？

3. 負四便利商店推出抽福袋的活動，如表所示福袋內容與該福袋被抽中的機率，則俊凱抽到的福袋中有五月花衛生紙的機率是多少？

福袋內容物	抽中機率
Pocky+透明奶茶	$\frac{41}{100}$
透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{4}$
Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{17}{100}$
Apple+Pocky+透明奶茶	$\frac{3}{20}$
Apple+Pocky+透明奶茶+五月花衛生紙	$\frac{1}{50}$

4. 從連續正整數 40、41、42、……、97、98、99 中隨機取一數，則
- (1) 個位數字等於十位數字的可能有哪幾種？
(例：77)
- (2) 個位數字等於十位數字的機率是多少？

5. 有兩個 1~6 點的公正骰子 A 與骰子 B，A 骰出現的點數為 a ，B 骰出現的點數為 b ，則點數 a 與 b 依序所組成的數為奇數的機率是多少？
例如：當 $a=1, b=3$ 時，所組成的數為 13。
6. 劉老師以抽籤的方式決定到江辰、小希、柏松三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則江辰是第一個、小希是第二個被家庭訪問的機率為多少？
7. 胡一天的早餐選擇有大龍蝦肉貝果或小鳳梨素菜包兩種，午餐選擇有青醬佐石斑魚肉、紅醬佐茄子或白苦瓜沙拉三種。假設選擇每一樣食物的機會都相等，則胡一天的兩餐中都有吃到肉的機率為多少？
8. 金福珠為了練舉重，她選擇吃蘇打餅乾的機率為 $\frac{3}{4}$ 。選擇完蘇打餅乾之後，再決定要不要喝草莓牛奶，則她選擇喝草莓牛奶的機率是 $\frac{4}{7}$ 。
- (1) 金福珠不吃蘇打餅乾的機率為多少？
- (2) 金福珠選擇不吃蘇打餅乾，但要喝草莓牛奶的機率為多少？
9. 川大大、習大大、安大大三位領袖玩猜拳遊戲，決定如何制裁北韓，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？
提示：除了三人出同樣的，還有其他狀況喔！

三、想一想：請閱讀以下的問題並回答，如果可以，請寫下理由。

民國 109 年時，請你(妳)評估自己考上楊梅高中的機率是多少？

附錄七. 機率課程回饋單

回饋單

姓名：_____

給過嶺國中的同學：

很開心今天有這樣的機會能夠陪伴你們上課，也在此恭喜你們每一個人都順利完成機率課程。現在想請你們幫忙老師填寫以下的問題，讓老師可以更瞭解你們的狀況以及在往後教學上能做些調整，謝謝！

哲毓、芷雲 老師

- 對於機率的課堂中，你覺得你能理解的內容有多少？
 非常多 很多 普通 很少 非常少
- 你覺得你可以清楚知道樹狀圖如何畫出來？
 非常多 很多 普通 很少 非常少
- 你覺得你可以利用樹狀圖解釋事件的機率？
 非常多 很多 普通 很少 非常少
- 這本書(課程)你最喜歡哪一個部分?(可複選)
 插圖 機率知識 接力畫樹狀圖 階級遊戲
 例題提供你練習畫樹狀圖的機會 其他：_____
- 如果滿分是 10 分，你會給老師們幾分呢？
 10 分 9 分 8 分 7 分 6 分
 5 分 4 分 3 分 2 分 1 分
- 你閱讀和寫過這本書後，你學到了什麼？
- 你有什麼話想對老師們說嗎?(例如：鼓勵、建議)

附錄八. 學生的回饋

一. 許氏機率和回饋

了解了如何算機率，
總和為“1”

1. 對機率有些微的了解。”

2. 遊戲很好玩，也學到很多
有關機率的問題，收穫滿
滿。”

學會國三教的機率
依十

我覺得這門課讓我們了解了很多現在課外的東西。每個人的意見都不同。

我覺得很有趣，讓我學到了很多知識

答(二) 今天玩遊戲玩的很開心，也令我了解到更多
關於機率的事

我覺得今天的課很好玩，對於機率
也更加了解

上完這堂課後，我學到了很多以前不知道的事情，
希望下次還可以在上。

非常有趣
超好玩又可以學習
老師人又超好
總分: 100
評分: 100

今天玩了很多遊戲, 海盜叔叔, 工程帽
都很有趣, 讓整個教室充滿了歡樂
的氣氛, 很喜歡這樣的數學課。

覺得機率很奇妙
也很實用!!
尤其是考試的時候
每個題目都有不同的去機
這超酷的!

很開心! 不像傳統課程^有互動。
時間過的很快, 不知不覺學會了
哈!!!!

今天上課很有趣, 姐姐人很好, 機率很好玩。
想說會很無聊, 結果上得都是生活上的瑣事,
平常不會注意的, 今天都一一研究過, 而且跟
我最討厭的math一點關係都沒有, 希望以
後可以多上一些類似這種的課程。

老師最可愛了 ♥
喜歡妳 ♥

二. 課程回饋單

7. 你有什麼話想對老師們說嗎?(例如:鼓勵、建議)

謝謝老師們教我們學機率

7. 你有什麼話想對老師們說嗎?(例如:鼓勵、建議)

謝謝你們教我們學機率,我想應該對未來有所幫助。

7. 你有什麼話想對老師們說嗎?(例如:鼓勵、建議)

我覺得你們真的很認真,帶我們進行的活動也很有意義,很好玩。謝謝老師!

7. 你有什麼話想對老師們說嗎?(例如:鼓勵、建議)

在剛開始上課時,我一直覺得反正只要是數學課都很無聊。可是上了這個之後我覺得其實數學也可以很好玩。希望你(妳)們可以加油!

7. 你有什麼話想對老師們說嗎?(例如:鼓勵、建議)

老師!加油!相信你們可以成為好數學老師!!><
可以多上課~希望下學期可以繼續上課~(老師不要換哦XD)

7. 你有什麼話想對老師們說嗎?(例如:鼓勵、建議)

我很喜歡那個姓老師,他長的很漂亮而且也很好親近,有時候會因為有那個老師然後想上這堂課。