

國立中央大學

數學系

碩士論文

「高一學習多項式微分」之教案研究

**A Study on the Lesson Plan of Polynomial Derivatives
for Grade 11 Students**

研究生：龍昌灝

指導教授：單維彰

中華民國 104 年 6 月



國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(104年5月最新修正版)

本授權書授權本人撰寫之碩/博士學位論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註1說明),在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。(以下請擇一勾選)

- 同意 (立即開放)
 同意 (請於西元 _____年____月____日開放)
 不同意, 原因是: _____

在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

- 同意 (立即開放)
 同意 (請於西元 _____年____月____日開放)
 不同意, 原因是: _____

以非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統圖書館與國家圖書館,基於推動「資源共享、互惠合作」之理念,於回饋社會與學術研究之目的,得不限地域、時間與次數,以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、與利用,並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式,提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名: 龍昌毅 學號: 100221013

論文名稱: 「高一學習多項式微分」之教學研究

指導教授姓名: 單作勤

系所: 數學 所 博士班 碩士班

填單日期: 2015.6.26

備註:

1. 本授權書之授權範圍僅限電子檔,紙本論文部分依著作權法第15條第3款之規定,採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽,如您有申請專利或投稿等考量,不同意紙本上架陳列,須另行加填申請書,詳細說明與紙本申請書下載請至本館數位博碩論文網頁。
2. 本授權書請填寫並親筆簽名後,裝訂於各紙本論文封面後之次頁(全文電子檔內之授權書簽名,可用電腦打字代替)。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文,應遵守著作權法規定。

「高一學習多項式微分」之教案研究

摘要

本研究旨在探討研究者與指導教授共同設計的「高一學習多項式微分」教案。本教案共設計四堂多項式的微分課程與一份測驗，從泰勒形式帶入多項式的微分觀念，最後能描繪出三次多項式函數與解決應用問題。本研究並根據測驗結果分析且討論不同程度的高一學生學習多項式微分的成效與問題所在。

根據研究結果顯示，程度佳的學生對於此教案幾乎能完全學會；而程度中等至中下的學生，對於此教案前面的部分尚能接受，但對於後半部分三次函數的圖形與應用問題的部分，則半數以上學生學習成果較差。若增加後半部分的教學時間，亦能提升學生的學習成效。部分學生對於數學語言無法確實掌握，此問題不僅發生在程度中下的學生，亦出現在程度佳的學生中。

最後研究者依據研究結果，對教學情況與教材內容設計及未來相關研究提出建議。

【關鍵詞】：綜合除法、泰勒多項式、多項式函數的微分。

A Study on the Lesson Plan of Polynomial Derivatives for Grade 11 Students

Abstract

This study aims at investigating the lesson plan of polynomial derivatives for grade 11 students. Four lectures and one assessment consist the lesson plan which was designed by the researcher and the advisor. This lesson plan regards the form of Taylor as the cutting point. By the end of the lectures, students can sketch the cubic polynomial function and solve the application problems. Basing on the observation and assessment results, this study analyzes and discusses the effects and problems of learning the polynomial derivatives on different level students of grade 11.

On the one hand, the result shows that advanced learners can almost acquire all the lessons. And the medium to challenged learners can learn the former part, but over half of them can not learn well on the latter part: sketch the cubic polynomial function and solve the application problems. If the teaching time of the latter part is increased, the learning effect can be better. On the other hand, some students fail to grasp the mathematical language precisely, which happens not only in medium and challenged learners but also in advanced learners.

According to the result, the researcher provides some suggestions for teaching conditions, lesson plan designs and related studies in the future.

Keywords: synthetic division, Taylor polynomials, polynomial derivatives

致謝

論文及口試的完成，即代表人生將踏上另一旅程；碩班的這一路上，走的既平順又顛簸，遇到了很多人，學會了很多事，如今想起，歷歷在目。

首先感謝我的父母及哥哥，在我最徬徨無助時默默的在旁邊陪伴著我，做我最強力的後盾。

再來，我要感謝我的指導教授單維彰教授，您公務繁忙，但對於我的指導仍然不遺餘力，從教案的設計、學習單及作業的規劃，到口試完最後修改的建議，都給予我最大的幫助，且從您的身上學習到了您對事情的處理方式，對我未來的人生有很大的幫助；接著感謝口試委員，師大的許志農教授與彰師大的施皓耀教授，給予我論文中的文獻探討及結論的部分很多的建議；還要感謝參與本研究的三所高中的教務主任、教學組長、老師及學生們的協助，沒有您們的幫助，這篇論文就沒辦法順利完成。

還要感謝雅云、韻婷曾經陪伴著我，教程的老師辛苦教導，研究所同學們與師培同學們的相處時光，實習時的好夥伴采薇。

也感謝中央數學系壘球的的隊友與校隊的隊友們，讓我在中央的日子也能有休閒娛樂，也希望未來能再一起快樂打球。

最後，感謝所有關心我的人，也希望這篇論文能對國家社會有所貢獻！

昌灝 謹誌

104年6月

目錄

摘要.....	i
Abstract.....	ii
致謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
第一章 緒論	
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的與待答問題.....	4
第三節 研究範圍與限制.....	5
第四節 台灣高中微積分課程的發展.....	6
第五節 泰勒級數的發展.....	10
第二章 文獻探討	
第一節 高中多項式函數(含微積分)內容之相關研究.....	12
第二節 香港、中國、日本的高中數學對於微積分課程的安排.....	18
第三章 研究方法與實施步驟	
第一節 研究設計與流程.....	37
第二節 研究對象.....	39
第三節 研究工具.....	40

第四章 研究結果與討論

第一節 上課狀況.....	49
第二節 作業狀況.....	50
第三節 測驗結果與討論.....	52
第四節 綜合分析.....	61

第五章 結論與建議

第一節 結論.....	64
第二節 建議.....	65

參考文獻.....	68
-----------	----

附錄

【附錄一】高中數學課程「多項式的微分」教案.....	70
【附錄二】作業與學習單及測驗.....	77
【附錄三】十一回試卷中「 單元 H 三次函數的圖形」.....	97
【附錄四】甲、乙、丙三所高中測驗成績表.....	101

表目錄

表 1.1.1 學科能力測驗的測驗範圍	1
表 1.1.2 指定科目考試的測驗範圍	2
表 1.1.3 數學甲(II)(節錄自高中數學課程綱要(99))	2
表 1.1.4 數學乙(II)(節錄自高中數學課程綱要(99))	3
表 1.4.1 台灣高中數學課程微積分部份的演變	8
表 2.1.1 與本研究教案相呼應(但切入點不同)的內容說明	17
表 2.2.1 單元一(微積分與統計)的學習目標	20
表 2.2.2 單元二(代數與微積分)的學習目標	21
表 2.2.3 單元一微積分相關學習重點	21
表 3.2.1 本研究之研究對象分析表	39
表 3.3.1 教學目標與教學內容比照表	42
表 4.1.1 甲、乙、丙三班的上課情況比較表	50
表 4.2.1 甲、乙、丙三班的作業狀況比較表	51
表 4.3.1 甲高中的測驗結果	58
表 4.3.2 乙高中的測驗結果	59
表 4.3.3 丙高中的測驗結果	59
表 4.4.1 三高中各題得分、標準差與總分比較表	61
表 4.4.2 甲、丙兩高中比較表	63

圖目錄

圖 2.2.1 香港數學課程架構圖.....	19
圖 2.2.2 中國大陸高中數學課程架構.....	27
圖 3.1.1 研究架構圖.....	37
圖 3.3.1 學習單 I 的隨堂練習(1)及例題(1)，需先瞭解 泰勒型式，才能藉此完成例題(1)。	43
圖 3.3.2 學習單 II，需先求出商，才能求出極限值；並用不同的標記法，讓學生瞭解都代表同一件事情。	44
圖 3.3.3 學習單 III，按部就班讓學生慢慢完成二次的 函數圖形所對應的導數正負值及極值。	44
圖 3.3.4 作業一，不同係數的方程式及不同敘述的問法。	45
圖 3.3.5 作業二，各種不同題型及同樣事情不同問法。	46
圖 3.3.6 作業三，相較於學習單，有更多的練習及不同的情況。	46
圖 3.3.7 作業四的第 1 題及第 4 題，第一提列出的是二次方程式，作業四則是三次方程式。	47
圖 3.3.8 測驗第 1 題與第 2 題，分別以不同的方式問關於微分的問題.....	48
圖 3.3.9 測驗第 4 題及第 5 題，第 4 題為有極值、遞增、遞減區間；第 5 題則為只有遞增區間，無極值與遞減區間.....	48
圖 4.2.1 兩位不同的學生對於同一題作業，切線方程式的表示方式錯誤，紅色圈的部分為研究者批改時幫他們改正的.....	50
圖 4.3.1 測驗第 2 題(c)小題.....	52
圖 4.3.2 切線方程式寫成 $f(x)=-1$	53
圖 4.3.3 切線方程式寫成：切線方程式=-1 的情況.....	53
圖 4.3.4 切線方程式只寫-1 的情況.....	53

圖 4.3.5 測驗第 4 題.....	54
圖 4.3.6 圖形樣貌對，但對稱點位置標錯.....	54
圖 4.3.7 圖形樣貌對，但對稱點及極大值與極小值位置錯且均未標示.....	55
圖 4.3.8 測驗第 5 題.....	55
圖 4.3.9 三次函數圖形「扭錯」，且對稱點位置錯誤，錯兩個部份，故該題得零分.....	56
圖 4.3.10 第 4 題與第 5 題皆猜無，不予給分.....	56
圖 4.3.11 測驗第 6 題.....	57
圖 4.3.12 測驗第 6 題分段給分的標準.....	57

第一章 緒論

本章分共五小節，第一節根據目前高中數學的微積分課程規劃探討本研究的研究背景與研究動機；第二節提出研究目的與待答問題；第三節對研究範圍、研究對象、研究工具、研究限制進行說明；第四節將台灣的高中數學課程微積分部分從民國五十年代至民國一百年的改變與演化進行說明與分析；第五節簡單介紹泰勒級數與泰勒的生平。

第一節 研究背景與動機

高中生為什麼要學微積分？張海潮教授(2008)說至少有兩個答案：

1. 微積分的發明在數學及相關問題上的突破，值得高中生學習。
2. 微積分的方法對高中階段能夠解決的問題有所幫助。

微積分的好處既然那麼多，但卻不是每個高中生都能學到，只有自然組的學生才有機會學到微積分。上大學以後，對於理、工、商學院的學生，微積分幾乎是最重要的數學基礎科目。但對於目前進入大學的升學考試，分成學科能力測驗和指定科目考試，而考完學科能力測驗後，能經由繁星推薦與個人申請的方式進入大學就讀，不需要再去準備指定科目考試。其測驗範圍如表 1.1.1 所示。

我們能發現，以目前台灣的課程綱要來說，只有在高三選修科目數學甲(II)，才會學習到微積分，而高三選修科目數學乙(II)只有教到數列的極限與函數的極限；表 1.1.3 是數學甲(II)與數學乙(II)相關部份的高中數學課程綱要。

表 1.1.1 學科能力測驗的測驗範圍

考科	範圍
數學	高一必修科目數學、高二必修科目數學 A 版

表 1.1.2 指定科目考試的測驗範圍

科目	考試範圍
數學甲	高一必修科目數學、高二必修科目數學 B 版 高三選修科目數學甲(I)、高三選修科目數學甲(II)
數學乙	高一必修科目數學、高二必修科目數學 A 版 高三選修科目數學乙(I)、高三選修科目數學乙(II)

表 1.1.3 數學甲(II)(節錄自高中數學課程綱要(99))

主題	子題	內容	備註	
一、 極限與 函數	1. 數列及其極限	1.1 兩數列的比較	1.2 以圖形、電腦展示的範例建立學生對於極限的直觀 1.4 可用圖形或面積意涵說明夾擠定理	
		1.2 數列的極限及極限的性質		
		1.3 無窮等比級數、循環小數		
		1.4 夾擠定理		
	2. 函數的概念	2.1 函數的定義、圖形、四則運算與合成函數	3.3 不涉及分部積分與變數變換法	
		3. 函數的極限		3.1 函數的極限
3.2 連續函數、介值定理				
二、 多項式 函數的 微積分	1. 微分	1.1 導數與切線		
	2. 函數性質的判定	1.2 微分的加、減、乘運算		
		2.1 遞增、遞減、凹凸性、函數極值的一階與二階檢定法		
	3. 積分的意義	2.2 三次多項式的繪圖		
		3.1 定積分的意義		
		3.2 微積分基本定理		
	4. 積分的應用	3.3 多項式函數的定積分與不定積分的計算		
		4.1 以求圓面積、球體體積、角錐體體積、解自由落體運動方程式為主		

表 1.1.4 數學乙(II)(節錄自高中數學課程綱要(99))

主題	子題	內容	備註
一、 極限與函數	1. 數列及其極限	1.1 兩數列的比較 1.2 數列的極限及極限的性質	1.2 以圖形、電腦展示的範例建立學生對於極限的直觀
	2. 無窮等比級數	2.1 無窮等比級數 2.2 循環小數 2.3 夾擠定理	2.3 可用圖形或面積意涵說明夾擠定理
	3. 函數的概念	3.1 函數的定義、圖形、四則運算與合成函數	
	4. 函數的極限	4.1 函數的極限 4.2 連續函數、介值定理	

然而，大學甄選入學及其他非考試分發入學管道的招生名額年年提高，意即越來越少人會去學習到數學甲(II)的微積分內容，甚至連自然組的學生只要考完學科能力測驗後，經由繁星推薦或是個人申請方式確定能進入大學後，高三下學期的微積分都不會認真學習。

高晟鈞(2009)在《大一上學期各系必修課程與高中數學教育微積分課程的探討》之論文中指出『因為大學專業課程的需要¹』是與該研究最直接且切合的答案；該研究亦指出，學生在大一學微積分的同時，已經同時在學其他的科目了，而這些其它的科目幾乎是把微積分當成應用工具，而「微積分課程」則是把微積分當成專業的課程在教授。不論學生在哪一個學系修了哪一個跟微積分有關的課程，而其課程不論需要會多少微積分，這些學系的微積分課程都不需要跟數學系學生修的微積分課程一樣地從極限開始教起，每個學系因為專門領域的不同，對微積分的需求也不太一樣，因此對於「高中生為什麼要學微積分」這個問題，該

¹關於「高中生為什麼要學微積分？」，張海潮教授曾給了兩個答案；單維彰教授(2008)在《美國 AP 課程的啟示》中給了此第三個答案。

研究提供了與「第三個」答案幾乎相同的結論：「高中的微積分課程並非為了大學的微積分課程作準備，而是針對各其它專業課程作準備」；更甚地，該篇論文藉由文本分析說明大學在哪些專業課程中，確實地需要微積分知能。

李明憲(2013)在《高一第一類組學生數學科學習需求分析研究》之論文中亦提出「大多數商管學院之大一學生對於大一微積分之學習有銜接上之困難」之論點，該研究結果指出，商管系學生大部分來自於社會組，但是他們在高中時並未修習過選修數學(II)，這些學生與高中就讀自然組的學生相較之下，更有銜接上的困難。

基於以上原因，如何讓大部份的高中生都能學習到微積分的基本原理與功能，是本研究所感興趣的，因此欲設計與推廣一套對於大部分高中學生都能接受的微積分課程。

第二節 研究目的與待答問題

基於上述研究動機，本研究之主要目的，在於設計一套能符合大多數高中生學習的微積分課程，課程內容四至五堂課內結束，並且在符合大部份高中生的認知範圍內設計該課程，並且探討不同程度的高中生對於該課程的學習成果。

根據上述目地，提出以下兩點待答問題：

1. 是否能設計出一套符合高一學生學習的多項式微分教材？
2. 不同程度的高中生對於此設計的微積分教材會有什麼樣的學習差異？

第三節 研究範圍與限制

I. 研究範圍

本研究旨在設計一套能符合大部份高中生學習的基礎微積分教材，從多項式的微分發展起，故將研究範圍界定如下：

壹、研究對象

本研究從桃園市三所高中各抽選一個班級，其程度分別為中等偏下、中等、與高。

貳、研究工具

本研究將根據【附錄一】之教案與【附錄二】之教材與測驗題目，對上述研究對象做實地教學並檢視其結果。

II. 研究限制

本研究受限於人力、時間、及客觀條件下，無法對更多不同的高中學生實施實驗，而以桃園市鄰近中央大學的三所不同高中進行實驗。

第四節 台灣高中微積分課程的發展

研究者在「國家教育研究院圖書館」實地考察台灣的高中數學課程，東華書局根據教育部於民國五十三年三月公佈之「高級中學數學教材大綱」，第五冊(自然科組)「第七章-切線與法線」，談及跟微積分相關之內容，其內容先介紹「極大點」、「極小點」以及過某點之切線，目的在於探究多項函數之最佳線性近似之求法，其說明切線的方法使用了 ε ，但並未出現極限 \lim 之符號(但在前兩章說明無窮數列與級數時都有使用)，並且介紹了「反曲點」，但定義「反曲點」的方式為：圖形若在某點處由切線之一邊穿過至切線之另一邊，則此點為此圖形之一反曲點。而在「7-4 斜率函數」的部分，利用綜合除法及二項式定理推導出斜率函數 f' (並未提及導數、導函數、微分等名詞)；並在「7-6 過圓錐曲線上一定點之切線」說明了在圓錐曲線上特定点的切線求法。而積分的部分，該課本並沒有任何說明，僅在第六冊(自然組)後面附錄的部分提及「面積函數」的名詞(即多項函數圖形下之面積)，也並未使用積分符號 \int 。

東華書局根據教育部於民國六十一年公佈之「高級中學高中數學課程標準」，第五冊(自然組)「第一章-參數方程式，切線，法線與極大極小」，開始利用 \lim 定義切線斜率，但僅定義切線斜率，並未做其他關於微分的延伸，而極大極小的部分則是屬於三角的疊合、線性規劃、直線與橢圓間距離極值的內容；多項函數極值的部分則是在「第六冊(自然組)第二章-多項函數」才予說明，在該章始提及「導式」與「導函式」，但其主要說明與定義仍放在附錄的部分(順帶一題，附錄內使用了與目前相同的微分定義，且明確的定義「可微分」的極限式)，該章的重點主要是在「泰勒展開」與利用 f' 、 f'' 來求得極大值、極小值；課程仍未出現積分的相關內容。(在第六冊的附錄內出現「反導數」、「不定積分」、「 $\int f(x)dx$ 」等說明，旨在說明面積函數)。

國立編譯館根據教育部於民國七十二年七月公布的「高級中學數學科課程標

準」，開始與目前高中的微積分課程相似，高級中學理科數學上冊開始提及極限與導數，明確地使用極限來定義導數，且完整的說明「將 $f(x)$ 微分」、「 $f(x)$ 可微分」其文字中「微分」的不同詞性，並說明「將函數 x^2 微分」意思等同於「求函數 x^2 的導函數」，也使用了 $\frac{df}{dx}$ 符號，各個微分公式與連鎖規則也都給予完整的證明；第二章開始說明導數的應用，包含極大值與極小值的探討，利用函數的遞增、遞減、極大極小值、反曲點來做三次函數圖形描繪，接著說明圓錐曲線的切線方程式。積分的部分出現了上和、下和的觀念，並說明了定積分、不定積分，且完整地說明了微積分基本定理 I、II，說明如何求曲線間的面積與旋轉體的體積及物理學中「功」的問題。最後將三角函數與指對數函數的微分與積分公式列出並做些許說明。高中的微積分課程始有了完整規劃。

民國七十八年起政府開放民間出版教科書，開始出現各種不同版本的教科書，選定三民書局依據民國八十四年十月教育部修正發布之「高級中學數學課程標準」之版本，數學甲《下冊》第 2 章開始談論導數的極限定義，並說明導數的物理意義和微分的各種基本公式，但只使用 $f'(x)$ 這個符號，並未使用 $\frac{df}{dx}$ ；接著說明多項函數的遞增、遞減問題但僅以一階導數判別極大值與極小值，並未使用二階導數，也並未出現「反曲點」的概念，也只需能求出極值，並未要求描繪出三次函數的圖形。積分的部分僅在「2-5 函數圖形下的面積」內用上和與下和的概念說明，但並未出現「積分」或是「 $\int f(x)dx$ 」這些敘述，且內容也只需會計算一次及二次函數曲線下的面積就可。相較之下，較民國七十年代的内容量少很多。

三民書局根據民國九十七年教育部修正發佈之「普通高級中學選修科目-數學課程綱要」，微積分部份的內容包含導數的極限定義、函數圖形的遞增、遞減、極大、極小、凹向性、反曲點，接著說明微分的基本公式與二階導函數；再來說明極大值極小值的一階與二階檢定法，最後要能利用遞增、遞減、極大值、極小值、反曲點等方法描繪出三次函數的圖形。積分的部分，上和、下和、積分符號

$\int f(x)dx$ 、定積分、不定積分、做功、反導函數、微積分基本定理等內容均有包含，最後說明以積分方法求圓的面積、旋轉體體積、自由落體等應用問題結尾。

台灣的高中數學課綱微積分部份至此所學習之內容趨於穩定，未來的發展如何則不得而知；總結微積分至此的內容，共可分為三大重點：

- 一、內容以多項式的微積分為主，僅在 70~80 年代多了三角函數及指對數函數的微積分，但後來該內容又刪掉了，因此仍以多項式的微積分為教學重點，且次數為二次、三次多項式為主。
- 二、積分在高中數學課程內較晚出現，在 60~70 年代時已出現了微分的教材（雖未提及微分、導數等名詞），但積分的部分當時是擺在附錄的部分，直到 70 年代以後才納入高中正式教材內；但 80 年代又只教上和及下和的概念，至 90 年代才又出現積分的完整教材。
- 三、微積分基本定理的部分，70~80 年代開始編入教材（84 年課綱時期，因未教積分符號，故未提微積分基本定理），且都以直觀的方法來說明微積分基本定理，並非嚴謹地證明微積分基本定理。

最後將台灣的數學課綱微積分部分變化整理如表 1.4.1 所示：

表 1.4.1 台灣高中數學課程微積分部份的演變

	微分部分	積分部分	附註
50 年代~ 60 年代	介紹極大點、極小點 、切線、反曲點。 使用 ε 介紹切線。	無	反曲點並未給予明確的 定義。 未寫出導數、導函數、 微分等名詞，僅使用斜 率函數。

60 年代~ 70 年代	利用 \lim 定義切線斜率 泰勒展開與利用 f' 、 f'' 求得函數極值。	無	微分的極限定義仍擺在 附錄。 積分的面積函數也擺在 附錄。
70 年代~ 80 年代	完整的介紹微分的極限 定義、公式證明。 說明各種不同敘述代表 相同的數學意義。 三次函數的描繪。 圓錐曲線的切線方程式。	上和、下和的概念。 曲線間面積、旋轉體 體積。 物理中「功」的應用。	完整敘述微積分基本定 理 I、II。 三角函數與指對數函數 的微積分亦有提及。 包含 e^x 、 $\ln x$ 的微積分。 內容量最多。
84 年課綱	導數的極限定義。 導數的物理意義與微分 的基本公式。 僅利用一階導數判斷函 數的遞增遞減。	僅說明上和與下和的 概念。 未提及積分與積分符 號 $\int f(x)dx$ 。	只使用 f' ，不使用 $\frac{df}{dx}$ 。 未提及反曲點及二階導 數。 未描繪三次函數的圖 形。 內容為近年來最少。
95 年暫綱	引入 Δy 及 $\Delta y / \Delta x$ 討論 函數割線的斜率，並說明 在運動學上的意義。 以二次函數說明割線斜 率的極限是切線的斜率。 函數圖形的遞增、遞減、 凹向性、反曲點。 極值的一階、二階檢定。 三次函數的描繪。	黎曼和與圍成面積。 積分符號。 定積分的應用：圓面 積、球體體積、角錐 體積、自由落體運動 方程式。	內容與與 70~80 年代的 課程較為類似，但是刪 掉三角函數與指對數的 部分。 亦有微積分基本定理 I、II 的敘述。
99 年課綱	於表 1.1.3 與 1.1.4 所示，在此不贅述		

第五節 泰勒級數的發展

泰勒級數的淺介(含布魯克·泰勒)

泰勒級數(Taylor series)用無限項連加式—級數，來表示一個函數，這些相加的項由函數在某一點的導數求得。

設 f 在點 x_0 的某一鄰域 $N(x_0)$ 中為有定義的，且在 $N(x_0)$ 中 f 具有任何階的導函數（以 $f \in C^\infty(N(x_0))$ 表之）則我們可形成一特殊形式的冪級數：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

則稱上式為 f 在點 x_0 的泰勒展開式。²

泰勒級數是以於 1715 年發表了泰勒公式的英國數學家布魯克·泰勒(Sir Brook Taylor, 1685-1731)來命名的。1701 年布魯克·泰勒進入劍橋大學聖約翰學院，1709 年他獲得法學學士，且於 1714 年獲得法學博士學位，同時他也學習數學。

任何多項式都能以泰勒級數的方法表示，也都會是有限項，因此用泰勒級數方法表示的多項式也能稱為泰勒多項式，而泰勒多項式的係數也不須由導數的方式求得，可用多項式的除法求出係數，此部份見於第三章。

為了完整起見，以下關於泰勒的生平節錄自微基百科(2015)：

1712 年泰勒被選入皇家學會，同年他加入判決艾薩克·牛頓(Sir Isaac Newton, 1643-1727)和戈特弗裡德·萊布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)就微積分發明權的案子的委員會。從 1714 年 1 月 13 日至 1718 年 10 月 21 日他任皇家學會的秘書。從 1715 年開始他的研究開始轉向哲學和宗教。1719 年他從亞琛回到英國後寫的《關於猶太教犧牲》和《食血是否合法》未完成，後來在他的遺物中被發現。1721 年他結婚，但是他父親不贊成這

² 通過函數在自變量零點的導數求得的泰勒級數又叫做邁克勞林級數，以蘇格蘭數學家科林·麥克勞林的名字命名

個婚姻，兩人因此不和。直到 1723 年他妻子死後他才又和父親和解。此後兩年中他住在家裡。1725 年他再次結婚，他的第二任妻子也在生產時逝世（1730），但是這次孩子，一個女孩兒，存活下來了。泰勒的身體狀況越來越壞，不久也逝世。雖然泰勒是一名非常傑出的數學家，但是由於不喜歡明確和完整地把他的思路寫下來，因此他的許多證明沒有遺留下來。

第二章 文獻探討

本研究的重點在於高中多項式微分，因此本章第一節節探討了兩篇關於高中多項式函數(含微積分)的碩士論文，並將該論文內編製的測驗與本研究的測驗進行比較；第二節說明香港、中國、日本三個鄰近台灣的亞洲國家對於高中數學課程微積分部分的内容進行說明，最後進行說明與比較。

第一節 高中多項式函數(含微積分)內容之相關研究

大考中心在各教育界學者專家周詳的討論下，於1999年針對學生數學的認知過程，將其分為「概念性」、「程序性」與「解題能力」等三個層面，期測驗目標即為評量學生是否具有這三方面的知能(林福來等,1999)；其中「解題能力」，根據孫瑞良(2009)在《高中數學多項式函數(含微積分)其解題試題與應用問題之研究》界定「解題能力」之測驗目標如下：

1. 能從情境中辨識數學元素並形成問題
2. 能了解條件的充分性與一致性
3. 能應用適當的定義、定理或性質
4. 能使用相關的數學知識或策略轉換問題
5. 能使用、修改或推廣程式
6. 能運用推理能力
7. 能檢驗結果的合理性與正確性
8. 能使用數學語言表達解題過程

廖振能(2009)在《高中數學多項式函數(含微積分)其概念性試題與程序性試題之研究》中界定「概念性試題」，主要是依據安德生(Anderson)所修訂的知識向度內容中概念知識所發展出的試題，概念知識主要指基本要素與較大的結構共同發揮功能的互動關係，包含類別、分類以及它們之間關係的知識；根據大考中心的命題標準，概念題須能測出學生是否具有以下種能力：

1. 能辨識某概念的正、反例
2. 能利用模型、圖形、符號或公式來表達某概念
3. 確認概念中基本的數學原理(如：對稱原理、等量公理)
4. 知道定義的條件或性質
5. 聯結某概念不同的形式
6. 整合各種概念間的關係
7. 從不同情境中，辨識與解釋符號所表達的概念
8. 解釋問題中的條件及涉及的概念
9. 能診斷概念的錯誤

廖振能(2009)界定「程序性試題」，同樣是依據安德生所修訂的知識向度中程序知識所發展出的試題，程序知識為有關如何完成某事的流程、探討方法以及使用技巧、演算、記述和方法的規準；根據大考中心的命題標準，程序提須能測出學生是否具有以下四能力：

1. 能操作數與符號的運算及估算
2. 能正確選擇適當的程序
3. 能讀圖、查表、製作圖表
4. 能檢驗所用的程序無誤

孫瑞良(2009)指出，一般坊間的多項式函數(含微積分)題型大部分是「解題能力」，而「概念性」與「程序性」則較少，甚至連「解題」試題也是充斥著「難、偏、怪」，容易揠苗助長，造成學生學習上的迷思；該研究的結論與建議如下：

一、小組審題在表達不同的教學視野，激發出新題型的研發

一份好的試題需要由一群專業的小組成員以不同的教學角度，進一步激發出研發新題型的創意，篩選出較好的例子，篩選出來的例子能先給班上同學根據單題進行施測，再將答對率過低的題目進行修題或刪題，若是答對率在設定範圍內則可將該題放置試卷中。

二、好的題目可以用來評量或者是當教材

好的題目可當作教學上的例子，也可以用來澄清觀念，引起學生的學習動機，好的題目也可當作測驗，有效評量學生的程度。

三、掌握考卷的命題原則有助於教學評量及引導學生學習

試題內容要能清楚表達題意，並能契合該題的測驗目標，避免同時包含太多公式或概念。題幹與選項的邏輯上要能連貫，避免出現可能暗示正確答案的根據，同時盡量用正面的敘述，避免使用否定句；題幹的敘述應保持完整，避免被選項分割成兩個部分或段落，且語句敘述應具備邏輯性。

四、試卷運用「概念」與「程序」題型的鋪陳有助於「解題」的呈現

「解題」題型通常扮演學生分數高低的角色，所以在題目的安排順序上避免排在題組的前二題，除非題目的難度較低，或者該大題只有一題「解題」題型；另外「概念性」與「程序性」的測驗目標，盡量能幫「解題」題型鋪陳，使得學生在測驗過程中，就有學習到該單元的整體重點，達到複習的目的。另外，在施測時部分同學因為考卷上的題目無法全盤應付，於是大部分的時間都在解決「概念性」與「程序性」等題型，所以「解題」之題型設計不可太難，避免學生有棄保效應。

五、試卷應注意「解題能力」與「程序性」試題屬性的不同

「解題試題及應用問題」在進行整卷時，有時候很容易跟「程序性」題型重複，因為解題與程序兩種題型是有某種程度的交集。解題步驟在一至兩個之內，或者讀圖之後帶入一般的公式或定理，答案很快就出來，即為「程序性」題型；若是解題，則解題步驟就在兩個以上，而且讀圖之後還得進行公式轉換。

孫瑞良(2009)主要是針對解題試題與應用問題方面進行探討，而對於概念性試題與程序性試題的研究，主要是廖振能(2009)在《高中數學多項式函數(含微

積分)其概念性試題與程序性試題之研究》中探討，學生在多項式(含微積分)階段最容易混淆的概念包含：

- (一) 圖形與函數無法轉換。
- (二) 多項式的除法、餘式次數小於除式次數的觀念不足。
- (三) 牛頓法只能用於整係數多項式。
- (四) 僅會使用十字交乘法進行因式分解。
- (五) 方程式的根分為實根與虛根，實根的幾何解釋必須用多項式函數圖形配合。
- (六) 易混淆負根與虛根。
- (七) 不等式要在實數範圍討論才有意義。
- (八) 等比數列與級數收斂時的區分不清。
- (九) 黎曼和的極限與面積之間的差別。
- (十) 切線的定義是由割線逼近切線的概念，所以函數圖形與切線切點外可能有其他交點。
- (十一) 學生對三次函數的圖形概念不清，亦無法有效判斷三次方程式的實根個數。
- (十二) 學生在處理實際應用問題時，常發生因閱讀能力有限或觀念不清而無法將文字轉換成數學式。

廖振能(2009)亦給了以下三點建議：

一、教師同儕團體的善用

在蒐集資料進行題目分析後，試題審閱的程序極為重要，在審題時可善用教師同儕團體，由於教師同儕具有教學現場的實際經驗，因此在審題時可提供不同的意見，進而激盪出創新題型的思維。

二、試題角色多樣化

創新試題不僅可作為評量學生學習成就的工具，更可以做為教師課堂上引起

學生學習動機及澄清觀念的教學示範題型，在教學過程中可發現，學生一旦遇到新開發的題目，就會覺得新鮮有趣，有較多的意願思考與學習，因此開發出新題型後將其腳色多樣化將有助於教師教學及學生的學習。

三、建立題庫

如能運用社會資源，將各單元就概念程序解題三方面分類整合優良試題以建立題庫，以供學生使用，加強其不足的地方，從單向的加強進而收到全面的整合。

其研究團隊在該研究中創造了十一回試題範例，並邀請大學教授與六位高中教師來共同審視這十一份題目，以檢視試題的敘述是否清楚、題目條件是否充足、答案是否正確無誤；其試題正式施測時分兩個部分，一個是多項式的基本性質(單元 A-D)，另一個是選修(II)的多項式函數微積分(單元 E-K)，各個不同單元的名稱列述如下：

一、「多項式函數基本性質」部份

單元 A 多項式的運算及餘因式定理

單元 B 多項式函數

單元 C 多項式方程式

單元 D 多項式不等式

二、「多項式函數微積分」部份

單元 E 函數圖形及極限概念

單元 F 割線、導數及切線斜率

單元 G 函數的遞增、凹向與極值

單元 H 三次函數的圖形

單元 I 極值的應用

單元 J 黎曼和與定積分

單元 K 定積分的應用

其中與本論文所設計的教案，內容相呼應的部分(但仍有部分觀念切入點不同)包含了單元 F 割線、導數及切線斜率、單元 G 函數的遞增、凹向與極值、單元 H 三次函數的圖形、單元 I 極值的應用。

將與本研究教案的內容相呼應的題目與說明列如表 2.1.1 所示：

表 2.1.1 與本研究教案相呼應(但切入點不同)的內容說明

	十一回試題範例的內容	本研究教案所設計的內容
單元 F 割線、導數及切線斜率	<ol style="list-style-type: none"> 1. 由函數上不同兩點的割線斜率，利用極限的概念去計算出切線斜率。 2. 給定未知方程式，能由已知在某點的切線斜率去推算未知方程式的部分係數及極限的寫法。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 主要重點並不放在割線斜率切入，而是利用泰勒多項式的觀念帶入切線斜率。(極限部分僅提及導數的極限式子列式方式) 2. 僅說明導數與極限寫法表式相同的意思。
單元 G 函數的遞增、凹向與極值	<ol style="list-style-type: none"> 1. 能由函數圖形去判斷何處為極值。 2. 明確說明「反曲點」的意義。 3. 未知係數函數，給凹向範圍及極值，能計算出未知的係數。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 由方程式去計算出極值發生的點。 2. 不提及「反曲點」，僅說明二次函數與三次函數的對稱點。 3. 能由已知的函數去計算出凹向性與極值。
單元 H 三次函數的圖形	<ol style="list-style-type: none"> 1. 三次函數的常數項為 k，能藉由實根與虛根的個數去判斷 k 的範圍。 2. 三次函數的一次項係數為 k，告知重根，需算出 k 值。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 給一三次函數，能由極值與對稱點畫出函數圖形。
單元 I 極值的應用	<ol style="list-style-type: none"> 1. 計算錐體與柱體的體積。 2. 計算拋物線與 x 軸的內接梯形的最大面積。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 僅計算柱體體積。 2. 計算經濟方面的問題與圍成面積的問題。

節錄「單元 H 三次函數的圖形」於【附錄三】中供參照。

第二節 香港、中國、日本的高中數學對於微積分課程的安排

此小節就香港、中國、日本三個鄰近台灣的亞洲區域對於高中數學課程的規劃，並且著重在探討微積分課程，每個地區分兩點作說明：1. 課程架構 2. 微積分部份的規劃。

(一) 香港

1. 課程架構

香港的數學課程(中四至中六)，建基於《數學教育學習領域課程指引(小一至中三)》所訂立的發展方向(香港特別行政區政府教育局網站(2015)，<http://www.edb.gov.hk/tc/index.html>)，目的是幫助學生鞏固在基礎教育中獲得的學習成果，拓闊和深化他們的學習經驗，進一步加強在數學學習上的正確價值觀和態度。

課程部分包括必修部份及延伸部分，延伸部分設有兩個單元進一步發展學生的數學知識，這兩單元分別為：

單元一(微積分與統計)：著重統計和數學的應用。本單元是為在學科或職業上需要對數學，尤其是對統計，有較廣闊和深入理解的學生而設。

單元二(代數與微積分)：重視深入的數學內容。本單元是為日後選修數學或從事與數學有密切關聯的專業的學生而設。

基礎課程是所有學生均應致力掌握的觀念和知識。延伸部分包括兩個不同導向的單元，對於在數學上有較佳表現的學生，或是較有興趣學習數學的學生，又或是需要更多數學知識和技能，為日後工作和進修作準備的學生來說，他們可從延伸部分中，選擇修讀其中一個單元。單元一(微積分與統計)著重數學的應用，而單元二(代數與微積分)則較重視數學概念和知識。

香港的數學課程架構圖如圖 2.2.1 所示：

數學課程架構圖

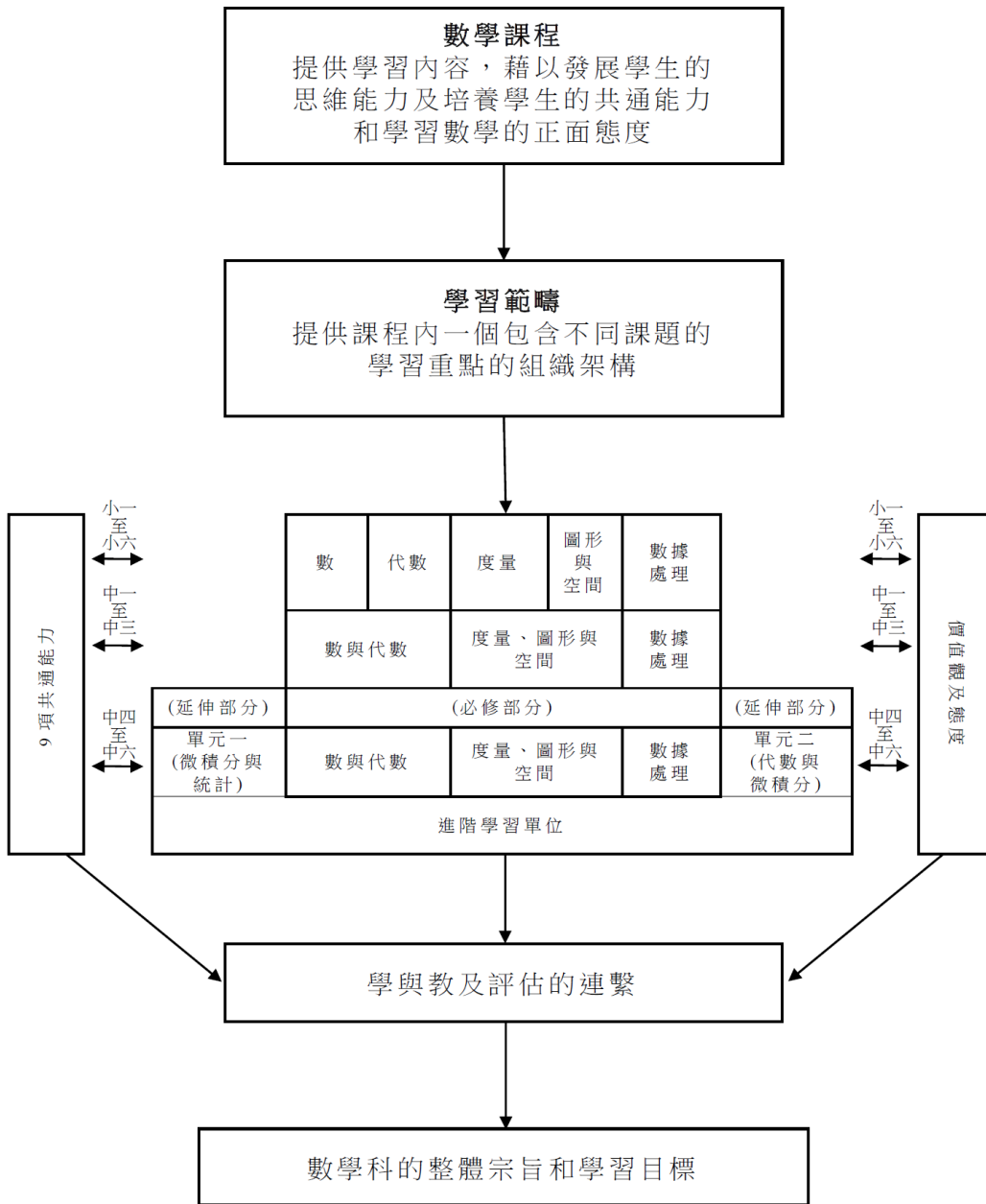


圖 2.2.1 香港數學課程架構圖

2. 微積分部份的規劃

香港的數學課程中延伸部分的單元一及單元二都包含微積分的教學；單元一（微積分與統計）分成三個領域，分別是「基礎知識」、「微積分」和「統計」。單元二（代數與微積分）亦分成三個領域，分別是「基礎知識」、「代數」和「微積分」。此外，在課程設計時加入了一個獨立於以上領域的學習單位，稱為「進階學習單位」，旨在增強學生探究、溝通、推理及建構數學概念的能力。

單元一（微積分與統計）及單元二（代數與微積分）的學習目標分別如表2.2.1及表2.2.2：

表 2.2.1 單元一（微積分與統計）的學習目標

基礎知識	微積分	統計
期望學生能：		
<ul style="list-style-type: none"> ● 應用二項展式學習 概率與統計； ● 以建模、繪畫圖像和 應用指數函數及對 數函數解決應用題； ● 理解指數函數和對 數函數的關係，並使 用它們解現實生活 中的應用題。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 認識極限作為微積 分學的基礎； ● 透過現實情境理解 微積分的概念； ● 求簡單函數的導 數、不定積分和定積 分。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 理解概率，隨機變 量，離散和連續概率 分佈的概念； ● 以二項、泊松、幾何 和正態分佈理解統 計推理的基礎概念； ● 運用統計方法觀察 和思考，並作出推 斷； ● 發展對不確定現象 的數學思維能力，並 應用相關知識和技 巧解決問題。

表 2.2.2 單元二(代數與微積分)的學習目標

基礎知識	代數	微積分
期望學生能：		
<ul style="list-style-type: none"> ● 將根式有理化； ● 理解數學歸納法原理； ● 以二項式定理展開二項式； ● 理解簡單三角函數及其圖像； ● 理解涉及複角的重要三角恒等式和公式； ● 理解數字e。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 理解矩陣和最高為三階方陣的逆矩陣的概念、運算和特性； ● 解線性方程組； ● 理解向量的概念、運算和特性； ● 應用向量的知識解二維和三維空間的問題。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 理解極限作為微積分學的基礎； ● 理解函數的導數、不定積分和定積分的概念和特性； ● 求簡單函數的導數、不定積分和定積分； ● 求函數的二階導數； ● 應用微積分的知識解決現實生活中的問題。

另外，單元一與單元二中跟微積分有關的學習重點部分相似，此只列出單元一與微積分相關的學習重點如表 2.2.3 所示：

表 2.2.3 單元一微積分相關學習重點

微積分領域			
求導法及其應用			
學習單位	學習重點	時間	注釋
3. 函數的導數	3.1 認識函數極限的直	5	不須引入「連續函數」和「不連續函數」

	<p>觀概念</p> <p>3.2 求代數函數、指數函數和對數函數的極限</p> <p>3.3 透過基本原理認識函數的導數的概念</p> <p>3.4 認識曲線 $y = f(x)$ 在點 $x = x_0$ 的切線斜率</p>		<p>的概念。</p> <p>須陳述但不須證明有關函數的和、差、積、商、純量乘法極限和複合函數極限的定理。</p> <p>須引入下列代數函數：</p> <ul style="list-style-type: none"> ●多項式函數 ●有理函數 ●冪函數 x^a ●由上述各函數的加、減、乘、除和複合而成的其他函數，例如：$\sqrt{x^2 + 1}$ <p>學生不須使用基本原理求函數的導數。</p> <p>須介紹包括 y'、$f'(x)$ 和 $\frac{dy}{dx}$ 的記法。</p> <p>須介紹包括 $f'(x_0)$ 和 $\frac{dy}{dx}\Big _{x=x_0}$ 的記法。</p>
<p>4. 導數的求導法</p>	<p>4.1 理解求導法的加法法則、積法則、商法則和鏈式法則</p> <p>4.2 求代數函數、指數函數和對數函數的導數</p>	<p>7</p>	<p>須引入以下法則：</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ • $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ • $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$ • $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ <p>須引入以下公式：</p>

			<ul style="list-style-type: none"> • $(C)' = 0$ • $(x^n)' = nx^{n-1}$ • $(e^x)' = e^x$ • $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ • $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ • $(a^x)' = a^x \ln a$ <p>不須引入引函數求導法。</p> <p>不須引入對數求導法。</p>
5. 二階導數	5.1 認識函數二階導數的概念 5.2 求顯函數的二階導數	2	<p>須介紹包括 y''、$f''(x)$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的記法。</p> <p>不須引入三階及更高階的導數。</p>
6. 求導法的應用	6.1 使用求導法解涉及切線、變率、極大值和極小值的應用問題	9	須引入全局和局部的極值。
	教學時數小計	23	
積分法及其應用			
7. 不定積分及其應用	7.1 認識不定積分法的概念 7.2 理解不定積分的基本性質及不定積分法的基本公式	10	<p>須介紹不定積分法為求導法的逆運算。</p> <p>須介紹 $\int f(x) dx$ 的記法。</p> <p>須引入以下性質：</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ • $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

	<p>7.3 使用不定積分法的基本公式求代數函數和指數函數的不定積分</p> <p>7.4 使用代換積分法求不定積分</p> <p>7.5 使用不定積分法解應用問題</p>		<p>須引入以下公式，並對積分常數C的意義加以解釋：</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\int k dx = kx + C$ • $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$，其中 $n \neq -1$ • $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ • $\int e^x dx = e^x + C$ <p>不須引入分部積分法。</p>
<p>8. 定積分及其應用</p>	<p>8.1 認識定積分法的概念</p> <p>8.2 認識微積分基本定理及理解定積分的性質</p> <p>8.3 求代數函數和指數函數的定積分</p> <p>8.4 使用代換積分法求定積分</p>	<p>12</p>	<p>須介紹將定積分表示為曲線下矩形條的面積和的極限的定義。</p> <p>須介紹 $\int_a^b f(x)dx$ 的記法。</p> <p>須引入假變量的知識，即：</p> $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ <p>所指的微積分基本定理為</p> $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ，其中 $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ <p>須引入以下性質：</p>

	<p>8.5 使用定積分法求平面圖形的面積</p> <p>8.6 使用定積分法解應用問題</p>		<ul style="list-style-type: none"> • $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ • $\int_a^a f(x) dx = 0$ • $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ • $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ • $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx$ $= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
9. 使用梯形法則計算定積分的近似值	9.1 理解梯形法則及使用它計算定積分的近似值	4	不須引入誤差估值。
	教學時數小計	26	

(二) 中國

1. 課程架構

根據姜志遠(2005)在《台灣與中國大陸之十二年數學課程比較》及中國大陸所頒布的「普通高中數學課程標準」(人民教育出版社網站 <http://www.pep.com.cn/>)，中國大陸高中數學課程的總目標是：使學生在九年義務教育數學課程的基礎上，進一步提高作為未來公民所必要的數學素養，以滿足個人發展與社會進步的需要。具體目標如下。

1. 獲得必要的數學基礎知識和基本技能，理解基本的數學概念、數學結論的本質，瞭解概念、結論等產生的背景、應用，體會其中所蘊涵的數學思想和方法，以及它們在後續學習中的作用。通過不同形式的自主學習、探究活動，體驗數學發現和創造的歷程。

2. 提高空間想像、抽象概括、推理論證、運算求解、資料處理等基本能力。

3. 提高數學地提出、分析和解決問題(包括簡單的實際問題)的能力，數學表達和交流的能力，發展獨立獲取數學知識的能力。

4. 發展數學應用意識和創新意識，力求對現實世界中蘊涵的一些數學模式進行思考和做出判斷。

5. 提高學習數學的興趣，樹立學好數學的信心，形成鍥而不捨的鑽研精神和科學態度。

6. 具有一定的數學視野，逐步認識數學的科學價值、應用價值和文化價值，形成批判性的思維習慣，崇尚數學的理性精神，體會數學的美學意義，從而進一步樹立辯證唯物主義和歷史唯物主義世界觀。

中國大陸高中數學課程分必修和選修。必修模組由5個模組組成；選修課程有4個系列，其中系列1、系列2由若干個模組組成，系列3、系列4由若干專題組成；每個模組2學分(36學時)，每個專題1學分(18學時)，每2個專題可組成1個模組。課程結構如圖2.2.2所示。

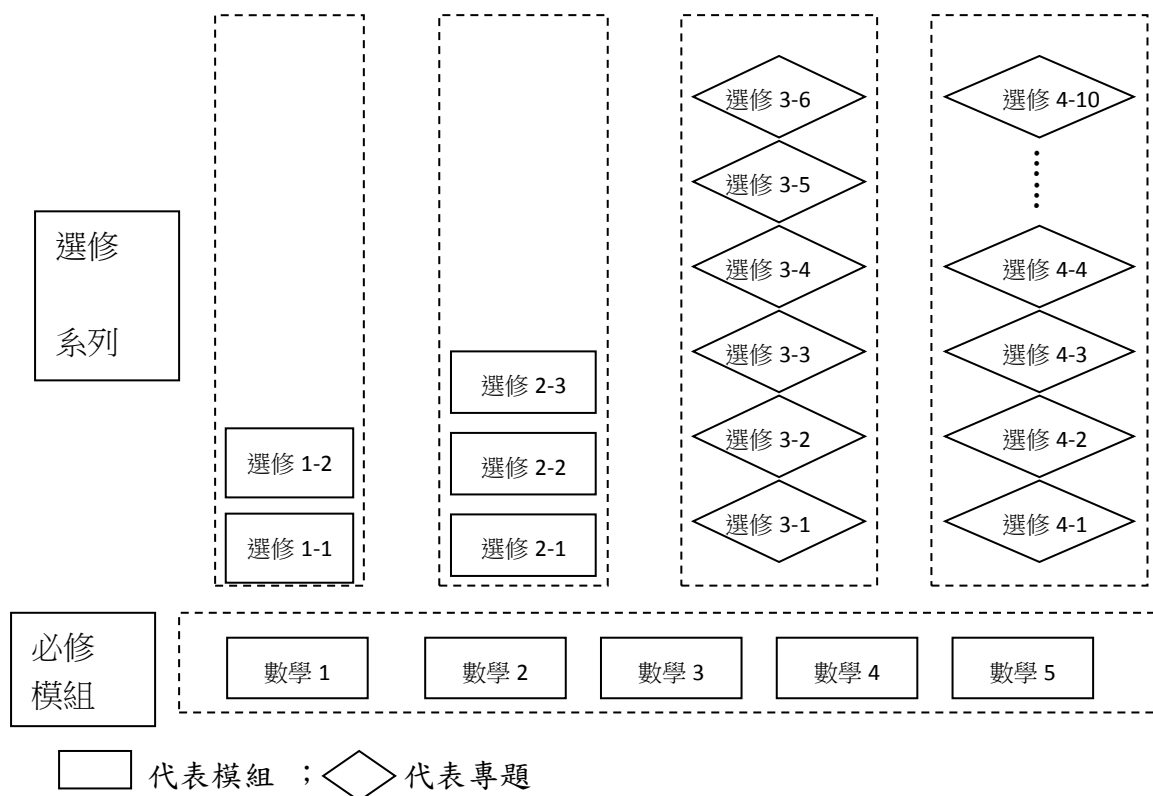


圖 2.2.2 中國大陸高中數學課程架構

● **必修課程**

必修課程是每個學生都必須學習的數學內容，包括五個模組。

數學 1：集合、函數概念與基本初等函數 I (指數函數、對數函數、冪函數)；

數學 2：立體幾何初步、平面解析幾何初步；

數學 3：演算法初步、統計、概率；

數學 4：基本初等函數 II (三角函數)、平面上的向量、三角恒等變換；

數學 5：解三角形、數列、不等式。

● **選修課程**

對於選修課程，學生可以根據自己的興趣和對未來發展的願望進行選擇。選修課程由系列1，系列2，系列3，系列4等組成。

◆ **系列 1：由兩個模組組成。**

選修 1-1：常用邏輯用語、圓錐曲線與方程、導數及其應用；

選修 1-2：統計案例、推理與證明、數系的擴充與複數的引入、框圖。

◆系列 2：由三個模組組成。

選修 2-1：常用邏輯用語、圓錐曲線與方程、空間中的向量與立體幾何；

選修 2-2：導數及其應用、推理與證明、數系的擴充與複數的引入；

選修 2-3：計數原理、統計案例、概率。

◆系列 3：由六個專題組成。

選修 3-1：數學史選講；

選修 3-2：資訊安全與密碼；

選修 3-3：球面上的幾何；

選修 3-4：對稱與群；

選修 3-5：歐拉公式與閉曲面分類；

選修 3-6：三等分角與數域擴充。

◆系列 4：由十個專題組成。

選修 4-1：幾何證明選講；

選修 4-2：矩陣與變換；

選修 4-3：數列與差分；

選修 4-4：坐標系與參數方程；

選修 4-5：不等式選講；

選修 4-6：初等數論初步；

選修 4-7：優選法與試驗設計初步；

選修 4-8：統籌法與圖論初步；

選修 4-9：風險與決策；

選修 4-10：開關電路與布林代數。

2. 微積分部份的規劃

在完成必修課程學習的基礎上，希望進一步學習數學的學生，可以根據自己

的興趣和需求，選擇學習系列 1，系列 2。

系列 1 是為希望在人文、社會科學等方面發展的學生而設置的，包括 2 個模組，共 4 學分。系列 2 則是為希望在理工、經濟等方面發展的學生設置的，包括 3 個模組，共 6 學分。

其中列出微積分相關的內容與要求：

系列 1

選修 1-1

微積分的創立是數學發展的里程碑，它的發展及廣泛應用，開創了向近代數學過渡的新時期，它為研究變數與函數提供了重要的方法和手段。導數的概念是微積分的核心概念之一，它有極其豐富的實際背景和廣泛的應用。在本模組中，學生將通過大量實例，經歷由平均變化率到暫態變化率的過程，刻畫現實問題，理解導數的含義，體會導數的思想及其內涵；應用導數探索函數的單調、極值等性質及其在實際中的應用，感受導數在解決數學問題和實際問題中的作用，體會微積分的產生對人類文化發展的價值。

導數及其應用（約 16 課時）

(1) 導數概念及其幾何意義

① 通過對大量實例的分析，經歷由平均變化率過渡到暫態變化率的過程，瞭解

導數概念的實際背景，知道暫態變化率就是導數，體會導數的思想及其內涵。

② 通過函數圖像直觀地理解導數的幾何意義。

(2) 導數的運算

① 能根據導數定義，求函數 $y=c$ 、 $y=x$ 、 $y=x^2$ 、 $y=\frac{1}{x}$ 的導數。

② 能利用給出的基本初等函數的導數公式和導數的四則運算法則求簡單函數的導數。

③ 會使用導數公式表。

(3) 導數在研究函數中的應用

- ① 結合實例，借助幾何直觀探索並瞭解函數的單調性與導數的關係。能利用導數研究函數的單調性，會求不超過三次的多項式函數的單調區間。

說明與建議：

本模組中，導數的概念是通過實際背景和具體應用的實例引入的。教學中，可以通過研究增長率、膨脹率、效率、密度、速度等反映導數應用的實例，引導學生經歷由平均變化率到暫態變化率的過程，知道暫態變化率就是導數。通過感受導數在研究函數和解決實際問題中的作用，體會導數的思想及其內涵。這樣處理的目的是說明學生直觀理解導數的背景、思想和作用。

在教學中，要防止將導數僅僅作為一些規則和步驟來學習，而忽視它的思想和價值。應使學生認識到，任何事物的變化率都可以用導數來描述。應當避免過量的形式化運算練習。

系列 2

選修 2-2

包含了與選修 1-1 相同的內容，這裡列出額外的內容：

(3) 導數在研究函數中的應用

- ① 結合實例，借助幾何直觀探索並瞭解函數的單調性與導數的關係；能利用導數研究函數的單調性，會求不超過三次的多項式函數的單調區間。
- ② 結合函數的圖像，瞭解函數在某點取得極值的必要條件和充分條件；會用導數求不超過三次的多項式函數的極大值、極小值，以及閉區間上不超過三次的多項式函數最大值、最小值；體會導數方法在研究函數性質中的一般性和有效性。

(4) 生活中的優化問題舉例。

例如，使利潤最大、用料最省、效率最高等優化問題，體會導數在解決實際

問題中的作用。

(5) 定積分與微積分基本定理

- ① 通過實例（如求曲邊梯形的面積、變力做功等），從問題情境中瞭解定積分的實際背景；借助幾何直觀體會定積分的基本思想，初步瞭解定積分的概念。
- ② 通過實例（如變速運動物體在某段時間內的速度與路程的關係），直觀瞭解微積分基本定理的含義。

(6) 數學文化

收集有關微積分創立的時代背景和有關人物的資料，並進行交流；體會微積分的建立在人類文化發展中的意義和價值。

(三) 日本

1. 課程架構

根據洪雅齡(2005)在《台灣與日本之十二年數學課程比較日本數學》之論文中所提及的日本高中數學學習指導要領與參考日本文部科學省網站，日本的高中數學目標在加深對數學基本概念、原理及法則的理解，提高數學事物的考察及處理能力，透過數學活動培養基礎創造性的同時，能透過數學原理的見解及想法的好處，養成積極活用以上各點的態度。

針對高中數學課程來看，共分做數學基礎、I、II、III、A、B、C等七門課。底下列出各門課的目標

數學基礎

理解數學與人之間的關係及數學對社會生活的功用，並能透過數學性的見解及想法，養成活用數學的態度。

數學 I

理解方程式及不等式、二次函數、圖形及記量的意義，並能適當地應用。

數學 II

理解公式與證明、高次方程式、圖形及方程式、各種函數及微分與積分的基本觀念進而熟習技能，並能適當地活用。

數學 III

加深理解極限、微分法及積分法的觀念，進而熟練技能，並能適當地活用。

數學 A

瞭解平面圖形、集合與其理論及場合的數字與機率的基本觀念及技能的熟練並能認識數學性的見解及想法的好處。

數學 B

理解數列、向量、統計或是數值計算的基本知識並熟習技能，並能適當地應用。

數學 C

理解矩陣及其應用、式與曲線、機率分佈及統計處理的基本知識並熟習能，並能適當地應用。

日本高中的數學領域分為必修及選修，其中必修科目為數學基礎與數學 I，其他均為選修科目。底下列出學生選修的相關規定（文部科學省）：

- 1、若想選修「數學 II」及「數學 III」，原則上必須按「數學 I」、「數學 II」、「數學 III」的順序來修課。
- 2、若想選修「數學 A」，則可同時與「數學基礎」或「數學 I」修習，也可修完「數學基礎」或「數學 I」後再選修。
- 3、若想選修「數學 B」，則必須修完「數學 I」後才可以選修。
- 4、若想選修「數學 C」，則必須修完「數學 I」及「數學 A」後才可以選修。

日本的全國必修數學課程到 10 年級（也就是高一的數學 I）為止。其他的數學高中課程都是選修。就課程資料來看，日本提供了非常多樣而豐富的課程供高中生選修，例如數學課程就有五門一學年的選修課程。

2. 微積分部份的規劃

日本的高中數學跟微積分部分有關的部分是在數學 II 與數學 III，而數學 II 屬於屬於高二的課程，數學 III 屬於高三的課程。

數學 II 中和微積分相關的觀念如下：

(1) 微分的觀念

a、微分係數與導函數

b、導函數的應用

c、切線與函數值的遞減

(2) 積分的觀念

a、不定積分與定積分

b、面積

[用語、記號]

極限值、 \lim

附註：

針對(1)中，僅限於講三次以內的函數。針對(2)則限二次以內的函數。(1)的 a 所講述的極限，僅限於讓學生能直覺理解的程度。

數學 III 中，和微積分相關的觀念如下：

1、極限

以微分法和積分法為基礎瞭解極限的概念，考察其數列及函數值的極限並使其活用。

(1) 數列的極限

a、數列 $\{r^n\}$ 的極限

b、無限等比級數的和

(2) 函數及其極限

a、合成函數與反函數

b、函數值的極限

[用語、記號]

收斂、發散、 ∞

2、微分法

瞭解各種函數的微分法，考察其運用函數值的遞減及圖表的凹凸，認識微分法實用性的同時，考察具體事物使其活用。

(1) 導函數

- a、函數的和、差、積、商的導函數
- b、合成函數的導函數
- c、三角函數・指數函數・對數函數的導函數

(2) 導函數的應用

切線、函數值的遞減、速度、加速度

[用語、記號]

自然對數，e，二次導函數，反曲點

3、積分法

瞭解各種函數的積分法，認識其實用性的同時，使其活用圖形的求積等。

(1) 不定積分與定積分

- a、積分與其基本性質
- b、簡單的置換積分法及部分積分法
- c、各種函數的積分

(2) 積分的應用

面積、體積

附註：

1、關於內容 1 的(2)，處理像 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ， $y = \sqrt{ax+b}$ 程度的簡單分數函數

及無理函數。針對 2 的(2)，在導函數的計算部份僅限定於必要的程度。

2、關於內容 2，提及平均值定理時，僅限於直覺地使其理解的程度。

3、關於內容 2 的(1)的 a 的分數函數的導函數，分母及分子僅限於二次程度

針對 b 的部份， $y = x^k$ (k 是有理數)，處理像 $y = \sqrt{ax+b}$ 及 $y = \sqrt{ax^2+b}$ 程度的簡單函數。

4、關於內容 3 的(1)的 b，置換積分法僅限於跟 $ax+b=t$ 、 $x = a \sin \theta$ 置換的程度，部分積分法限定於簡單函數在一次適用所得到的結果。

(四)結語

前面列出了香港、中國、日本的高中數學微積分部分課程規劃，由以下兩點分別進行說明：

(1) 香港的單元一包含了微積分的粗淺介紹，使得商管類學生有機會在高中就先接觸微積分，而台灣卻是大部分商管類學生大學才正式接觸微積分；香港、中國、日本的高中數學微積分內容都較台灣多，它們進階的微積分課程均有教到指對數、三角函數的微積分，更甚至日本在數學 II、數學 III(相當於高二課程)就有教到微積分。

(2) 這三個地區與現階段台灣的高中微積分都是以極限的概念切入，而本研究設計的課程則是由多項式的觀點為主，藉由泰勒形式導入多項式的微分，對高一學生實施教學，以切線斜率直觀的角度為高二、高三將學到的微積分先行準備。

第三章 研究方法與實施步驟

本研究主要目的在探討指導教授和研究者所設計的「高一學生學習多項式的微分教案」，對於剛學完多項式函數的高一學生，在進行實驗教學後所做的測驗，對於不同程度的學生有哪些差異處。本章針對本研究之研究設計、研究對象、研究工具、資料分析等部分，詳細說明如下。

第一節 研究設計與流程

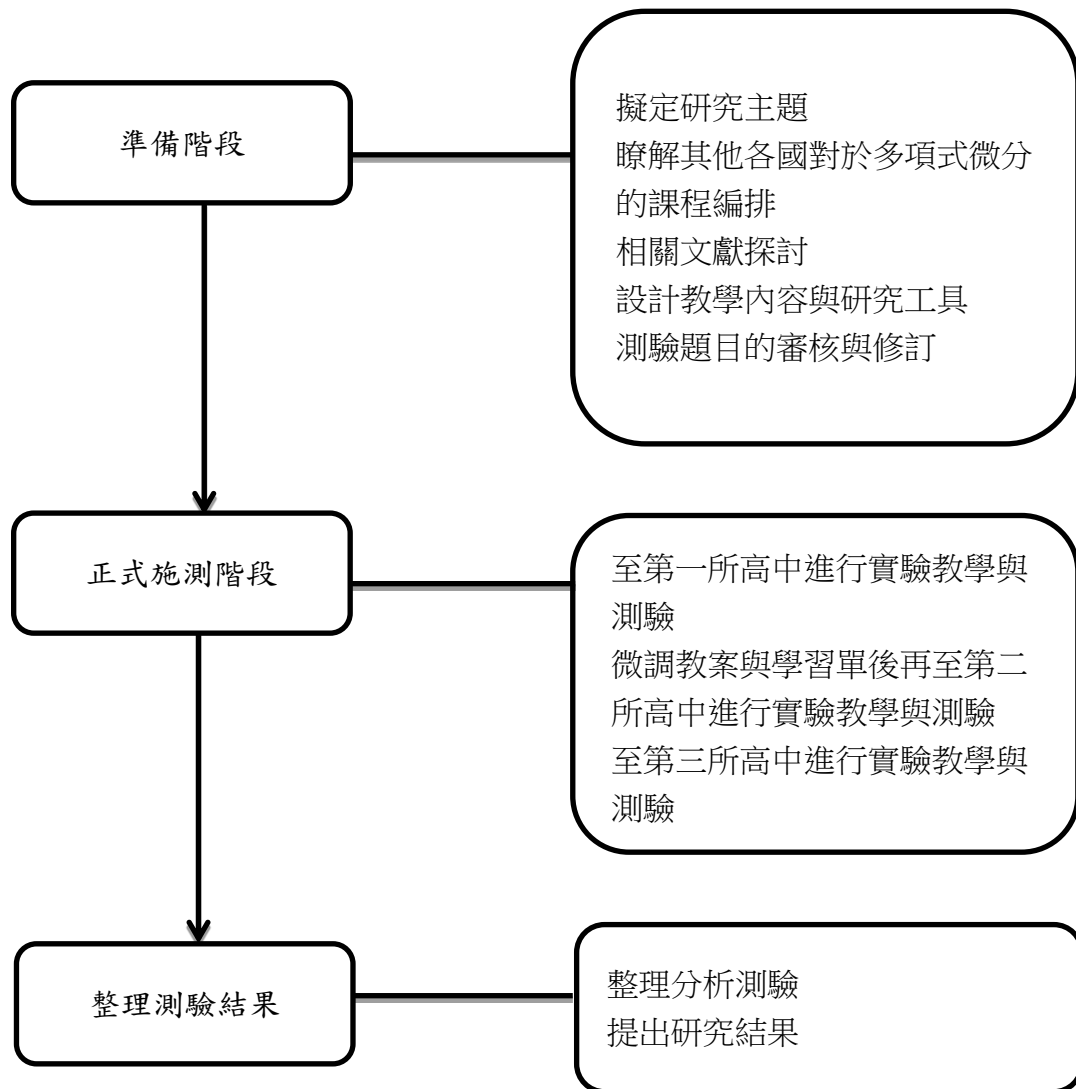


圖 3.1.1 研究架構圖

第一階段準備階段

(一) 擬定研究主題

研究者與指導教授經過討論後，確定了研究主題，並開始著手收集相關資料及文獻。

(二) 相關文獻探討與資料收集

指導教授特請友人從日本帶回日本高二所學習的數學課本，提供研究者做參考，並於中國、香港與日本的教育部網站蒐集相關資料。

(三) 設計教學內容與研究工具

本研究的教學內容為研究者與指導教授共同設計的多項式微分教案，並跟具教案設計出研究工具為自編的『學習單 I~學習單 IV、作業一~作業四、多項式的微分測驗』。

(四) 測驗題目的審核與修訂

根據學習單 I~學習單 IV 及作業一~作業四，設計出『多項式的微分』測驗，並依據指導教授在麗山高中的試測教學，修改測驗題目，使題目敘述的變化性提高。

第二階段正式施測階段

(一) 選定研究對象

本研究正式施測選定桃園市的三所高級中學高一的學生為研究對象，其中一個班級為普通班(即未分班的一般班級，高一並未分自然組及社會組)，另一個高一的班級為社會組的學生，還有一個高一的班級為數理資優班的學生。

(二) 正式實施實驗教學與測驗

本研究的教學時間為四堂課，共 200 分鐘，並再多一堂課 50 分鐘的測驗時間。在第一所學校進行完教學與測驗後，微調教案與學習單，使得教學時能更加流暢；之後於第二所學校進行實驗教學，確認該教案與學習單及作業的內容洽當後，又再至第三所學校進行實驗教學。

第二節 研究對象

本研究正式施測選定桃園市的三所高級中學一年級的學生為研究對象，並以班級為單位，於高一下學期實施實驗教學與測驗，因高一上學期已學習完『多項式函數』的單元，對於一次、二次多項式函數及其圖形已有概念，並瞭解多項式的除法原理、餘式定理、因式定理的應用。三所高中依據施測時間，有先至後分別簡稱為甲高中、乙高中、丙高中。這三所高中當屆入學之 PR 值大致上分別為：甲高中 PR 值約 75、乙高中 PR 值約 95、丙高中 PR 值約 85，其中甲高中的學生為一般並未分組的高一學生，乙高中的學生為已分組的自然組學生(數理資優班)，丙高中的學生為已分組的社會組學生；選此三種不同種類班級的原因是，欲探討不同環境與程度下，此研究在測驗結果下會有哪些問題。研究對象之分析表如下述：

表 3.2.1 本研究之研究對象分析表

	甲高中	乙高中	丙高中
平均 PR 值	75	95	85
特色	未分組	自然組(數理資優班)	社會組

第三節 研究工具

本研究的研究工具是指導教授和研究者共同設計製作的高一多項式微分教學方法。為探討高一學生是否能接受此教學方法，我們設計多項式函數微分的實驗教學活動、多項式函數微分的測驗，進行試教與評量，並依據一份教學目標來查核教學的內容，其內容分述如下。

(1) 實驗教學施行者

因顧慮到各校各班的學習環境不同，將會造成學生學習表現上的落差，所以此三個不同的實驗教學活動，都是由指導教授單維彰教授來進行實驗教學；研究者本身在旁觀察及協助處理上課狀況，並批改及整理作業及測驗所遇到的問題。

(2) 高一學生學習多項式微分的實驗教學活動

指導教授和研究者設計了一份完整的「多項式的微分」教案，本節稍述教案內容，完整課程教案參見【附錄一】。

本教案共有四堂課，每堂課的主要教學目標及教學內容如下。

第一堂實驗教學

本節課的主要教學目標為能將多項式函數整理成泰勒形式，且根據泰勒形式能算出在特定點的切線斜率與切線方程式，並能以數學語言做出關於切線的溝通。為了符合這些教學目標，教師利用電腦輔助畫圖，解釋多項式函數局部圖行像是一條直線的理由，並且示範整理成泰勒形式的方法，然後說明如何由泰勒形式觀察出在特定點的切線斜率；並在課堂上以不同的數學語言來敘述切線，包含： $f'(a)$ 就代表函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 時的切線斜率、 $f(x)$ 在 $x=a$ 時的切線方程式就是 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ 。

第二堂實驗教學

本節課的主要教學目標為學生能瞭解多項式微分的基本公式，並瞭解多項式微分的線性性質，且能用該性質求得任意多項式函數的導函數，並能從求出的導函數算出各點的導數；最後能以導數、導函數、來做數學的溝通。為了符合這些教學目標，教學時教師先推導出二次、三次的單項多項式在特定點的導數，並由該單項式推論出線性組合時在特定點的導數，最後推導出多項式函數的微分公式，並解釋導數、導函數的名詞由來；並於課堂上反覆提及在某點的導數就是該點的切線斜率，以和第一堂實驗教學做聯結，期望學生能以不同的數學語言做溝通。

第三堂實驗教學

本節課的主要教學目標為能大致上畫出三次函數的函數圖形，瞭解遞增區間、遞減區間、極大值、極小值、對稱點等重要概念，並且能判斷出是否有發生極值；教學時先推導「配三方」的效果是消除二次項，在 $k = -a_2 / (3a_3)$ 做泰勒型式，說明一般的三次函數 $f(x)$ 必為奇函數 $g(x) = px^3 + qx$ 之平移，故其圖形必對稱於 $(k, f(k))$ ，藉此導出對稱點的概念；接著說明 $f'(x)$ 決定 $f(x)$ 的遞增、遞減區間，並指出由遞增變化為遞減的那點就是極大值，由遞減變化為遞增的那點就是極小值，但也有可能無極值；最後將圖形畫於黑板上，並標出遞增、遞減區間、極值、對稱點。

第四堂實驗教學

本節課的主要教學目標為能利用微分的方法，來處理真實情境中的極值問題；教學時提醒處理應用問題時該注意的要點，並且再次複習這四堂課所教的微分觀念。

將四堂課的主要教學目標與教學內容整理如表 3.3.1 所示。

表 3.3.1 教學目標與教學內容比照表

	教學目標	教學內容
第一堂課	<ol style="list-style-type: none"> 1. 能將多項式函數整理成泰勒形式。 2. 根據泰勒形式，能算出在特定點的切線斜率與切線方程式。 3. 能以數學語言做出關於切線的溝通。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師示範整理成泰勒形式的方法。 2. 說明如何由泰勒形式觀察出在特定點的切線斜率。 3. 在課堂上以不同的數學語言來敘述切線。
第二堂課	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能瞭解多項式微分的基本公式，並瞭解多項式微分的線性性質。 2. 能求得任意多項式函數的導函數。 3. 能從求出的導函數算出各點的導數。 4. 能以導數、導函數、來做數學的溝通。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師先推導出二次、三次的單項多項式在特定點的導數。 2. 由單項多項式推論出線性組合時在特定點的導數。 3. 推導出多項式函數的微分公式。 4. 解釋導數、導函數的名詞由來，並於課堂上反覆提及在某點的導數就是該點的切線斜率。
第三堂課	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能瞭解並自行推導出對稱點。 2. 學生能瞭解遞增區間、遞減區間、極大值、極小值、對稱點等重要概念。 3. 能大致上畫出三次函數的函數圖形，並且能判斷出是否有發生極值。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 先推導「配三方」，並說明此效果為消除二次項，並推出對稱點的公式。 2. 說明 $f'(x)$ 決定 $f(x)$ 的遞增、遞減區間，並指出由遞增變化為遞減的那點就是極大值，由遞減變化為遞增的那點就是極小值。 3. 將圖形畫於黑板上，並標出遞增、遞減區間、極值、對稱點。
第四堂課	<ol style="list-style-type: none"> 1. 能利用微分的方法處理應用問題。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 將應用問題寫成方程式在黑板上，並說明應注意事項，最後利用微分來解決問題。

(3) 學習單及作業

本研究所設計的學習單的主要目的為為了符合上述的教學目標，並能使學生在學習時能更瞭解重點所在；作業的主要目的為能讓學生自行練習該堂課所講述的重點，並讓研究者能從作業中觀察出學生的學習狀況。而作業及學習單內容詳見【附錄二】。在此僅說明學習單及作業的編製方式。

(一) 學習單的編製方式

學習單的編製方式為循序漸進式，學生須按部就班將學習單前面優先列出的重點及觀念完成，才能藉此處理後半部的學習單，且學習單上會出現代表同樣觀念但卻用不同的數學名詞來表示。如下圖所示：

<p>隨堂練習</p> <p>(1) 做 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 在 $x = 2$ 的泰勒形式</p> $f(x) = f(2) + a_1(x-2) + (x-2)^2$
<p>例題</p> <p>(1) 令 $f(x) = x^2 - 3x + 1$，求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的切線方程式，及 $f'(2)$</p>

圖 3.3.1 學習單 I 的隨堂練習(1)及例題(1)，需先瞭解泰勒形式，才能藉此完成例題(1)。

	$(f(x) - f(1)) \div (x - 1)$ 的商	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	$f'(1)$
$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6x - 6$			

圖 3.3.2 學習單 II，需先求出商，才能求出極限值；並用不同的標記法，讓學生瞭解都代表同一件事情。

(1) $f(x) = x^2 + x + 1$	(2) $f(x) = 2x - x^2$
$y = f(x)$ 的函數圖形	
(1)	(2)
寫出導函數 $f'(x)$	
(1)	(2)
導函數 $f'(x)$ 的 $+$ 、 $-$ 、 0	
(1)	(2)

圖 3.3.3 學習單 III，按部就班讓學生慢慢完成二次的函數圖形所對應的導數正負值及極值。

(二) 作業的編製方式

作業的編製方式為修改學習單上的題目，盡量達到各種不同情況的題型都能讓學生自行練習。如下圖所示：

	$f(x) = x^2 - 3x + 2$	$f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 2$	$f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 3$
$f(x) \div (x-1)$ 的商式和餘數			
在 $x = 1$ 的 切線方程式			
在 $x = 1$ 的 切線斜率 $f'(1)$			

圖 3.3.4 作業一，不同係數的方程式及不同敘述的問法。

	$(f(x) - f(1)) \div (x - 1)$ 的商	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	$f'(1)$
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 6$			
$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2$			
	$(f(x) - f(2)) \div (x - 2)$ 的商	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$	$f'(2)$
$f(x) = -2x^3 + x + 9$			
$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x$			

圖 3.3.5 作業二，各種不同題型及同樣事情不同問法。

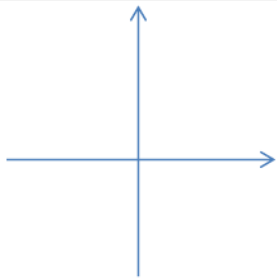
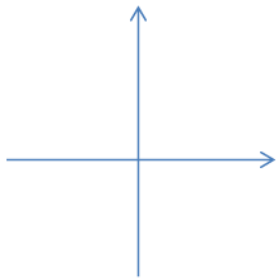
$f(x)$ 與 $f'(x)$	極大值和極小值發生的點 (若沒有就寫「無」)	函數圖形
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$	對稱點： 遞增： 遞減： 極大值： 極小值：	
$f'(x) =$		
$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$	對稱點： 遞增： 遞減： 極大值： 極小值：	
$f'(x) =$		

圖 3.3.6 作業三，相較於學習單，有更多的練習及不同的情況。

1. 在河邊用長 1200 公尺的繩子圍出一塊長方型區域，這塊長方型區域面積最大會是多少平方公尺？此時長和寬分別是多少公尺？

4. 所謂「諾曼窗」是由下方一個長方形連接上方一個半圓形組成的窗戶造型，其中半圓的直徑與長方形的寬度相等。若限定此窗的（外圍）周長為 6 公尺，請問長方形部分的寬和高各為幾公尺，能使窗戶的面積達到最大？

圖 3.3.7 作業四的第 1 題及第 4 題，第一題列出的是二次方程式，作業四則是三次方程式。

(4) 「多項式的微分」測驗

本研究之「多項式的微分」測驗的主要目的，是用來觀察學生在實驗教學後，對於多項式的微分，是否具有一定的瞭解。測驗內容詳見【附錄二】，在此僅說明測驗的編製方式。

(一) 「多項式的微分」測驗的編製方式

本測驗题目的編製主要以多項式微分的基本概念為主，根據教案中所設計的教學目標及教學內容為基準，並從學習單及作業中修改數字，實驗教學中所提及的各種關於微分的語言都盡量以不同方式出出來，第一面共有三題，測驗的目的就是各種不同微分的敘述及計算；第二面共有三題，三次多項式的函數圖形在第

二面也分別以兩種不同的類型測驗學生，一種為有極值與遞增、遞減區間，另一種為無極值，且只有遞增區間，並無遞減區間，最後一題為自行假設未知數，並列出方程式的應用問題。各種題目的比較如圖 3.3.8 及圖 3.3.9 所示。

<p>1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$</p> <p>(a) 求出導函數 $f'(x)$ (5 分)</p> <p>(b) 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的切線斜率 (5 分)</p> <p>(c) 求 $f'(2)$ (5 分)</p> <p>[解]</p>
<p>2. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 1$</p> <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$ (5 分)</p> <p>(b) 將 $f(x)$ 微分 (5 分)</p> <p>(c) 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的切線方程式和切線斜率 (3 分、2 分)</p> <p>(d) 求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的導數 (5 分)</p>

圖 3.3.8 測驗第 1 題與第 2 題，分別以不同的方式問關於微分的問題

<p>4. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$</p> <p>(a) 求對稱點 (5 分)</p> <p>(b) 若有極大值和極小值，則寫出發生極值的點；若沒有極值，則寫無 (3 分、3 分)</p> <p>(c) 寫出遞增和遞減的範圍；若無，則寫無 (3 分、3 分)</p> <p>(d) 大約畫出 $f(x)$ 的函數圖形（須標出對稱點，若有極值也須標出） (3 分)</p>
<p>5. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$</p> <p>(a) 求對稱點 (5 分)</p> <p>(b) 若有極大值和極小值，則寫出發生極值的點；若沒有極值，則寫無 (3 分、3 分)</p> <p>(c) 寫出遞增和遞減的範圍；若無，則寫無 (3 分、3 分)</p> <p>(d) 大約畫出 $f(x)$ 的函數圖形（須標出對稱點，若有極值也須標出） (3 分)</p>

圖 3.3.9 測驗第 4 題及第 5 題，第 4 題為有極值、遞增、遞減區間；第 5 題則為只有遞增區間，無極值與遞減區間

第四章 研究結果與討論

本研究的目的是在於探討此多項式的微分教案對於不同程度高中生的學習狀況為何；本章分別從上課狀況、作業狀況、測驗結果、綜合分析來進行討論。

第一節 上課狀況

甲高中為 PR 值平均約 75 的一般高一學生，該校的學生前兩節上課狀況普遍良好，特別是坐在靠近講台的學生反應最為熱烈；但在第三堂及第四堂課時，因第三堂課的內容較為複雜，第四堂課的計算量較為龐大，大約有 1/3 的學生在這兩堂課出現恍神及打瞌睡的情形。

乙高中為 PR 值平均 95 的高一學生，且該班是數理資優班，該班學生對於前兩節課的內容普遍覺得過於簡單，約半數以上的學生都能在聽過前半段的講解後，自行完成後半段的例題；而在第三、四堂課時，這些內容對於以高中的學生而言，是充滿挑戰的，因此大部分的學生都非常專注的在課程上，少數幾位學生自行閱讀學習單上的說明並自行完成例題。

丙高中為 PR 值平均 85 的高一社會組班級，根據該班導師所述，該班有幾位學生對於數學已經呈現「放棄」的狀態；在進行前兩堂實驗教學時，座位在後半部及兩側有少數學生就已經未在專心聽課，更甚至第三堂課及第四堂課時，有約 1/2 的學生未在專心聽課，有些學生在背自己的英文單字、打瞌睡、甚至還有學生在看小說；對於這種情形，指導教授和研究者臨時決定將第三堂課及第四堂課的內容，再增加一堂課來講述，此部分於之後綜合分析再多加說明。

將甲、乙、丙三個班級的上課情形整理成表 4.1.1。

表 4.1.1 甲、乙、丙三班的上課情況比較表

	平均 PR 值及特色	上課情況	附註
甲高中	75(未分組)	前兩堂課認真，後兩堂課 1/3 學生分心	
乙高中	95(數理資優班)	大部份都很認真，後兩堂特別認真	
丙高中	85(社會組)	前兩堂課尚可，後兩堂課 1/2 學生分心	多上一堂第五堂課

第二節 作業狀況

甲高中學生的作業一、二、三的完成狀況大致良好，但於作業一的切線方程式問題，有數位學生表示方式錯誤，如圖 4.2.1 所示；且能明顯發現有些學生的作業是以抄襲的方式，無法真正自行練習上課的內容；作業四的內容為應用問題，學生的完程度最低，少部分學生整份作業皆未練習，部分學生只完成了第 1 題與第 2 題，第 3 題及第 4 題的情境與學生生活範圍相差較遠，且數字及計算量較複雜，因此僅有少數學生嘗試去做練習，但並無完全答對的學生。

在 $x=1$ 的切線方程式	$y = -(x-1)$	$y = 5(x-1) - 2$	$y = -(x-1) + 1$
在 $x=1$ 的切線方程式	$y = -x + 1$ $f(x) = -x + 1$	$f(x) = 5(x-1) + 2$	$f(x) = -(x-1) + 1$

圖 4.2.1 兩位不同的學生對於同一題作業，切線方程式的表示方式錯誤，圈起來的部分為研究者批改時幫他們改正的

乙高中學生上課的進度較快，部分學生在上課時完成學習單後又自行完成作業，且由於該校在實驗教學完的下一堂課為自習課，因此學生都能將作業完成；甚至在實驗教學第四堂課時，講解完學習單後，教學者還有時間講解作業四第4題的列式方式，因此大部分學生都能完成作業四的4道題目，但只有約半數學生能將算式完全寫對。

丙高中的情況與甲高中類似，也有數位學生將作業一的切線方程式表示錯誤，而作業四也是沒有人完全完成第3題及第4題。

作業的實施方式皆為該堂課結束前發下去，要求學生回家完成後於下一堂課上課前交(乙高中於課後有時間完成)，研究者批改後歸納出全班普遍的錯誤，與教學者討論後於第四堂實驗課程結束後的複習時間發還給學生(丙高中為第五堂後)，並稍加講解共通的錯誤；但因作業四的回收時間即為測驗前，因此作業四並無時間幫學生檢討。

將甲、乙、丙三個班級的上課情形整理成表 4.2.1。

表 4.2.1 甲、乙、丙三班的作業狀況比較表

	平均 PR 值及特色	作業狀況	附註
甲高中	75(未分組)	作業一、二、三部分學生用心完成，少數抄襲；作業四少數學生練習	切線方程式表示方式錯誤
乙高中	95(數理資優班)	都自行用心完成，作業四多數學生嘗試去完成	課程結束後學生有時間在校練習
丙高中	85(社會組)	作業一、二、三部分學生用心完成，少數抄襲；作業四少數學生練習	多上一堂第五堂課

第三節 測驗結果與討論

三所高中皆考一樣的測驗，本節先探討評分標準，再對各校的測驗進行分析，並討論結果。

(一) 評分標準

研究者在甲高中進行完實驗教學及測驗後，共計回收 50 份測驗，本測驗有標準答案，但出題方式為計算題、問答題題型，目的就在於希望能從學生的答題過程給予分段給分，先瀏覽一遍，分類出學生普遍容易發生的錯誤，和指導教授共同討論出給分標準；爾後乙高中與丙高中測驗完，皆以一樣的給分標準進行評分。以下分別說明討論出的評分標準：

2. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 1$	
(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$	(5 分)
(b) 將 $f(x)$ 微分	(5 分)
(c) 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的切線方程式和切線斜率	(3 分、2 分)
(d) 求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的導數	(5 分)

圖 4.3.1 測驗第 2 題(c)小題

(c)小題切線斜率答案是 0，此多數學生有答出，但切線方程式，正確答案應為 $y = -1$ ，但有不少學生將答案寫成 $f(x) = -1$ ，此為函數的概念，並非切線方程式，因此討論結果為酌量扣一分，如圖 4.3.2 所示；也有學生直接將答案寫成：切線方程式 = -1 或是(c)小題整題只寫 -1，這類情況都不給分。如圖 4.3.3 與圖 4.3.4 所示。

(c)
$$\begin{array}{r|l} -4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ \hline -4 & 2 & 0 & -1 & \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ \hline -4 & 2 & 0 & -1 & \end{array}$$

$f(x) = -1 + 0(x-0)$

圖 4.3.2 切線方程式寫成 $f(x) = -1$

(c) 切線方程式 = -1, $f'(0) = 0$

圖 4.3.3 切線方程式寫成：切線方程式=-1 的情況

(c)
$$\begin{array}{r|l} -4 & -6 & -8 & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ \hline -4 & -6 & -8 & 0 & \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ \hline -4 & -6 & -8 & 0 & \end{array}$$

$f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 3x$

(d) 方程式 = -1

A: 切線斜率 = 0

圖 4.3.4 切線方程式只寫-1 的情況

4. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$
- (a) 求對稱點 (5分)
- (b) 若有極大值和極小值，則寫出發生極值的點；若沒有極值，則寫無 (3分、3分)
- (c) 寫出遞增和遞減的範圍；若無，則寫無 (3分、3分)
- (d) 大約畫出 $f(x)$ 的函數圖形（須標出對稱點，若有極值也須標出） (3分)

圖 4.3.5 測驗第 4 題

(b)小題，極大值發生的點在(2,6)，極小值發生的點在(0,2)，多數學生只寫極大值：6，極小值：2，因題目的設計是要求寫出極值的點，因此上述答案皆扣1分，若只寫出 $x=0,2$ ，則分別扣兩分。(d)小題若未標出對稱點或極大、極小值則分別扣一分，若函數圖形的圖形樣貌對，但極大值、極小值位置錯誤，則得兩分，連對稱點也錯或未標出，則得一分。如圖 4.3.6 與圖 4.3.7 所示。

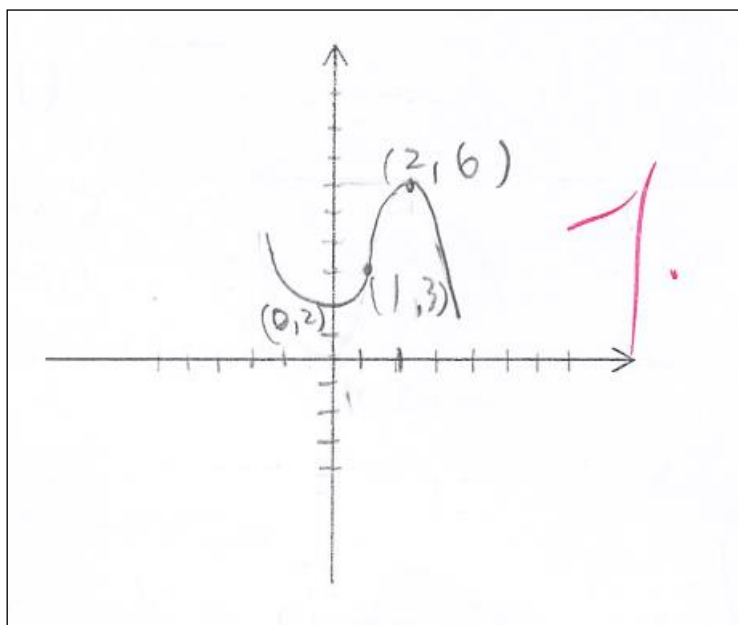


圖 4.3.6 圖形樣貌對，但對稱點位置標錯

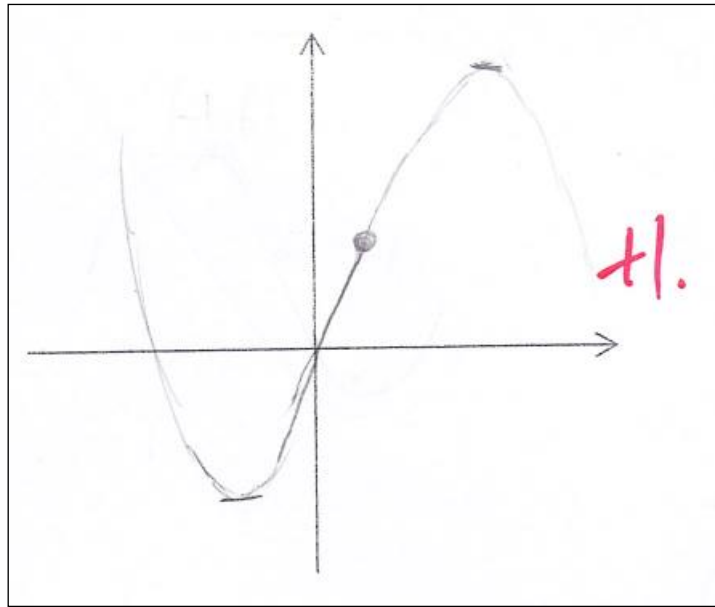


圖 4.3.7 圖形樣貌對，但對稱點及極大值與極小值位置錯且均未標示

5. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$
- (a) 求對稱點 (5 分)
- (b) 若有極大值和極小值，則寫出發生極值的點；若沒有極值，則寫無 (3 分、3 分)
- (c) 寫出遞增和遞減的範圍；若無，則寫無 (3 分、3 分)
- (d) 大約畫出 $f(x)$ 的函數圖形 (須標出對稱點，若有極值也須標出) (3 分)

圖 4.3.8 測驗第 5 題

此題為無極值的題目，也無遞減範圍，但遞增範圍為 $x \in \mathbb{R}$ ；學生在(d)小題若對稱點標錯或未標則扣一分，部分學生將圖形「扭錯」則扣一分，「扭錯」的例子如圖 4.3.9 所示，若圖形錯兩個部份以上則該小題得零分。若皆未寫計算過程，只寫答案，就算答案對也是得零分；有少部分學生第 4 題與第 5 題的(b)、(c)都直接寫無，但第 5 題的確是無極值也無遞減範圍，此情況視為只寫答案，未寫過程，因此也是算得零分，如圖 4.3.10 所示。

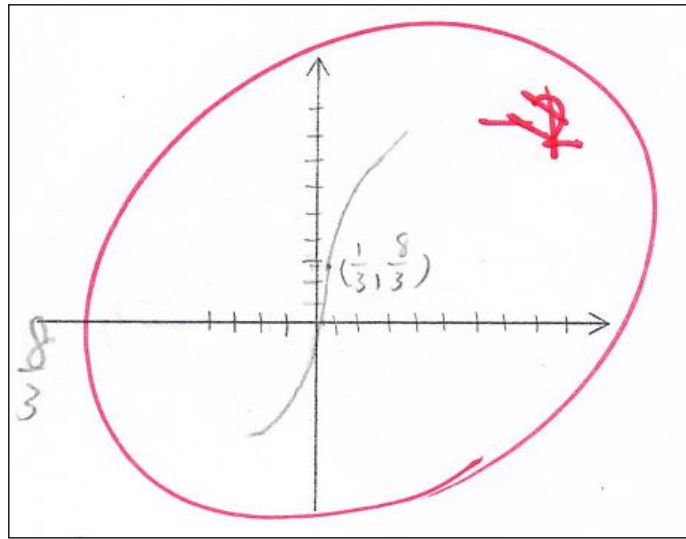


圖 4.3.9 三次函數圖形「扭錯」，且對稱點位置錯誤，錯兩個部份，故該題得零分

4. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ (5分)

(a) 求對稱點 (3分、3分)

(b) 若有極大值和極小值，則寫出發生極值的點；若沒有極值，則寫無 (3分、3分)

(c) 寫出遞增和遞減的範圍；若無，則寫無 (3分)

(d) 大約畫出 $f(x)$ 的函數圖形（須標出對稱點，若有極值也須標出） (3分)

[解]

(a) (b) (c) (d)

無 無

5. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ (5分)

(a) 求對稱點 (3分、3分)

(b) 若有極大值和極小值，則寫出發生極值的點；若沒有極值，則寫無 (3分、3分)

(c) 寫出遞增和遞減的範圍；若無，則寫無 (3分)

(d) 大約畫出 $f(x)$ 的函數圖形（須標出對稱點，若有極值也須標出） (3分)

[解]

(a) (b) (c) (d)

無 無

圖 4.3.10 第 4 題與第 5 題皆猜無，不予給分

6. 國際郵遞公約規定，航空包裹的「總長」不得超過 108 英吋。在此限制下，設計一個底部為正方形的長方體紙盒，使其容積最大。容積最大是多少立方英吋？此時底部正方形的邊長是多少英吋？（總長的定義是「底部」的周長加上「高」，而「高」的定義是長方體最長的那一邊，如圖所示；所有包裹皆以其外切長方體計算。） (10 分)

圖 4.3.11 測驗第 6 題

此題分段給分的標準，如圖 4.3.12 所示。

令正方形邊長為 x	
高為 $108 - 4x$	(2 分)
體積 $f(x) = x \cdot x \cdot (108 - 4x)$	
$= -4x^3 + 108x^2$	(3 分)
$f'(x) = -12x^2 + 216x$	(4 分)
$= -12x(x - 18)$	(5 分)
極大值時邊長： $x = 18$ (英吋)	(8 分)
容積： $18 \cdot 18 \cdot 36 = 11664$ (立方英吋)	(10 分)

圖 4.3.12 測驗第 6 題分段給分的標準

另外，部份學生將第 2 題答案寫錯題號位置，於可辨別範圍內皆不扣分；少數學生在第 1 題及第 2 題，答案應為 $f'(1) = 5$ ，筆誤寫成 $f(1) = 5$ ，酌量扣 1 分。

(二) 各校結果

甲高中、乙高中、丙高中的每位學生各題得分狀況與平均極標準差詳細記錄見【附錄四】，此列出各題的平均得分與總分及其標準差如表 4.3.1、表 4.3.2、表 4.3.3 所示。

表 4.3.1 甲高中的測驗結果

題號	一 (15)	二 (20)	三 (15)	四 (20)	五 (20)	六 (10)	總分 (100)
平均	12.1	11.6	11.6	6.9	7.0	1.9	51.1
標準差	4.8	5.3	4.4	8.1	6.3	3.4	22.1

由表 4.3.1 可知，第 1 題總分為 15 分的平均得分為 12.1 分，且經過統計共有 30 位學生得到滿分 15 分，有 42 位學生拿到 10 分以上，可見甲高中大部分學生對於各種不同表示導數的數學語言能確實掌握。

第 2 題總分 20 分的平均得分為 11.6 分，明顯比第 1 題低不少，甚至只有一位學生得到 20 分滿分，根據研究者觀察學生測驗試題結果，發現大部分學生在 (a) 小題及 (c) 小題的錯誤率偏高，推論學生對於極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 亦表示在 a 點的導數，此觀念部分學生仍然無法理解；(c) 小題部分學生能算出切線斜率的正確答案，但切線方程式卻無法正確寫出，但此觀念應為學生已知概念，所以此研究在實驗教學時並未特別強調。

第 3 題的狀況與第 1 題類似，共有 22 位學生拿到滿分 15 分，有 45 位學生拿到 10 分以上，因題型與第 1 題幾乎一模一樣，故不再贅述。

第 4 題與第 5 題的平均得分分別為 6.9 與 7.0，並沒有學生兩題都得到滿分 20 分，標準差為 8.1 與 6.3，且第 4 題拿滿分的有 8 位學生，第 5 題只有 1 位學生拿滿分；可知學生對於有極值的正常情況較容易作答，但有少部分學生利用代

點的方式知道圖形是全部遞增而得到了部份分數，因此平均分數會與第 4 題差不多。

第 6 題是應用問題的題型，平均得分為 1.9 分，拿到滿分 10 分的學生只有 4 位，有高達 33 位學生得到零分，可見學生普遍對於應用問題有不知如何應付的狀況。

表 4.3.2 乙高中的測驗結果

題號	一 (15)	二 (20)	三 (15)	四 (20)	五 (20)	六 (10)	總分 (100)
平均	14.1	18.0	13.9	17.5	17.1	7.8	88.5
標準差	2.2	2.7	2.0	2.7	2.8	2.7	10.0

乙高中由於是 PR 值較高的學校中的數理資優班，故整體表現都非常良好，總分 90 分以上的學生高達 20 位(57.1%)，且有多數位學生因細心度不夠，未能得到 100 分；但仍有少數學生對於切線方程式及切線斜率的概念不甚清楚，也有少數幾位對於極限的概念較無法接受，但大部分學生對於這套教材及測驗都能表現良好。

表 4.3.3 丙高中的測驗結果

題號	一(15)	二(20)	三(15)	四(20)	五(20)	六(10)	總分 (100)
座號							
平均	13.0	9.5	10.0	10.2	6.3	4.0	53.0
標準差	3.9	5.9	5.1	8.0	7.0	4.4	25.0

由表 4.3.3 可知，第 1 題丙高中的平均得分為 13 分，且經過統計滿分的人有 30 人，有 38 人拿到 10 分以上，大部分學生對於對於各種不同表示導數的數學語言亦能確實掌握。

但第 2 題丙高中的平均得分卻只有 9.5 分，只有 3 位學生拿到 20 分滿分，結果亦顯示丙高中學生多數無法瞭解極限的表示方式，且也有多數學生(c)小題切線方程式寫錯。

第 3 題的題型與第 1 題一樣，但丙高中的平均得分卻少了 3 分，只有 10 分，研究者再次翻閱丙高中的測驗試卷，發覺第 3 題的(b)小題

正確答案應為-27，但竟高達 10 位學生都寫 13 的錯誤答案，研究者再次翻閱試卷思索後發現學生都寫 13 的由來是因為題目問 $f(x)$ 在 $x=-1$ 的切線斜率，正確應為 $x=-1$ 代入導函數 $f'(x)$ 而學生直接將 $x=-1$ 代入方程式 $f(x)$ 中，所得的值就為 13；但在第 1 題(b)小題中，以 $x=1$ 代入 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的值剛好會一樣都等於 5，因此推測學生對於「切線斜率」的概念不是完全清楚。

第 4 題與第 5 題丙高中學生的得分結果顯示第 4 題的得分高於第 5 題不少，研究者推測因丙高中的學生學習狀況不甚好，故多加了第 5 堂實驗教學，對於後半部份的課程有更多的學習機會，而教學者在實驗教學時有完整的示範一遍有極值的圖形極值範圍為求法與遞增、遞減範圍的求法；但由於時間的因素，對於無極值的例題仍無法完整的示範給學生看，僅能口頭說明何時為無極值的情況，故學生第 4 題的表現情況較第 5 題來的好。

也因為多一堂課時間，對於應用問題的講解也更加深入，第 6 題是與學習單 IV 完全一樣的題目(甚至連數字都沒有改)，教學者在實驗教學時完整的講解過該題，使得該題得到滿分的學生高達 13 位(31.0%)，但也因多數學生上課狀況不好，導致只得到 0 分或 1 分的學生高達 21 位(50.0%)，使得該題平均只有 4.0 分。

第四節 綜合分析

將甲、乙、丙三所高中各題的得分情況與總分及標準差和討論結果整理如表 4.4.1 所示。

表 4.4.1 三高中各題得分、標準差與總分比較表

	第 1 題 (15)	第 2 題 (20)	第 3 題 (15)	第 4 題 (20)	第 5 題 (20)	第 6 題 (10)	總分 (100)	附註
甲高中 (標準差)	12.1 (4.8)	11.6 (5.3)	11.6 (4.4)	6.9 (8.1)	7.0 (6.3)	1.9 (3.4)	51.1 (22.1)	PR 值 75 普通班
乙高中 (標準差)	14.1 (2.2)	18.0 (2.7)	13.9 (2.0)	17.5 (2.7)	17.1 (2.8)	7.8 (2.7)	88.5 (10.0)	PR 值 95 數理資優班
丙高中 (標準差)	13.0 (3.9)	9.5 (5.9)	10.0 (5.1)	10.2 (8.0)	6.3 (7.0)	4.0 (4.4)	53.0 (25.0)	PR 值 85 社會組 多一堂課

此份教材為四堂課的設計，但經過三所不同高中的實驗後，發覺僅在程度較高的乙高中能在四堂課的時間內順利完成此設計之四堂課內容。

對於甲高中和丙高中，因丙高中所選的學生為社會組學生，故程度上應與甲高中差不多，但因甲高中是三所學校中第一個進行實驗教學的學校，故以教案原先安排的四堂實驗教學加 50 分鐘的測驗方式進行，前兩堂課均能順利進行，第三堂課時，原先教案的設計是講解完：

1. 藉由二次函數之圖形，說明導函數 $f'(x)$ 之正、負、零對應 $f(x)$ 之圖形特徵遞增、遞減、水平(發生最大、最小值)。
2. 講解「配三方」的效果是消除二次項，但利用泰勒形式完成其計算：在 $k = -a_2 / (3a_3)$ 做泰勒形式。

3. 「配三方」(泰勒形式)之後，認識一般三次函數 $f(x)$ 必為奇函數 $g(x) = px^3 + qx$ 之平移，故其圖形必對稱於 $(k, f(k))$ 。
4. 從 $y = px^3$ 的圖形根據 p 的正負而有兩種典型，推論 $g(x) = px^3 + qx$ 的圖形根據 p, q 的正負而有四種典型；定義極值之相關名詞。
5. 依據 $f'(x)$ 來決定 $f(x)$ 的遞增、遞減區間，有無極值。
6. 在黑板上示範如何從 $f'(x)$ 來得知 $f(x)$ 的遞增、遞減區間，及極值發生的位置，並將圖形畫在黑板上。(詳細課程內容詳見【附錄一】)

但在甲高中實際進行教學時，50 分鐘的課程僅能講完前 4 項觀念，並沒有時間在黑板上示範給學生看如何計算，因此第四堂課時，原先設計是利用 50 分鐘的時間講解學習單 IV 中三題應用問題並簡單將四堂課的內容做個複習，但由於第三堂課的內容尚未講解完，因此利用半堂課 25 分鐘的時間將第三堂課剩餘的觀念講完，並在黑板上示範有極大值與極小值的三次函數圖形，但時間仍不足以在黑板上示範恆遞增或恆遞減的三次函數圖形給學生看，僅能以口頭說明當發生導函數為無解的情形時，該三次函數為恆遞增或恆遞減的圖形，也沒有時間讓學生能在課堂上練習學習單上的題目；最後剩餘的時間將學習單上兩題較重要的題目講解完畢。

有了甲高中的這次經驗後，在與丙高中聯繫時，與該校教師討論後，發覺該校有時間再多一堂課的教學，因此在第三堂課時的教學進度放慢，較詳細的說明函數遞增遞減區間、對稱點的概念與「配三方」方法；第四堂課改為說明三次函數的四種典型圖形與對稱點間的關係、極值是否存在的概念與圖形的描繪方式，但講解與示範完極值存在的情況後，剩餘的時間仍無法完整的示範恆遞增或恆遞減的三次函數圖形，亦與甲高中類似，僅由口頭說明該觀念；而增加第五堂課的時間，則利用完整的一堂課時間進行原本所設計第四堂課應用問題的教學，也就是說，原本第三堂課的內容拆成兩堂課教學。研究者推測此原因造成甲高中與丙高中在測驗中第 4 題的平均分數分別為 6.9 與 10.2，第 6 題的平均分數分別為

1.9 與 4.0，均有明顯的差異；但由於第 5 題的觀念都僅以口頭說明，因此平均分數差不多，將甲、丙兩高中的比較表如表 4.4.2 所示。

表 4.4.2 甲、丙兩高中比較表

	第 4 題平均分數	第 5 題平均分數	第 6 題平均分數	情況
甲高中	6.9	7.0	1.9	利用 1.5 堂課的時間教第 4 題的觀念並示範，0.5 堂課的時間教第 6 題的觀念。僅以口頭說明第 5 題觀念。
丙高中	10.2	6.3	4.0	利用 2 堂課的時間教第 4 題的觀念，1 堂課的時間教第 6 題的觀念。僅以口頭說明第 5 題觀念。

乙高中整體表現優異，學生在學習這份教材並無困難，但仍有學生在第 2 題時，發生與甲高中與丙高中學生的一樣錯誤：切線方程式的表示錯誤。此結果將於第 5 章再行說明。

第五章 結論與建議

本研究旨在討論，能否設計一套符合高一學生學習的多項式函數的微分教材，而設計出的教材對於不同程度的學生其學習狀況又為何。本章分為兩節，第一節為結論，根據研究結果提出本研究的結論。第二節為建議，主要是針對本研究的發現，提供教學、教材設計的建議，以及未來研究的方向。

第一節 結論

本節將根據研究結果與討論，提出以下研究結論：

一、能以非極限的概念設計一套多項式微分教材，此方法能使高一學生學會多項式的微分技巧。但多數高一學生對於極限的符號及代數操作仍無法了解。

此教材由指導教授與研究者共同設計，多項式的微分不由極限的概念導入，學生僅需瞭解多項式除法的概念，推導出泰勒展開式，即可由泰勒展開式觀察出在特定點切線斜率(即導數)。在課堂中提及了極限的符號，僅告訴學生極限符號的表式方式也與導數代表一樣的意思，完全沒有談論極限逼近的概念，但多數高一學生仍對於極限符號無法接受，因此不適合在高一時談論極限的符號與概念。

二、不同程度的學生對於此教材的學習狀況有明顯的差異。

高程度的學生對於此份教材能夠完全吸收、瞭解，且能以微分的方法處理日常生活遇到的應用問題，對微分的概念、用極限表示微分的方法、各種不同三次函數圖形的對稱點、極大值、極小值等問題都能清楚判斷。

中等程度以下的學生則明顯無法瞭解用極限表示微分的方法，對於處理微分的題目與計算導數等較單純的計算問題，大部份都能計算出來；但計算對稱點、極大值、極小值與描繪圖形等問題仍有部分學生無法吸收；應用問題的學習狀況則普遍不良。

尤其當學生上課聽不懂時，越是會分心，此時額外增加課堂數，能提升學生的學習成效。

第二節 建議

根據本研究之研究結果，以及研究者在研究過程中的發現與經歷，在教學、教材設計及未來研究上，提出以下建議，供未來研究相關課程時之參考：

一、研究者在研究過程中的發現與經歷

對於學業程度較低的學生，平均在課堂中的專心度較學業程度較高的學生來的低，上課時聽不懂所以又更沒有興趣去學習，造成了一種惡性循環；研究者在甲高中及丙高中兩所學業程度較低的學生中，觀察到不少學生就是產生這種情況，但在實驗教學時為了避免干擾實驗課程的流程與進度，因此研究者與教學者均未及時給予那些同學提醒；因此建議教師在教學時，一發現學生開始對課程產生不適應時，應立即給予提醒，並利用課堂空檔時間或非課程時間給予學生補救教學，避免學生漸漸步入歧途。

二、教材設計的建議

此部份為研究者與指導教授討論最多的部份，因此分兩點進行說明。

(1) 甲、乙、丙三所高中的情況分析

如 4.4 所述，甲高中用了 1.5 堂課的時間在教案中第三堂課，僅用了 0.5 堂課在第四堂課；丙高中用了 2 堂課的時間在第三堂課，用了 1 堂課的時間在第四堂課，就造成了兩校對於同樣的一份試題，有了明顯的學習差異；而乙高中因學生程度明顯高於另外兩校，但實際教學時，乙校仍然只能在一堂課的時間內勉強講解完設計的課程，亦無法有剩餘的時間讓學生於課堂上練習學習單上的題目。

(2) 對於教材設計的建議

由以上結果發現，由於第三堂課的觀念較多且內容較豐富，但其內容又不方便從中切割，僅一堂課的時間對於大部份的學生並無法完整的學習此教材，權宜之計僅能類似在丙高中時所做之修改，將原設計第三堂課內容分為兩堂課，在講解完對稱點及三次函數的圖形典型時做為切割，並預留時間讓學生能練習學習單

上例題，下一堂課稍加複習後再講解遞增、遞減範圍與極極值和函數圖行的描繪的示範。

此套教案的設計是建立在最有效利用時間的條件下，即上課鐘響完就開始進行課程活動，直至下課鐘響結束 50 分鐘的完整教學，但從三所學校中均發現這是不可能的事情，學生從小養成的習慣與教師各人因素等，均無法於上課鐘響完就馬上開始教學，故此次實驗都有發生超過 50 分鐘的設計，佔用到學生下課時間的情形發生，因此教案的修改能從一些細部觀念推導去做刪減，盡量將教案修改為 40 至 45 分鐘內完成為主。

三、未來研究的建議

對於未來研究的方向，根據本研究的觀察與討論，研究者從兩點不同的想法給予建議：

(1) 教案的後續發展建議

如上教案建議所述，將四堂課的教材修改為五堂課的教材，並再以高一學生做實驗，觀察學生學習情況是否能提升；本研究因時間限制，未能將測驗試題讓高三學習完正常課程規劃以極限概念來做微分教學的自然組學生進行測驗，以比較高一學生與高三學生的學習差異，建議未來若有研究者對此後續結果有興趣，能繼續分析高一與高三學生的學習差別，更甚至對於微分的學習心態等問題。

另外，極限逼近的概念或是極限符號的表式方法，對於高一學生都是不容易學習的，因此建議該類似觀念仍應於高三時再行教學，高一時僅需由「直觀」的角度與多項式除法的概念來了解切線與切線斜率即可；除非對於程度極佳的學生才可告知微分的極限定義，並將微分的極限定義推廣至 $f(x) = \sqrt{x}$ 、 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x^2}$ ，以 $n = \frac{1}{2}$ 、 -1 、 -2 的情況，推論並接受：微分基本公式可推廣至任意次方的冪函數 x^n ；且從導數的極限定義，闡述導數的數學意涵：從割線到切線，以及物理意涵：從平均速度到瞬間速度。

(2) 數學認知的建議

從三所學校的測驗試題與作業中發現，三所學校皆有學生對於「切線方程式」的概念不清楚，會將直線方程式與函數的概念搞混，或是根本不知如何正確的表示「直線方程式」，且程度越低的學生分不清方程式與函數的比例越高，雖然直線方程式的圖形與一次函數的圖形畫起來是一樣的，但其本質的概念並不一樣，學生往往分不清之間的差異，導致在作業與測驗中皆有發現題目是問直線方程式，但學生作答時卻以 $f(x)=\dots$ 的方式呈現。

在此實驗結束後，指導教授剛好獲邀至臺北市一間 PR 值約為 99 的學校，進行 4 堂課的教學機會，指導教授就將此教材再次在該校進行教學，但因時間的因素無法讓學生進行測驗，因此僅由研究者批閱該校的四份作業，研究者從四十多位學生的作業中仍發現有兩位學生將直線方程式以 $f(x)=\dots$ 的方式呈現，因此研究者認為此問題存在於各種不同程度的高中生中，而直線方程式的概念和函數的概念為國中部份的教材，建議未來研究或許能朝國中端努力，探討學生剛接觸方程式與函數時的認知，與學習完方程式與函數時能否明確的分辨出兩者的相同與相異處，並能否以正確的「**數學語言**」進行溝通。

參考文獻

- [1] 張海潮(2008),「高中生為什麼要學微積分?」,高中數學學科中心電子報,第 31 期,民國九十七年十月。
- [2] 教育部 104 學年度大學多元入學升學網,<http://nsdua.moe.edu.tw/>。
- [3] 中時電子報,
<http://www.chinatimes.com/newspapers/20131021000361-260114>。
- [4] 高晟鈞(2009),「大一上學期各系必修課程與高中數學教育微積分課程的探討」,國立中央大學,碩士論文。
- [5] 李明憲(2013),「高一第一類組學生數學科學習需求分析研究」,國立中央大學,碩士論文。
- [6] 單維彰(2009),「美國 AP 微積分課程的啟示 - 高中生為什麼要學微積分?」,科學月刊,第 470 期,民國九十八年二月。
- [7] 李新民等編著,高級中學數學自然組第 6 冊,一版,東華書局,台北市,民國五十九年十二月。
- [8] 李新民等編著,高級中學數學自然組第 5 冊,三版,東華書局,台北市,民國六十年五月。
- [9] 王懷權等編著,高級中學數學自然組第 5 冊,二版,東華書局,台北市,民國六十四年七月。
- [10] 王懷權等編著,高級中學數學自然組第 6 冊,五版,東華書局,台北市,民國七十三年十二月。
- [11] 國立臺灣師範大學科學教育中心,高級中學理科數學上冊,十五版,國立編譯館,台北市,民國八十九年八月。
- [12] 劉維哲、蔡聰明和吳龍盛主編,數學甲(下),四版,三民書局,台北市,民國九十四年二月。

- [13] 單維彰和鄭惟厚，普通高級中學選修數學(甲版)下冊，初版，三民書局，台北市，民國 102 年二月。
- [14] 孫瑞良(2009)，「高中數學多項式函數(含微積分)其解題試題與應用問題之研究」，國立台灣師範大學，碩士論文。
- [15] 廖振能(2009)，「高中數學多項式函數(含微積分)其概念性試題與程序性試題之研究」，國立台灣師範大學，碩士論文。
- [16] 香港特別行政區政府教育局網站(2015)，
<http://www.edb.gov.hk/tc/index.html>。
- [17] 人民教育出版社網站(2015)，<http://www.pep.com.cn/>。
- [18] 人民教育出版社網站電子課本(2015)，
http://www.pep.com.cn/gzsx/jszx_1/czsxtbjxzy/xkbsyjc/dzkb/。
- [19] 姜志遠(2005)，「台灣與中國大陸之十二年數學課程比較日本數學」，國立中央大學，碩士論文。
- [20] 洪雅齡(2005)，「台灣與日本之十二年數學課程比較日本數學」，國立中央大學，碩士論文。
- [21] 日本文部科學省網站(2015)，<http://www.mext.go.jp/>。

	<p>3. 宣告目標：那條「局部很像」的直線稱為「切線」，本節學會在指定的點算出切線</p> <p>4. 檢查起點行為：</p> <p>4-1. 觀察現象時，複習起點一：函數圖形的意義</p> <p>4-2. 檢查起點四：利用學習單 I 的隨堂練習，黑板分三區，全班分組同時做三題（3 次函數），必要時重點複習</p>	<p>2 (17)</p> <p>10 (27)</p>	<p>以說是「函數」，此時不要擔心一般性（不連續或不可微）等問題</p>
教學內容	<p>5. 利用第 4 項複習的結果，指出「已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 的泰勒形式，估計 $f(0.99)$ 或 $f(1.02)$ 之值至百分位」的題型，即為函數值接近泰勒一次式的性質，解釋局部圖形像一條直線的理由</p> <p>6. 承上，泰勒形式可以不必「算完」，以升幂排列比較方便</p> <p>7. 根據泰勒形式定義切線，並說明關於切線的數學語言，特別是「f 在 a 的切線斜率記作 $f'(a)$」</p> <p>8. 應用泰勒形式完成學習單 I</p> <p>9. 發放作業一，扼要說明，並宣布第二節課要收作業</p>	<p>3 (30)</p> <p>2 (32)</p> <p>5 (37)</p> <p>10 (47)</p> <p>3 (50)</p>	<p>關於切線的溝通，必須包括以下要素：哪個函數在哪裡的切線，其斜率為何？是正還是負還是零？</p>

單元名稱	多項式的微分	適用對象	高一學習多項式的除法原理，綜合除法，泰勒形式之後	時間/節數	200 分鐘/4 節
					第二節
項目	教學活動			時間	附註
起點行為	<p>一、 給定多項式函數 $f(x)$ 與實數 a，能算出切線</p> <p>二、 知道 $f'(a)$ 的意思，並能用綜合除法計算</p> <p>三、 知道 $f(x) \div (x-a) = q(x) \dots f(a)$ 的意思就是 $f(x) - f(a)$ 可以被 $x-a$ 整除，而且 $(f(x) - f(a)) \div (x-a) = q(x)$</p>				
教學目標	<p>I. 了解 $f'(a)$ 就是 $q(a)$，亦即在 $(f(x) - f(a)) \div (x-a)$ 的商式函數中，代入 $x=a$</p>				不要推廣極限運算至一般情

	<p>II. 認識數學不能在分式 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 中代入 $x=a$，所以用新符號 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 代替的理由</p> <p>III. 知道多項式微分基本公式，知道微分的線性性質，並能用以求得任意多項式函數的導函數；能從導函數求導數</p> <p>IV. 知道微分、導數、導函數等數學語言，並能用來溝通</p>		<p>況，僅限 f 為多項式</p> <p>多項式函數均不必超過 4 次</p>
課前	a. 複印文本（講義）、學習單 II 和作業二		
課程 導入	<p>1. 起點行為驗收：教師利用作業一的三題，寫出題目 $f(x)$ 及 a 值，寫答案（不必過程，同時請同學收作業）：切線方程式，$f'(a)$，以及 $(f(x)-f(a)) \div (x-a)$ 的商，其中 a 是實際的數字</p> <p>2. 承上，確認 $f'(a)$ 就是在 $(f(x)-f(a)) \div (x-a)$ 的商式代入 $x=a$ 的值，順便正式介紹「導數」名詞</p> <p>3. 宣告目標：本節學習一套計算方法，更快求得 $f'(a)$（然後就能寫出切線方程式），該方法稱為「微分」</p>	<p>5</p> <p>3 (8)</p> <p>1 (9)</p>	<p>教師交替讀 $f'(a)$ 作「f prime of a」和「f 在 a 的導數」</p>
教學 內容	<p>4. 認識一個窘境：$f'(a)$ 就是 $(f(x)-f(a)) \div (x-a)$ 的商式在 $x=a$ 的值，但是寫成分式之後不能代入</p> <p>5. 承上，宣布「極限」的符號及操作法（兩遍綜合除法）</p> <p>6. 綜合以上所知，陳述導數的極限定義</p> <p>7. 黑板分隔三份，挑選三位同學，運極限的操作法，同時與全班計算 $f(x)=x^2$、x^3、x^4 的 $f'(a)$，其中故意令 a 為符號</p> <p>8. 承上，必要時教師介入，請全班一起猜：當 $f(x)=x^n$ 且 n 為大於 1 的整數時，$f'(a)$ 的公式為何？</p> <p>9. 教師證明上述猜想</p> <p>10. 認識 $f'(a)$ 的 a 可以代入任何數，其實它是一個「變數」；以「數學習慣用哪個符號表示變數」引導全班認識 $f'(x)$ 其實是一個新的函數；此函數從原來的 $f(x)$ 「推導」而得，故稱導函數</p>	<p>2 (11)</p> <p>1 (12)</p> <p>2 (14)</p> <p>8 (22)</p> <p>2 (24)</p> <p>4 (28)</p> <p>2 (30)</p>	<p>不提「極限」的一般性數學定義，也不提其物理意涵（瞬間速度）</p> <p>強調「微分」是動作，一套計算的程序</p> <p>不必刻意強調「線性性質」</p>

11. 用導函數形式重寫當 $f(x) = x^n$ 的 $f'(x)$ 公式，引導全班猜測 $n = 1、0$ 的情況；介紹「微分」就是求導數或導函數的動作；結論：多項式的微分基本公式	3 (32)	之名稱，但教師要經常陳述，學生要能
12. 藉用泰勒形式，推論微分的線性性質	5 (38)	操作
13. 一般多項式函數的微分可以逐項操作，故得任意多項式函數之導函數的一般性算法：多項式的微分（同時請學生學習單）	2 (40)	暫不提 d/dx
14. 認識導數即為導函數的值（同學同時在做學習單）	2 (42)	符號
15. 完成學習單 II（視時間決定讓學生上台做，或教師示範）	6 (48)	
16. 發放作業二，扼要說明，並宣布第三節課要收作業二	2 (50)	

【備註】

如果能夠多排一節課，放在（現在安排的）第二節與第三節之間，或者在第四節之後，可以設定以下教學目標：

- I. 將微分的極限定義推廣至 $f(x) = \sqrt{x}$ 、 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x^2}$ ，並以 $n = \frac{1}{2}$ 、 -1 、 -2 的情況，推論並接受：微分基本公式可推廣至任意次方的冪函數 x^n
- II. 從導數的極限定義，闡述導數的數學意涵：從割線到切線，以及物理意涵：從平均速度到瞬間速度
- III. 將導數之極限定義，發展至「 Δx 形式」的導函數極限定義

$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ，並用以重新推論微分基本公式（ $f(x) = x^n$ 的導函數， n 為正整數）；其操作方法仍然是先約分，再代入 $\Delta x = 0$

- IV. 從導函數的極限定義，說明 $\frac{d}{dx} f(x)$ 以及 $\frac{dy}{dx}$ 符號的由來，並發展 $\frac{d}{dx} f(a)$ 以及 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$ 符號，練習使用之

單元 名稱	多項式的微分	適用對象	高一學習多項式的除法原理，綜合 除法，泰勒形式之後	時間/ 節數	200 分鐘/4 節
					第三節
項目	教學活動			時間	附註
起點 行為	一、能利用配方法草繪二次多項式函數的圖形 二、知道立方二項式的展開公式 $(x-k)^3$ 三、給定多項式函數 $f(x)$ ，能算出導函數 $f'(x)$ 四、知道將 $x=a$ 代入 $f'(x)$ 就是 $f(x)$ 在 a 的切線斜率 五、能求解二次多項式不等式				
教學 目標	I. 利用配三方，得知三次多項式函數必有一個對稱點 II. 知道導數為正、為負、為零所對應的函數圖形特徵：遞增、遞減、水平（可能發生極值），能用以對照二次函數圖形，並草繪三次函數圖形 III. 認識極大值與極小值的函數圖形特徵 IV. 能用導函數不等式的解區間判斷函數的遞增、遞減範圍，並判斷極值的發生或不發生 V. 知道關於單調性、極值的數學語言，並能用於溝通				暫不處理二階 導數，以一階 導數判斷極值
課前	a. 複印文本（講義）、學習單 III 和作業三				
課程 導入	1. 起點行為驗收：利用學習單的兩題，複習二次式配方，圖形為單項二次式的平移 2. 承上，計算二次函數 $f(x)$ 之導函數，繪其圖形（直線），將 $f'(x)$ 之正、負、零對應 $f(x)$ 之圖形特徵：遞增、遞減、水平（發生最大、最小值） 3. 宣告目標：將以上知識運用於三次函數，徹底了解三次函數的圖形 4. 複習二項立方式 $(x-k)^3$ 的展開			5 4 (9) 1 (10) 2 (12)	

教學 內容	5. 了解「配三方」的效果是消除二次項，但利用泰勒形式完成其計算：在 $k = -a_2 / (3a_3)$ 做泰勒形式（搭配學習單）	4 (16)	不要針對遞增（遞減）的區
	6. 「配三方」（泰勒形式）之後，認識一般三次函數 $f(x)$ 必為奇函數 $g(x) = px^3 + qx$ 之平移，故其圖形必對稱於 $(k, f(k))$	4 (20)	間端點鑽牛角尖，只要不是
	7. 從 $y = px^3$ 的圖形根據 p 的正負而有兩種典型，推論 $g(x) = px^3 + qx$ 的圖形根據 p, q 的正負而有四種典型；在此定義極值之相關名詞	6 (26)	無窮遠，開或閉皆可，端點
	8. 怎樣更精確？須要 $f'(x)$ ；它是二次函數，有二相異實根（對稱於 k ）、一重根（必為 k ）、無實根，三種狀況	6 (32)	無關緊要
	9. 根據 $f'(x)$ 決定 $f(x)$ 的遞增、遞減區間，有無極值；若有極值可用於繪圖	6 (38)	
	10. 完成學習單 III 的隨堂練習	10 (48)	
	11. 發放作業三，扼要說明，並宣布第四節課要收作業三	2 (50)	

單元 名稱	多項式的微分	適用對象	高一學習多項式的除法原理，綜合除法，泰勒形式之後	時間/ 節數	200 分鐘/4 節
					第四節
項目	教學活動			時間	附註
起點 行為	一、 給定多項式函數 $f(x)$ ，能算出導函數 $f'(x)$ 二、 能求解多項式函數 $f(x)$ 的極大值和極小值				
教學 目標	I. 能利用多項式的微分方法來處理日常生活中可能會遇到的極值問題				
課前	a. 複印學習單 IV 和作業四				

課程 導入	1. 起點行為驗收：利用作業三，請同學上台寫出各題 $f(x)$ 的極大值和極小值	10	
	2. 承上，再次複習多項式函數 $f(x)$ 的遞增、遞減、極大值、極小值等各特徵	10 (20)	
	3. 宣告目標：要利用多項式的微分來處理日常生活中可能會遇到的最佳化問題	5 (25)	
教學 內容	4. 解決最化問題的步驟： (1) 根據題意列出多項式函數 $f(x)$ (二次或三次) (2) 求出導函數 $f'(x)$ (3) 求解 $f'(x) = 0$ (4) 將解帶回原式檢察，即可留下最佳解	5 (30)	
	5. 完成學習單 IV 的隨堂練習	18 (48)	
	6. 發放作業四，扼要說明，並宣布第五節課要收作業四	2(50)	

【附錄二】作業與學習單及測驗

學習單 I

多項式函數 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 附近的局部圖形都像 _____

那條直線就是 $f(x)$ 在 $x = a$ 的

多項式函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的泰勒形式：

隨堂練習

(1) 做 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 在 $x = 2$ 的泰勒形式

$$f(x) = f(2) + a_1(x-2) + (x-2)^2$$

(2) 做 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ 在 $x = -1$ 的泰勒形式

$$f(x) = f(-1) + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + (x+1)^3$$

複習

餘式定理：

因式定理：

(3) 做 $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$ 在 $x = 1$ 的泰勒形式

$$f(x) = f(1) + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + 3(x-1)^3$$

若 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的泰勒形式為 $f(x) = f(a) + a_1(x-a) + \dots$ ，則其一次式的部分形成的線型函數

$y = a_1(x-a) + f(a)$ 是一條通過點 $(a, f(a))$ 且斜率為 a_1 的直線。此直線稱為 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的

切線，其中**切線斜率** a_1 記作 $f'(a)$ ，讀作 f prime of a。故 $f(x)$ 在 $x = a$ 的切線方程式又記作

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

例題

(1) 令 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的切線方程式，及 $f'(2)$

(2) 令 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ ，求 $f(x)$ 在 $x = -1$ 的切線方程式，及 $f'(-1)$

(3) 令 $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$ ，求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的切線方程式，及 $f'(1)$

(4) 令 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 2x - 3$ ，求 $f(x) \div (x + 2)$ 的商式和餘數，寫出 $f(x)$ 在 $x = -2$ 的切線斜率以及切線方程式

(5) 令 $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 1$ ，求 $f(x) \div x$ 的商式和餘數，寫出 $f'(0)$ 和 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的切線方程式

作業一

座號：_____

姓名：_____

	$f(x) = x^2 - 3x + 2$	$f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 2$	$f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 3$
$f(x) \div (x-1)$ 的商式和餘數			
在 $x=1$ 的 切線方程式			
在 $x=1$ 的 切線斜率 $f'(1)$			
在 $x=0$ 的 切線方程式			
在 $x=0$ 的 切線斜率 $f'(0)$			
在 $x=-1$ 的 切線斜率 $f'(-1)$			
在 $x=-1$ 的 切線方程式			

學習單 II

除法原理：若 $f(x) \div (x-a) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

則 $f(x) = q(x)(x-a) + f(a)$

故 $f(x) - f(a) = q(x)(x-a)$ ，也就是 $(f(x) - f(a)) \div (x-a) = q(x)$

導數之極限定義的練習：

	$(f(x) - f(1)) \div (x-1)$ 的 商	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$	$f'(1)$
$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6x - 6$			
$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 5$			

基本公式的推導：

$f(x)$	$f'(a)$	推導過程
$f(x) = x^2$		
$f(x) = x^3$		
$f(x) = x^4$		
$f(x) = x^n$		

練習，求下列各多項式函數的導函數：

(1) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

(2) $f(x) = -4x^3 + 5x^2 - x + 6$

(3) $f(x) = 6x^3 - 5x + 9$

(4) $f(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2 + 6x - 9$

(5) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x$

筆記

$f'(x)$ 叫做 $f(x)$ 的 _____

微分的意思就是：

這些表示法都是代表微分：

$[x]' = \underline{\hspace{2cm}}$

$[1]' = \underline{\hspace{2cm}}$

$[0]' = \underline{\hspace{2cm}}$

作業二

座號：_____

姓名：_____

	$(f(x) - f(1)) \div (x - 1)$ 的商	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	$f'(1)$
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 6$			
$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2$			
	$(f(x) - f(2)) \div (x - 2)$ 的商	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$	$f'(2)$
$f(x) = -2x^3 + x + 9$			
$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x$			

	求出導函數 $f'(x)$	算出在 $x = 2$ 的切線斜率	算出在 $x = -1$ 的切線斜率
$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6$			
$f(x) = x^3 + 2x^2 - 10x - 2$			

$f(x) = 7x^3 + 12$			
$f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 3x$			

學習單 III

一、二次函數的圖形：利用「配方」，將以下函數改寫成「完全平方式」 $a(x-k)^2+b$

(1) $f(x) = x^2 + x + 1$	(2) $f(x) = 2x - x^2$
$y = f(x)$ 的函數圖形	
(1)	(2)
寫出導函數 $f'(x)$	
(1)	(2)
導函數 $f'(x)$ 的 $+$ 、 $-$ 、 0	
(1)	(2)

結論：

A. 若當 $a < x < b$ 時 $f'(x) > 0$ ，則函數圖形

B. 若當 $a < x < b$ 時 $f'(x) < 0$ ，則函數圖形

C. 若 $f'(a) = 0$ ，而且

C-1：若 _____，則在 $x = a$ 發生
極大值

C-1：若 _____，則在 $x = a$ 發生極小值

筆記

令 $f(x)$ 為三次多項式函數

① 當 $f'(x) = 0$ _____

$f(x)$ 有極大值和極小值

圖示

② 當 $f'(x) = 0$ _____

$f(x)$ 無極大值和極小值

圖示

③ 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 發生極大值

或極小值，必定 _____

④ $f'(a) = 0$ 就表示 $f(x)$ 在 $x = a$ 發生極大值或極小值嗎？為什麼？（舉例說明）

二、立方公式

$$(x-k)^3 =$$

三、「配三方」消滅三次函數的二次項

令 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 其中 $a_3 \neq 0$ ，

因為 $a_3(x-k)^3 = a_3x^3 - 3ka_3x^2 + \dots$ ，

所以，若選 $-3ka_3 = a_2$ ，亦即 $k = -\frac{a_2}{3a_3}$ ，則 $f(x)$ 在 k 的泰勒形式為

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x-k) + a_3(x-k)^3$$

$y = f(x)$ 的圖形是奇函數（對稱於原點） $g(x) = a_3x^3 + f'(k)x$ 向右平移 k ，向上平移 $f(k)$ 的結果。

結論：三次多項式函數的圖形，必定對稱於點 $(k, f(k))$ 。

練習：以下三次函數 $f(x)$ 的圖形對稱於 (k, h) ，且是 $g(x) = px^3 + qx$ 的平移，求 k, h, p, q 。

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

①算出 $k = -\frac{a_2}{3a_3} =$

(2) $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

①算出 $k = -\frac{a_2}{3a_3} =$

②算出泰勒形式

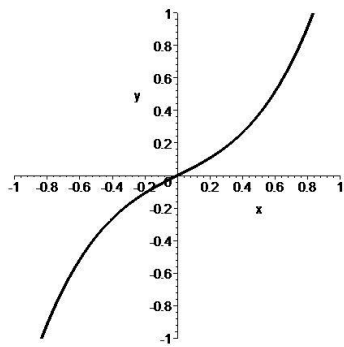
②算出泰勒形式

③從泰勒係數找出 h, p, q

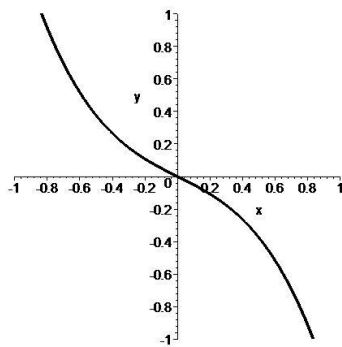
③從泰勒係數找出 h, p, q

四、奇函數 $g(x) = px^3 + qx$ 的圖形典型

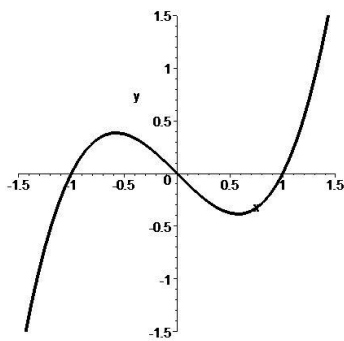
$p+、q+$



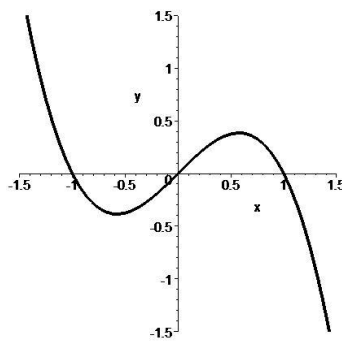
$p-、q-$



$p+、q-$



$p-、q+$



五、究竟有沒有極值？如果有，在哪裡？值是多少？答案： $f'(x)$ 二次多項式函數的 $+$ 、 $-$ 、 0

練習：對以上的三次函數 (1) 和 (2)，草繪其函數圖形。

④算出 $f'(x)$ ，求解 $+$ 、 $-$ 、 0

④算出 $f'(x)$ ，求解 $+$ 、 $-$ 、 0

⑤若有極值，算出來（善用對稱性）

⑤若有極值，算出來（善用對稱性）

⑥畫圖

⑥畫圖

練習：對以下三次多項式函數，繪其圖形，寫出它的對稱點，說明它遞增或遞減的範圍。若有極大值或極小值，寫出發生的點，以及它們的值。

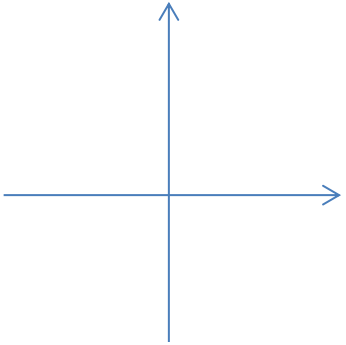
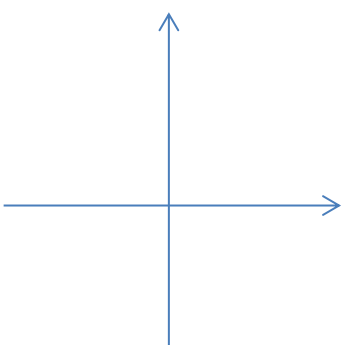
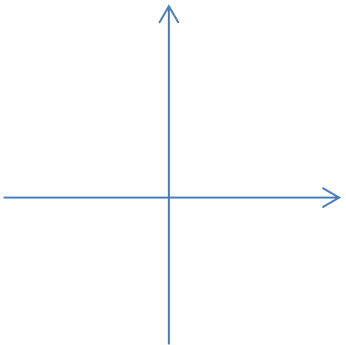
(1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$

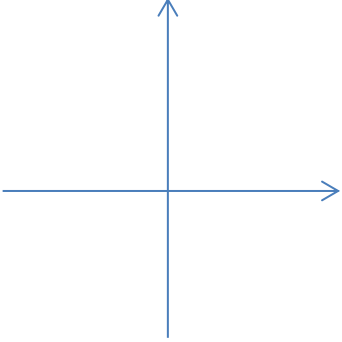
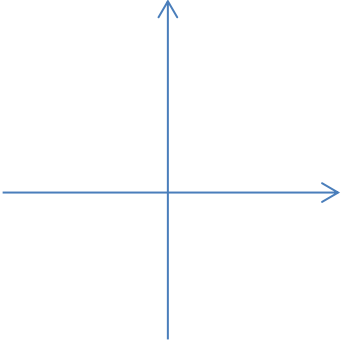
(2) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 4x - 2$

(3) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

作業三 座號：_____

姓名：_____

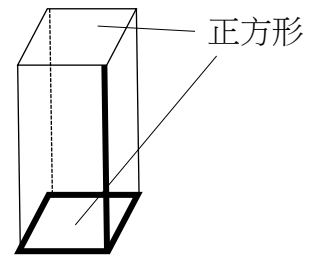
$f(x)$ 與 $f'(x)$	對稱點、遞增或遞減的範圍、 極大值和極小值發生的點 (若沒有就寫「無」)	函數圖形
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$	對稱點： 遞增： 遞減： 極大值： 極小值：	
$f'(x) =$		
$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$	對稱點： 遞增： 遞減： 極大值： 極小值：	
$f'(x) =$		
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$	對稱點： 遞增： 遞減： 極大值： 極小值：	
$f'(x) =$		

$f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 2$	對稱點：	
$f'(x) =$	遞增：	
	遞減：	
	極大值：	
	極小值：	
$f(x) = -x^3 - x^2 - x - 1$	對稱點：	
$f'(x)$	遞增：	
	遞減：	
	極大值：	
	極小值：	

學習單 IV

1. 將一根直徑為 45 公分圓柱型的原木裁切成剖面為長方形的木樑，設其寬為 x ，高為 y ，而且 $x < y$ 。根據力學定律，木樑在其縱面上可承受的質量（公斤），正比於 xy^2 。若已知這種木材的比例常數為 $1/17.3$ ，求裁切的寬與高，使得木樑能承受最大質量；此時大約能承受幾公斤？

2. 國際郵遞公約規定，航空包裹的「總長」不得超過 108 英吋。在此限制下，設計一個底部為正方形的長方體紙盒，使其容積最大。容積最大是多少立方英吋？此時底部正方形的邊長是多少英吋？（總長的定義是「底部」的周長加上「高」，而「高」的定義是長方體最長的那一邊；所有包裹皆以其外切長方體計算。）



粗體部份總和即為「總長」

3. 市調發現某休閒食品的售價定為 x 元時，全省門市每日約可售出 S 萬包，其中

$$S = \frac{1}{30}(x-15)^2 + 1, \quad 0 < x \leq 15。$$

按照此模型，該產品若定價為多少元時，能使每日營業額達到最大？預期的營業額大約為多少萬元？比目前多出多少元？

後記：插值多項式用於市調。現在只會多項式的微分，能示範的問題不多。如果可以做 \sqrt{x} 的微分，就能處理『海岸外 2km 有天然氣鑽井，假設海岸為直線，岸邊有一儲存廠，距氣井最近之岸點 4km。若海中管線的每公里造價是陸上管線的兩倍，試求海管登陸的點，使得總價最低』。如果可以做 $1/x$ 的微分，就能處理『假設要建造一個兩頭為半球，中間為圓柱的運輸油槽。若要求體積為 120 立方公尺，且知兩頭的單位面積造價是中間的兩倍，求達到最低成本的直徑與長』。

作業四

座號：_____

姓名：_____

1. 在河邊用長 1200 公尺的繩子圍出一塊長方型區域，這塊長方型區域面積最大會是多少平方公尺？此時長和寬分別是多少公尺？
2. 遊樂園目前一張門票 350 元，平均每天能賣出 2000 張。若市調發現每張門票價格提高 10 元，則每天會少賣 100 張。若按此市調發現的比例，試問遊樂園每張門票要賣多少元才能有最大收入？此時每天能收入多少元？比目前多出多少元？
3. 張師傅須為公司設計底面為正方形且沒有蓋子的長方體紙盒。在表面積為 432 平方公分的限制下，他應將此無蓋紙盒的底面邊長設計為多少公分，才能使紙盒的容積最大？
4. 所謂「諾曼窗」是由下方一個長方形連接上方一個半圓形組成的窗戶造型，其中半圓的直徑與長方形的寬度相等。若限定此窗的（外圍）周長為 6 公尺，請問長方形部分的寬和高各為幾公尺，能使窗戶的面積達到最大？

「多項式的微分」測驗

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

姓名：_____ 座號：_____

(a) 求出導函數 $f'(x)$ (5 分)

(b) 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的切線斜率 (5 分)

(c) 求 $f'(2)$ (5 分)

[解]

(a)

(b)

(c)

2. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 1$

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$ (5 分)

(b) 將 $f(x)$ 微分 (5 分)

(c) 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的切線方程式和切線斜率 (3 分、2 分)

(d) 求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的導數 (5 分)

[解]

(a) (b)

(c) (d)

3. $f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 3x$

(a) 求出導函數 $f'(x)$ (5 分)

(b) 求 $f(x)$ 在 $x = -1$ 的切線斜率 (5 分)

(c) 求 $f'(1)$ (5 分)

[解]

(a)

(b)

(c)

4. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$

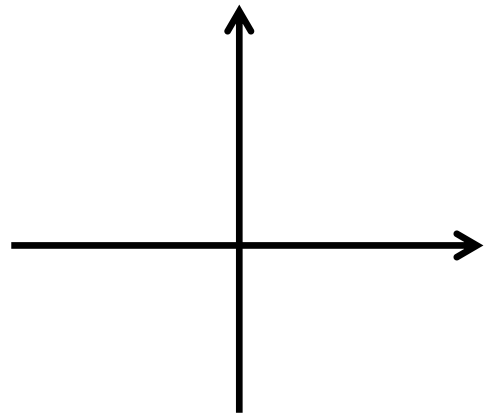
(a) 求對稱點 (5 分)

(b) 若有極大值和極小值，則寫出發生極值的點；若沒有極值，則寫無
(3 分、3 分)

(c) 寫出遞增和遞減的範圍；若無，則寫無 (3 分、3 分)

(d) 大約畫出 $f(x)$ 的函數圖形 (須標出對稱點，若有極值也須標出) (3 分)

[解]



5. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$

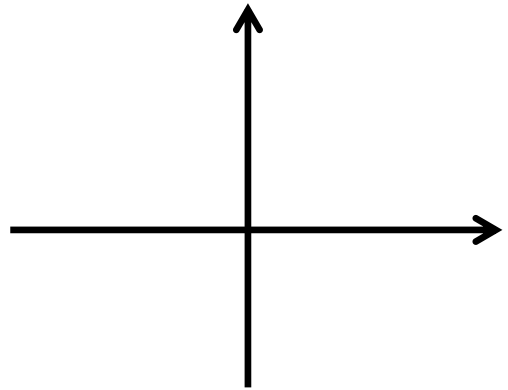
(a) 求對稱點 (5 分)

(b) 若有極大值和極小值，則寫出發生極值的點；若沒有極值，則寫無
(3 分、3 分)

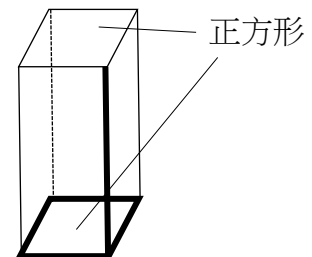
(c) 寫出遞增和遞減的範圍；若無，則寫無 (3 分、3 分)

(d) 大約畫出 $f(x)$ 的函數圖形 (須標出對稱點，若有極值也須標出) (3 分)

[解]



6. 國際郵遞公約規定，航空包裹的「總長」不得超過 108 英吋。在此限制下，設計一個底部為正方形的長方體紙盒，使其容積最大。容積最大是多少立方英吋？此時底部正方形的邊長是多少英吋？（總長的定義是「底部」的周長加上「高」，而「高」的定義是長方體最長的那一邊，如圖所示；所有包裹皆以其外切長方體計算。） (10 分)



粗體部份總和即為「總長」

高中數學 選修 II 評量 (單元 H 三次函數的圖形)

[班級: _____ 座號: _____ 姓名: _____]

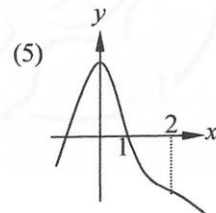
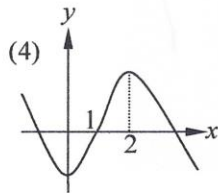
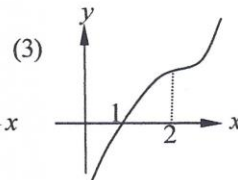
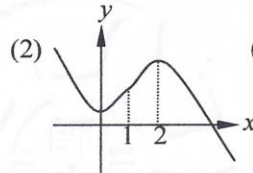
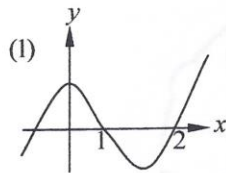
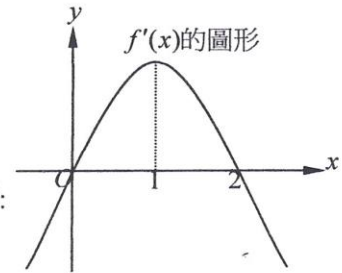
第一部份: 選擇題

壹、單一選擇題 (每題 8 分, 答錯不倒扣)

1. () 設實係數三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$d > 0$, 且導函數 $f'(x)$ 的圖如右所示。

下列哪個選項的圖形可以代表函數 $f(x)$ 之圖形:



答: (2)

2. () 已知三次多項式函數 $f(x)$ 有極大值 8, 極小值 0。若 $f(x) = k$ 恰有一

實根, 則實數 k 的範圍為何:

(1) $k > 8$ 或 $k < 0$

(2) $k > 8$ 或 $k < 4$

(3) $0 < k < 4$

(4) $4 < k < 8$

(5) $0 < k < 8$

答: (1)

3. () 設 $f(x)$ 是一個三次多項式函數，且 α 、 β 為 $f'(x)=0$ 的兩個相異實根。若 $f(\alpha)f(\beta)>0$ 時，則 $f(x)=0$ 有幾個實根：

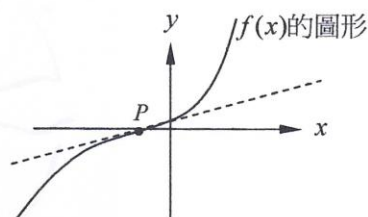
- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

答：(2)

貳、多重選擇題(每題 8 分，答錯一個選項給 4 分，餘不計分)

4. () 設實係數三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形與 x 軸之交點恰為反曲點 P ，且過 P 點的切線斜率大於 0，如下圖所示。選出正確選項：

- (1) $a > 0$
- (2) $d > 0$
- (3) $b > 0$
- (4) $b^2 - 3ac > 0$
- (5) $f(x)=2$ 僅有一個實根



答：(1)(2)(3)(5)

5. () 在坐標平面上，關於三次函數 $f(x)=x^3+3x-4$ 的圖形，選出正確選項：

- (1) 圖形上有最高點，也有最低點
- (2) 圖形的特色呈現遞增
- (3) 圖形上有水平切線
- (4) 圖形與任一水平直線都恰有一交點
- (5) 若 (a,b) 為圖形上的一點，則 $(-a,-b-8)$ 也在該圖形上

答：(2)(4)(5)

6. () 設 $f(x)$ 是一個領導係數為 1 的實係數三次多項式函數，已知 $0 < k < 3$ 時，方程式 $f(x) - k = 0$ 有三個相異實根；在 $k < 0$ 或 $k > 3$ 時， $f(x) - k = 0$ 只有一個實根。選出正確的選項。
- (1) $f(x) - 3 = 0$ 和 $f(x) = 0$ 有共同實根
 - (2) $f(x) - 3 = 0$ 和 $f'(x) = 0$ 有共同實根
 - (3) $f(x) = 0$ 和 $f'(x) = 0$ 有共同實根
 - (4) $f(x) + 2 = 0$ 的任一實根大於 $f(x) - 5 = 0$ 的任一實根
 - (5) $f(x) + 1 = 0$ 的任一實根小於 $f(x) - 4 = 0$ 的任一實根

答：(2)(3)(5)

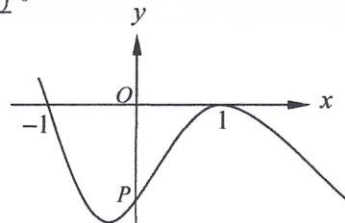
第二部份：非選擇題

壹、填充題(每格 8 分)

- A. 若三次函數 $f(x) = x^3 - 3x + p$ 的圖形與直線 $y = 3$ 相切，則實數 $p =$ _____。

答： $p = 1$ 或 5

- B. 下圖是三次函數 $f(x)$ 的圖形，這圖形剛好與 x 軸碰到二次，從左到右依序為 $x = -1$ 與 $x = 1$ 的位置。已知圖形與 y 軸交於 P 點，且過 P 點的切線斜率為 2，求 P 點坐標(_____, _____)。



答：(0, -2)

- C. 設實係數三次多項式函數 $f(x)$ 的圖形過點 $(1, -6)$ ，且其導函數為

$$f'(x) = a(x-2)(x+2)。已知 f(x) 的極大值與極小值之和為 10，$$

- (1) 求 $f(0) =$ _____。
- (2) 求 $a =$ _____。

答：(1) 5 (2) 3

D. 在坐標平面上，已知函數 $f(x) = x^3 - x + 1$ 的圖形與直線 $2x - y + k = 0$ 交於相異三點，求實數 k 的範圍：_____。

答： $-1 < k < 3$

貳、計算題 (每題 12 分)

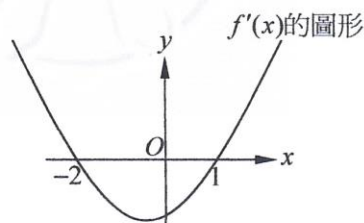
一、已知正實數 α 為實係數三次函數 $f(x) = x^3 - kx + 16 = 0$ 的二重根，負實數 β 為另一根。求下列各值：

- (1) k 的值。
- (2) 數對 (α, β) 。

答： (1) 12 (2) (2, -4)

二、設實係數三次函數 $f(x)$ 滿足 $f(0) = 1$ ， $f'(-1) = -12$ ，且反曲點坐標為 $(r, f(r))$ 。已知導函數 $f'(x)$ 的圖形如下所示，

- (1) 求實數 r 的值。
- (2) 求函數 $f(x)$ 。



答： (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

【附錄四】甲、乙、丙三所高中測驗成績表

甲高中

題號 座號	一(15)	二(20)	三(15)	四(20)	五(20)	六(10)	總分 (100)
1	15	7	10	17	8	3	60
2	10	12	10	18	17	0	67
3	15	19	10	7	5	0	56
4	15	17	15	20	14	10	91
5	15	10	10	0	9	0	44
6	10	5	15	0	0	0	30
7	15	17	10	14	12	0	68
8	5	5	10	1	11	0	32
9	15	5	10	0	0	0	30
10	15	10	15	0	0	0	40
11	15	17	15	0	0	0	47
12	15	17	10	0	0	0	42
13	14	10	10	0	0	0	34
14	15	17	15	7	9	0	63
15	15	5	15	5	13	0	53
16	15	20	15	0	0	4	54
17	0	0	0	0	0	0	0
18	5	12	15	20	19	3	74
19	10	14	15	3	12	0	54
21	15	17	15	0	0	0	47
23	15	10	10	0	0	0	35
24	15	10	15	0	0	0	40
25	10	5	10	0	0	0	25
26	0	0	0	0	0	0	0
27	15	17	15	6	14	0	67
28	15	10	15	20	14	5	79
29	15	15	15	16	14	3	78

30	10	11	5	10	11	9	56
32	15	15	10	20	11	10	81
33	15	15	15	11	13	8	77
34	15	17	15	0	0	0	47
35	14	10	14	0	0	0	38
36	15	8	10	20	14	0	67
37	15	12	14	20	0	0	61
38	15	17	15	1	11	0	59
39	5	10	0	0	11	0	26
40	0	5	15	0	0	0	20
42	15	17	15	14	6	0	67
43	15	19	10	18	20	9	91
44	15	17	15	20	5	0	72
45	15	15	10	20	11	10	81
46	15	9	15	5	14	3	61
47	10	12	10	4	5	10	51
48	5	5	10	0	0	0	20
49	0	2	0	0	9	0	11
50	15	15	15	0	11	0	56
平均	12.1	11.6	11.6	6.9	7.0	1.9	51.1
標準差	4.8	5.3	4.4	8.1	6.3	3.4	22.1

乙高中

題號 座號	一(15)	二(20)	三(15)	四(20)	五(20)	六(10)	總分 (100)
1	15	20	15	20	17	8	95
2	15	20	15	17	20	10	97
3	15	17	15	20	20	5	92
4	15	15	15	20	20	10	95
5	15	20	15	20	20	10	100
6	10	17	15	17	20	8	87
7	15	20	15	20	15	5	90

8	15	15	10	10	15	1	66
9	14	18	15	15	20	8	90
10	15	20	10	20	17	7	89
11	15	20	14	20	14	10	93
12	10	10	15	17	10	2	64
13	15	15	15	14	10	10	79
14	15	20	10	20	14	10	89
15	15	20	14	14	14	8	85
16	15	20	15	12	14	5	81
17	15	20	15	20	20	10	100
18	15	18	15	18	17	8	91
19	14	20	15	19	19	10	97
20	15	20	10	20	20	10	95
21	15	17	15	16	18	5	86
22	15	15	15	17	20	8	90
23	15	20	15	20	20	10	100
24	15	20	15	20	20	10	100
25	10	20	15	18	16	10	89
26	15	15	15	20	17	10	92
27	15	20	10	14	16	8	83
28	15	20	15	18	19	7	94
29	15	15	15	14	18	7	84
30	15	15	10	20	18	10	88
31	15	20	15	19	19	9	97
32	5	12	10	14	14	0	55
33	10	20	15	16	15	6	82
34	15	20	15	18	15	10	93
35	15	17	15	17	18	8	90
平均	14.1	18.0	13.9	17.5	17.1	7.8	88.5
標準差	2.2	2.7	2.0	2.7	2.8	2.7	10.0

丙高中

題號 座號	一(15)	二(20)	三(15)	四(20)	五(20)	六(10)	總分 (100)
1	15	5	10	10	0	0	40
2	15	10	10	19	14	3	71
3	10	7	15	0	5	0	37
4	15	15	15	16	20	10	91
5	0	0	0	0	0	0	0
6	15	20	15	20	9	10	89
7	15	15	0	0	0	0	30
8	14	10	0	20	14	4	62
9	15	7	15	6	0	0	43
10	15	17	15	0	0	0	47
11	10	5	10	0	9	0	34
12	10	0	10	0	0	0	20
13	15	15	10	10	0	0	50
14	15	5	10	16	14	3	63
15	15	15	10	18	14	10	82
17	15	15	10	0	16	1	57
18	15	5	10	0	0	1	31
19	15	13	10	18	11	8	75
20	14	5	10	4	0	0	33
21	15	0	15	14	0	3	47
22	15	17	15	18	19	10	94
23	15	20	15	18	20	10	98
24	15	10	5	0	0	1	31
25	15	3	15	6	0	1	40
26	10	10	10	7	6	0	43
27	15	5	10	16	6	10	62
28	10	10	10	1	0	10	41
29	15	7	15	0	0	0	37
30	15	13	15	18	20	10	91

31	5	5	10	0	0	0	20
32	0	2	5	20	0	10	37
33	15	7	15	14	0	10	61
34	15	17	15	20	8	10	85
35	10	0	5	15	0	0	30
36	5	0	0	0	0	0	5
37	15	12	0	14	9	1	51
38	15	12	10	6	9	2	54
39	15	12	15	20	9	10	81
40	15	13	0	15	0	0	43
41	15	20	15	20	17	10	97
42	15	10	10	18	8	8	69
平均	13.0	9.5	10.0	10.2	6.3	4.0	53.0
標準差	3.9	5.9	5.1	8.0	7.0	4.4	25.0