

國立中央大學

數學研究所

碩士論文

台灣與英國三角函數課程之教科書比較

指導教授：單維彰

研究生：郜錦程

中華民國九十五年六月



# 國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(93年5月最新修正版)

本授權書所授權之論文全文電子檔，為本人於國立中央大學，撰寫之碩/博士學位論文。(以下請擇一勾選)

- (  )同意 (立即開放)  
(  )同意 (一年後開放)，原因是： \_\_\_\_\_  
(  )同意 (二年後開放)，原因是： \_\_\_\_\_  
(  )不同意，原因是： \_\_\_\_\_

以非專屬、無償授權國立中央大學圖書館與國家圖書館，基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、公開陳列、與發行，或再授權他人以各種方法重製與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名： \_\_\_\_\_ 鄧錦程

論文名稱： 台灣與英國三角函數課程之教科書比較

指導教授姓名： \_\_\_\_\_ 單維彰

系所： \_\_\_\_\_ 數學 \_\_\_\_\_ 所  博士  碩士班

學號： \_\_\_\_\_ 93221016

日期：民國 95 年 6 月 20 日

備註：

1. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
2. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應依著作權法相關規定辦理。

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

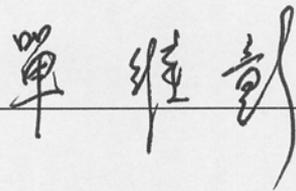
數學 學系/研究所 郜錦程 研究生

所提之論文

台灣與英國三角函數課程之教科書比較

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授



(簽章)

95 年 6 月 5 日

國立中央大學碩士班研究生  
論文口試委員審定書

數學 學系/研究所 郜錦程 研究生  
所提之論文

台灣與英國三角函數課程之教科書比較

經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人

委

員

黃 蕭

袁 媛

單 維 彰

中華民國 95 年 6 月 20 日

## 中文摘要

本論文主要針對我國與英國一到十年級數學教材中三角函數相關主題進行探討。分別摘錄兩國教材中與三角函數相關的數學知識要點與定義敘述，比較兩國鋪陳三角函數相關課題異同並加以評析、詮釋。最後歸納結論與建議，提供我國數學課程在三角函數相關主題編製發展上參考意見。

本文撰寫採用內容分析、文獻分析法與貝瑞岱的比較教育研究法進行兩國教材內容的比較。從比較兩國數學教科書鋪陳三角函數單元的過程中，歸納相關議題與特色，列出值得台灣觀摩與參考學習之項目。冀望這些結論與建議能對發展中的九十八年版高中數學教材在三角函數單元之修訂，做出實質貢獻。

### 關鍵字

數學領域教材比較、數學教科書、三角函數、英國教科書。

# 英文摘要

## Abstract

The purpose of this thesis is mainly on the discussion and comparison between some mathematics subjects about trigonometry for grades 1--10 textbooks of Taiwan and England. We also indicate individual introductions of the main ideas and interpret some topics associate with trigonometric functions. Finally, we give conclusions and suggestions as references to the development of the textbooks in Taiwan.

In the comparison part, we adopted Content Analysis, Document Analysis and George Bereday's Comparative Method. In the process of comparing the relative knowledge about trigonometric functions in the textbooks of these two countries, we got to conclude some important subjects and characteristics. In this end, we made a list of suggestions that would be worthwhile for us to think about. It is our hope that these conclusions and suggestions can make some substantial contributions to the future mathematics textbooks of senior high school in Taiwan, 2009.

keywords:

comparative mathematics education, mathematics textbook, trigonometric function, the textbook of England.

## 致 謝

首先謝謝單老師兩年來的指導，也感謝老師及學長姐們所提供的環境和資源，使研究的過程順利許多。更感謝黃藹老師與詹盛如學長幫忙從英國帶回珍貴的研究資料，同時也對黃老師與袁媛老師的口試指導致上謝意。張佩芬老師與蕭嘉璋老師曾給過的讚美及信任也帶給我在求學過程中許多動力。

兩年來的生活，先謝謝所上所有師長、同學們與行政人員的幫助；中平、志豪與詔智謝謝你們從大學認識以來給過我的協助；感謝梅珊、琇涵、小葵和小白不斷地容忍我情緒不穩帶來的無理取鬧與尷尬；曾經合作研究計畫的婉珣、子倩、雅齡、滢惠、心怡學姊和志遠學長，謝謝你們給過我的鼓勵；在數值方面努力的雅筑學妹，祝妳研究順利，柏成學長也希望你工作順利；帶著我找實習學校的晟鈞，相信有朝一日你一定會成為教育界的佼佼者；美珍姐、孫姐、賴姐與金助教，謝謝各位長期以來在行政方面的支援。

論文研究的後期，謝謝恩冉、志遠與孫姐在精神上的陪伴；宜親、佳玲與鈺芸，謝謝妳們耐心地傾聽和對我的體諒，由衷地希望妳們的學業與研究一直順利。師大的國中同學柏智謝謝你陪我從師大借出參考資料，政大的朋友昱君和豐瑋，謝謝你們給我溫暖的問候，更謝謝昱君的祈福。當然也感激一群關心我的朋友、學弟妹和學長姐，特別是常出沒在M208研究室的各位，可能沒有一一備載，我也由衷感謝。最後感謝家人外公、媽媽、哥哥和學姊，沒有你們的呵護與照顧，相信我在求學道路上會更加困難；天上的外婆和爸爸願與你們共享我經過努力和掙扎後得到的成果，對於未來我也將繼續奮鬥。

# 目錄

<b>第 1 章 緒論</b> .....	<b>1</b>
1.1 研究動機 .....	1
1.2 研究背景 .....	2
1.3 研究目的與問題 .....	3
1.4 研究範圍及限制 .....	4
1.5 名詞釋義 .....	4
<b>第 2 章 文獻探討</b> .....	<b>6</b>
2.1 台灣和英國數學課程設計理念與目的 .....	6
2.2 三角函數的內涵演進與台灣教材目標之轉變 .....	12
2.3 三角函數相關研究 .....	19
2.4 概念構圖理論與應用 .....	24
<b>第 3 章 研究方法與實施期程</b> .....	<b>27</b>
3.1 研究對象 .....	27
3.2 研究方法 .....	28
3.3 研究步驟 .....	33
<b>第 4 章 台灣與英國教材關於三角函數課題之比較與評析</b>	<b>35</b>
4.1 分年並列與比較 .....	35
4.2 依數學主題比較、評析與三角函數相關內容 .....	83
4.3 教材中呈現的概念構圖 .....	92
4.4 教材中存在的潛在課程 .....	97
<b>第 5 章 結論與建議</b> .....	<b>102</b>
<b>參考文獻</b> .....	<b>110</b>

<b>附錄</b> .....	<b>113</b>
附錄一 .....	113
附錄二 .....	118
附錄三 .....	126

## 圖目

圖 2-4-1	數學概念的五種表徵.....	25
圖 4-3-1	FOR GCSE 教材單元間概念構圖.....	92
圖 4-3-2	台灣南一版三角函數教材單元內概構圖.....	93
圖 4-3-3	台灣南一版三角函數教材單元內概念構圖.....	94

## 表目

表 2-1-1	各個階段的學習水平.....	11
表 2-2-1	國中三角函數單元主題演進整理.....	16
表 2-3-1	國內學者實証研究所發現三角函數學習的錯誤概念類型 ..	20
表 4-1-1	一年級教材內容摘要並列表 .....	36
表 4-1-2	二年級教材內容摘要並列表 .....	38
表 4-1-3	三年級教材內容摘要並列表 .....	39
表 4-1-4	四年級教材內容摘要並列表 .....	41
表 4-1-5	五年級教材內容摘要並列表 .....	45
表 4-1-6	六年級教材內容摘要並列表 .....	48
表 4-1-7	七年級教材內容摘要並列表 .....	51
表 4-1-8	八年級教材內容摘要並列表 .....	55
表 4-1-9	九年級教材內容摘要並列表 .....	57
表 4-1-10	十年級教材內容摘要並列表 .....	60

# 第 1 章 緒論

## 1.1 研究動機

我國曾於民國 82、83 年陸續修訂國小、國中數學課程標準，並於 85、86 學年度分別實施國小、國中數學課程，而九年一貫的數學課程則於 90 學年度起分四個學年度逐步實施完成，期間以九年一貫數學科暫時施行綱要作為課程依據。

民國 83 年課程標準將三角函數列入國中選修教材，先行認識三角函數基礎知識，於高中階段加深加廣三角函數的內容。受國中學力基本測驗不考選修教材的影響，這個單元的學習成效可能大幅降低，進而影響了高中的教學 [1]。爾後九年一貫課程，三角函數也未列入數學綱要之中。

九年一貫數學領域正式綱要公佈施行後，我們很清楚地看到三角函數章節完全被刪除，就連數值三角比的單元也完全不在正綱公佈的內容規定中。因此，九年一貫課程實施後，使得升學進入高中、高職就讀的學生比以前具備較少的三角函數相關知識。第一群在暫行綱要下學習而且完全使用九年一貫教材為背景的學生，就是 94 學年度進入後期中等教育的新鮮人。然而值得注意的是在三角函數單元，這群新鮮人所學習的暫行綱要與實質課程內涵，相較於以往高中課程綱要的教材卻是沒有經過顯著剪裁的課程。

綜觀上述整體學制結構與綱要單元內銜接的憂慮，不免令人提出下列問題：1. 對於三角函數之鋪陳，現行高中課程的編排和早期分屬在國中、高中課程的安排，學生學習上整體成效之差別為何？2. 後期中等教育三角函數課程應該如何鋪陳與剪裁較為適切？

為了避免學生無法順利銜接後期中等教育數學課程的問題，進而影響高等及技職教育的人才培育，造成國家整體競爭力下滑等不良影響，政府除了發行《樂在數學參考手冊》因應輿情反應國小學生計算能力日漸低落的呼籲外，陸續也針對中等與後期中等教育的暫行、正式綱要之銜接和施行方面作了許多相關研究，而本論文則鎖定「三角函數」之主題提供教學現場和課程編製作為參考。

## 1.2 研究背景

### 1.2.1 選擇三角函數作為研究主題的原因

依據教育部指導，中正大學執行之「九年一貫數學學習領域-銜接高中課程教材九十四學年度銜接教學說明」[2]。數學科銜接教材是銜接九年一貫暫行綱要課程與高中課程內容落差，主題包括「乘法公式與多項式」、「因式分解」、「平方根與立方根」、「一元二次方程式的解」、「線型函數與二次函數」、「不等式」、「數列與級數」以及「幾何與三角函數」等八個單元。

其中「三角函數」的單元相較於其他需要銜接之單元具有其在課程編寫結構上的顯著改變。以民國 83 年課程標準而言，三角函數列入選修教材，先行認識三角函數基礎知識，於後期中等教育階段對於三角函數的內容更加深入，共有兩階段學習，卻在現行綱要下於高中一階段完成學習此單元。其他需要銜接的課程單元，多僅止於數學運算上的熟練度，少有概念認知上的根本問題。而在現行綱要下三角函數單元的教學情況與民國 83 年課程標準相比，則是期待現在後期中等教育的學生在較短時間內，能夠完成認知心理學中訊息處理論的各階段訊息處理和記憶過程。

### 1.2.2 選用台灣教科書作為研究對象的原則

坊間經教育部審定通過的教科書相當多，有「仁林」、「康軒」、「南一」、「龍騰」和「翰林」等出版社所發行之教科書。唯各家出版社皆有其發行的主要對象，像是「仁林」、「康軒」以國小、國中階段的學生為主，「龍騰」、「翰林」以國、高中階段的學生為主。「部編本」數學領域自 94 學年度起開始逐年供書，版本尚未齊全，95 學年度國小、國中的部分將分別出版到二年級、八年級，預計 99 學年度九個年級都有「部編本」可使用。目前南一版的教科書為市場上少數完整有 12 年從國小到國中且具有代表性的教科書。在同一份綱要下，分析一份結構體系較為完整的 12 年一套之教材，相信較需要考慮其他銜接困難與轉換教材的出版教科書具有更多分析上的價值。

### 1.2.3 選用英國教科書作為台灣教材內容分析與比較依據的原因

1988年英國公佈國定標準課程，此標準課程的涵蓋範圍是從1到11年級的義務教育，包括小學六年與中學五年，其結束時間相當於我國高二。在英國教育政策「權力下放」原則中，隱含著英國國定標準課程的特色，也就是教師於教學上的「彰權益能」，其中一個特徵為，教師在將標準課程中規定的主題妥適教學前提下，於教科書的選擇和教學使用上有著寬廣的空間。而在國定課程標準中每個科目除了經資格暨課程局（QCA: Qualification and Curriculum Authority）負責設計的教學主題，並針對不同主題設計不同層次的能力指標。

上述英國教育政策背景和英國國定標準課程內涵與台灣的政策和現行九年一貫課程綱要中的能力指標相仿，而英國在高年級能力指標顯得較淺。若選擇英國教育現場有代表性的教科書，相信在分析台灣數學科教材之外能有具體的參照對象，對於此論文研究和台灣數學科教材的編製有正面幫助的意義。

## 1.3 研究目的與問題

### 1.3.1 研究目的

認知結構學習論中，Bruner的發現學習論和Ausubel的意義學習論均強調學習新知識時，先備知識的重要性[3]。而Ausubel的認知學習同化論更認為有意義的學習必須「將新概念或新知識的學習建立在舊概念或舊知識的既有基礎之上。」影響有意義學習的主要因素：「概念與概念間的關係」及「學習者的先備知識」[4]。

基於上述研究動機和背景，三角函數的主題雖然沒有納入九年一貫的數學教材中，但在後期中等教育高中部分，三角函數單元仍佔數學科教材頗重的比例。如果，三角函數單元為高中數學課程中的重要內容，那麼在九年一貫數學科課程綱要的前提下，學生所學習的教材是否提供了足以令學生有意義學習三角函數的「先備知識」？因此本研究的目的如下所述：

1. 分析台灣與英國數學課程對於三角函數之先備知識及主題編排。
2. 並列陳述台灣與英國數學教材中，與三角函數課程內容相關之主題類目。進一步詮釋三角函數與相關主題分別在台灣和英國數學教材中的一貫性、銜接性，並期望能對數學課程中三角函數單元的編製作出建議。

### 1.3.2 待答問題

1. 台灣與英國教材中，哪些主題與三角函數單元有關？
2. 在進入三角函數單元前及三角函數單元內，台灣與英國各年級教材在相關主題上的課程設計異同。
3. 評析英國教材有哪些教學活動，可以提供編製三角函數課程參考？
4. 台灣和英國教材中有哪些潛在課程會影響學生學習？

### 1.4 研究範圍及限制

本研究主要目的是陳述、分析並且詮釋台灣、英國的數學教科書中，三角函數相關知識之鋪陳和差異。由於目前台灣、英國數學教科書版本眾多，以研究時間、能力及資料蒐集是否完整之考量，所以，本研究在台灣方面以結構體系較為完整的 12 年一套教材之版本為主研究對象，其他版本為輔研究對象。英國方面為依據英國「國定標準數學課程綱要」所出版之教材，小學（KS1-KS2）部份為 Elmwood Press 出版之「Target Maths」；中學（KS3）部份為劍橋大學於 2003 出版之「SMP INTERACT FOR THE MATHEMATICS FRAMEWORK」（core）；高一（KS4）部分為「SMP INTERACT FOR GCSE MATHEMATICS」，且此為英國廣泛使用的教科書。

### 1.5 名詞釋義

1.5.1 本研究中所提台灣之「課程綱要」、「教科書」名詞，依照九年一貫課程和後期中等教育課程分述如下：

(1) 九年一貫課程國小、國中方面

由於目前 94 學年度高一學生，在九年一貫課程中學習時所使用之課程標準為民國 89 年公佈，90 學年度起施行之九年一貫課程標準暫行綱要。本研究論文據此緣由，所採用之「課程綱要」、「教科書」等名詞在九年一貫國小、國中方面，是指九年一貫課程標準暫行綱要及依照九年一貫暫行綱要審定通過之教科書。

## (2) 後期中等教育高中方面

現行高級中學數學課程標準為教育部於 72 學年度公佈，再於 81 學年度起進行修訂高級中學數學課程標準。教育部於民國 84 年發布，並開放教科書的編撰，這些教科書已於 88 學年度開始採用。教育部於 88 學年度開放全國各高級中學之數學教科書，並且以教育部 84 年 10 月發布的高級中學數學課程標準為基準，由「一綱一本」的單行本到「一綱多本」的多元選擇。由上所述，本研究論文中高中部分所提到之「課程綱要」、「教科書」等相關名詞是依照教育部 84 年 10 月發布的高級中學數學課程標準定義之。

### 1.5.2 本研究中所提英國之「課程綱要」、「教科書」名詞

文中英國之「課程綱要」是指英國的國家課程標準，它是由主管課程、評量與核發證書的資格暨課程局（QCA: Qualification and Curriculum Authority）負責設計。QCA 之下設有數學課程委員會（QCA Mathematics Team），至少在最近幾年看來是一個常設委員會，因為他們每季（term）都會公告一些背景或進度說明，而每年公布一份調查報告。本研究採用的英國數學課程綱要版本是 1999 年由教育部和 QCA 共同出版的《數學課程標準》，本研究論文中簡稱《標準》。而英國「教科書」從小學 KS1 起，都是依照此《標準》編製，民間書商自由發行，提供學校現場使用。

## 第 2 章 文獻探討

本章依據研究目的探討教材中三角函數相關知識內容，並檢視台灣教材在編製三角函數相關知識的一致性和妥適性，針對相關文獻進行研究分析，以下將分四節探討，分別為第一節「台灣和英國數學課程設計理念與目的」：探討兩國數學課程的設計背景，掌握教學目的、目標；第二節「三角函數的內涵演進與台灣教材目標之轉變」：藉由三角函數單元內之章節名稱及目標探討近年來三角函數教材的變遷；第三節「三角函數相關研究」：以相關研究者的經驗、結論和建議，使本研究能更順利進行；第四節「概念構圖理論與應用」，以一種規則，有計畫性的概念構圖，加以連結教材中三角函數相關知識。

### 2.1 台灣和英國數學課程設計理念與目的

課程涵義很廣，黃政傑教授綜合整理各界對於課程的定義為：課程即教材、經驗、目標和計畫四大類，一般認為教科書為教材的一類，是指文字或表編製設計而成之教材。所以在研究分析教科書前，本節針對課程設計理念、台灣與英國之數學教育精神和指導進行探討，使研究分析時更能掌握台灣與英國之教材設計概念與發展方向。

林前部長清江先生曾宣示，國民中小學課程，要培養學生具備「帶著走的基本能力，拋掉背不動的書包與學習繁雜的知識教材」，敘述著現今九年一貫課程的理想和方向。九年一貫課程綱要無論在內容、形式和精神上，與過去的課程標準均有相當大的突破，展現了不同的風貌和特色。

黃政傑教授認為課程設計有四種值得重視的理論取向：第一種取向強調知識體系，以學科為課程設計的核心；第二種強調學生的需要、興趣和能力，稱為學生中心；第三種強調社會取向，分成社會適應和社會重建兩種觀點；第四種強調科技應用，主要強調客觀化和系統化的課程設計程序[5]。

黃光雄、蔡清田兩位教授[5]認為設計課程的意識形態取向有四種，即：純粹主義取向、經驗主義取向、社會行為主義取向和科技主義取向，均強調從學科中轉而以統整、專業、科技為中心之設計理念。

陳伯璋教授[6]認為九年一貫課程綱要的修訂乃反映了下述世紀末的時代精神：反集權、反學科本位及反精英導向，同時認為課程發展有其理論基礎，但

絕非單一理論，尤其是經過知識再分配及權力協調的過程，他從人文主義，後現代主義及知識社會學角度，在分析中強調「學習權」取代「教育權」、「帶好每位學生」、提供每個人適性教育並且不放棄每位學生、對弱勢族群學習機會的提供等，反映人文主義的訴求。又對去中心化、反權威、反體制、非連續性、多元化的時代精神提出「差異策略」、「對抗文本」、「對抗記憶」的後現代主義主張，及強調重「統整性」而輕「聚集性」之課程走向。

### 2.1.1 台灣數學教育精神和指導

台灣自民國九十年實施九年一貫數學課程，九年一貫課程總目標強調的是能力的開拓，是要為國民的終身學習奠下基礎，以因應社會的變遷，這有別於僅是知識的傳授。這不但沒減低數學的重要性，反而能使數學課程顧及技術層面外，更重視與其他領域的連結，更強調解決問題，以及與他人溝通等各種能力的培養，這些能力就是幫學生發展如何學與樂於學的基礎[7]。

九年一貫的數學課程期望學生達成下列目標：

1. 掌握數、量、形的概念與關係。
2. 培養日常所需的數學素養。
3. 發展形成數學問題與解決數學問題的能力。
4. 發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。
5. 培養數學的批判分析能力。
6. 培養欣賞數學的能力。

為了達成這些目標，數學課程的發展應以生活為中心，配合各階段學生的身心與思考型態的發展歷程，提供適合學生能力與興趣的學習方式，據以發展數學學習活動。

### 2.1.2 英國數學教育精神和指導

#### ● 英國國家數學課程的推出背景

英國是數學教育改革最早的國家之一。隨著新數學運動的挫折，英國也對其數學課程作了重大調整。比如曾於 1960 年代在世界廣為傳播的 SMP 數學教材，如今其面貌已為之一新。多種教材目前也正在英國流行，這些教材圖文並茂，趣味性強，各具特色，學校可自行決定使用何種教材。

儘管學生的負擔有所減輕，但是他們在學習中暴露的問題不少，例如：英國的教育長久以來主要由私立機構提供，只有少數而且通常來自中上階層家庭的人，才能進入極為昂貴且篩選極其嚴格的所謂文法學校接受基礎教育，而幾乎也只有這些學校畢業的學生才有機會獲得高等教育。這使廣大教師，家長和教育部門甚為不滿。在大眾的要求下，從 1980 年代起，在英國國內，再次進行數學教育改革。1982 年，以 W.H. Cockcroft 博士為首的英國國家教學委員會發表了題為《 Mathematics Counts 》的報告，這是英國數學教學改革的綱領性文件。以該文件為背景，1988 年，英國實行教育改革法，成立了國家課程委員會，對主要科目提出了改革方案，數學是其中科目之一。1989 年，經議會通過，由英國教育科學大臣和威爾士事務大臣簽署命令，全國實行統一的國家課程。工黨在 1997 年執政以後，以較快的步伐發佈了許多新法案或者政策白皮書，但是改革畢竟不是革命，新政權也承續了許多傳統的作法或建議。例如著名的狄林報告《 Dearing Report 》[E3]是在 1996 年五月受委託展開研究，為期一年而在 1997 年七月完成，從這份厚達 1700 頁的報告可以看到工黨執政後的教改藍圖。

#### ● 製定英國國定數學課程目的與其指導精神

在英國國定數學課程的網頁中，並沒有具體敘述出英國國定數學課程的目的，但根據相關二手資料的文獻，仍有整理一些關於英國國定數學課程目的與其指導精神的紀錄。

香港與亞洲及西方各主要國家地區的數學課程比較報告中指出英國數學課程目的如下[8]：

1. 培養數學學習及應用的積極態度
2. 培養數學應用的能力及信心
3. 培養欣賞數學的本質及過程、解釋現實世界的數學觀念、數學美及數學史
4. 培養口頭或書面交流、閱讀和理解數學的能力
5. 使學生獲得在數學、其他學科及就業時所需的數學知識、技能及態度
6. 培養在數學發展及應用中的模型化、一般化和解釋結果的能力
7. 培養更一般性的學習及思考技能，如決策等
8. 培養適當使用計算器和計算機的能力，包括使用各種軟件套

9. 培養邏輯地辯論及嚴格性的理解能力
10. 使學生獲得解決各種數學問題的策略

依據英國國家課程委員會 1995 編寫出版的國家數學課程指導書中，英國制定國定數學課程目的與指導精神分述如下[9]：

- 國定數學課程目的

1. 提升全國數學水準，使學生能掌握一定的數學知識和技能，不僅能滿足畢業後參加各項工作的需要，而且能適應二十一世紀科學技術發展的要求，使得兒童長成後，在下一世紀充滿競爭意識的成人世界中得以生存和發展。
2. 鼓勵學生有更多機會在實踐中學習數學。
3. 為教師提供數學教學的明確目標，同時為學生提供數學學習的有關標準。
4. 為家長提供其子女學習數學的準確的可評估的訊息，究竟可期望他們的子女知道，理解，和做到什麼，以及他們當前可能達到什麼成就。

- 英國數學課程之指導精神

1. 數學提供感知現實世界的途徑

利用數學，人們可以交流訊息和思想，處理一系列的實際任務及解決現實生活中的問題。

2. 數學是探索新世界的工具

數學能提供探索新的虛構世界的材料和方法，透過對數學內部的探索，新的數學思想得以產生，現行思想得以修改和發展。

3. 數學能提供預見

在處理數學問題以及對數學本身的探索中，數學不僅能給予描述與解釋，而且能提供預見。這就是數學的威力和滲透力，數學在國家課程中的重要地位也在於此。

4. 數學技巧只是達到目的的手段

學習數學的技巧，諸如兩位數加法，計算三角形面積，或解方程式等等，構成學校數學中學生功課的一大部分。它們是重要的，然而，它們僅僅是達到目的的一種手段。在數學教學的過程中，應該讓學生了解學習數學的目的和意義。例如，在購物時如何付錢，在測量中如何分析結果，如何丈量布料以設計服裝，等等，從而讓學生體會到學習數學的重要性。

## 5. 數學是奇妙和欣喜的源泉

除了注意數學在日常生活中的重要意義外，應該使兒童有機會探索與欣賞數學本身的架構。例如，探索數的模式，構造一個三維模型，提出一個假設，或找出一個反例等等。這些活動，是兒童在數學方面得到全面發展的中心環節。數學的重要性在於，它不僅僅是個教學的科目，而且也是奇妙和欣喜的源泉。它能給與學生智力的興奮，而且能提供對數學創造力的監賞。

## 6. 數學的應用過程是生動的

雖然數學含有等級和次序的原素，但是在應用數學時，卻不必事先確定次序。數學是一個由概念和關係組成的完整的網路架構，在應用中，數學成爲一個創造性活動的過程。

## 7. 數學的統一性和多樣性

英國國家數學課程爲學校數學提供了一個公共的框架，學校能據此做出計畫，亦能據個別學生的需要作出適當的伸縮。國家數學課程所確立的教學目標與學習大綱，是教師製定教學計畫的基礎，也是評估學生進步的明確標準。必須認識到，數學本身的寬廣性，以及數學學習的個別性，因此，在數學教學中，應該採取多樣性的風格和柔和性的特點。

### ● 英國數學學習目標結構

英國國家數學課程由教學主題的具體目標內容和描述評定學生能力水準兩部分組成。《標準》將教學主題按照四個知識塊展開，分別是 Ma1：數學之運用 (using and applying mathematics)、Ma2：數與代數 (number and algebra)、Ma3：形體、空間與測量 (shape, space and measures) 及 Ma4：資料處理 (handling data)。其中 Ma1 類似我國能力指標中的連結或解題，屬於能力或意識，而非數學本身，所以在綱要中並沒有分階段詳述其教學內容。描述評定學生能力等級則按照學生在知識和能力方面的發展被劃分爲八個水準 (Level 1—Level 8) 的能力描述。爲了容許學童超出預期能力指標的可能，其實還有一個『特優』等級 (Exceptional Performance)，所以可以視爲一共有九個水準。這九個等級貫穿 11 年國教，不論學生屬於哪個階段，都用這些水準來評量其能力。對於每個水準的學習要求，國家數學課程作了明確規範[10]。

教學主題的具體目標內容和描述評定學生能力水準是國家數學課程的兩條主線，在闡述教學主題時，圍繞著能力水準，按照不同的學段，對每個不同的知識塊提出不同的具體目標內容要求；在教材中所闡述的教學目標，又是根據學生在數學上的不同發展水準分別提出要求，二維坐標架構的形式可以作為英國數學課程架構的一個比喻。

國家數學課程把義務教育年限分為四個關鍵學段，其中學生在每個學段的發展水平如表 2-1-1，表中對於第四學段的學習水準，沒有作出規定，原因除了學生應該至少已具備有通過 GCSE 的水準外，教師教學上也可體現更大的靈活性。

表 2-1-1 各個學段的學習水平

學段	英國年級	年齡	期望學習水準
KS1	1~2	5~7 歲	至少達到水準 2
KS2	3~6	7~11 歲	至少達到水準 4
KS3	7~9	11~14 歲	至少達到水準 5/6
KS4	10~11	14~16 歲	報考 GCSE

### 2.1.3 對本研究的啟示

台灣數學綱要中之分段能力指標，也隱含類似《標準》之精神，其差別是台灣數學綱要中沒有如英國《標準》中定義明確之八個水準 (Level 1—Level 8)，只有敘述性的等級差別。在教育理念上，台灣與英國均分別利用規劃能力指標和學習目標的方式，具體展現兩國數學課程目的，並使學生的學習得以循序漸進，不至於因為難度及深廣度的安排不當而無法跟上，重視培養學生的統整與學習能力，加強學生數學概念之理解與生活經驗的結合。因此本研究試圖以適切的課程理論及教學設計模式，探究依據台灣與英國能力指標和學習目標設計的課程單元，能否提供學生學習三角函數先備知識。

## 2.2 三角函數的內涵演進與台灣教材目標之轉變

### 2.2.1 三角函數內涵之演進

三角學自兩千多年前開始，歷經了相當漫長的路程，但是有三項發展特別顯著，並在基本上改變了整個課題：一個是托勒密的弦長表，使三角學成爲實用的計算科學；另一是棣美弗定理及歐拉的公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ，使三角學與代數及分析學互相融合，再來就是傅立葉理論的發展。

包括三角比以及三角函數的所謂「三角學」，是第二次世界大戰以前，在日本舊制高中及舊制專門學校學習的數學課程，舊制中學及舊制高等女子學校，不教有關內容。戰後即 1945 年之後，連初中也講授  $\sin$ 、 $\cos$  及  $\tan$  等內容 [11]；但由近期研究者洪雅齡《台灣與日本之十二年數學課程比較》研究發現，日本跟台灣一樣，在高中以前的九年完全沒有提到  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 。但日本在高一時只講三角比，也就是只探討比值，只讓學生了解  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$  是直角三角形的斜邊、對邊及鄰邊所造成的比值，讓學生先有這樣的觀念後再導入函數的觀念 [12]。

美國方面，Eli Maor 提到美國「新數學」對幾何學及三角學的傷害最大。理工科課程中最關鍵的三角學，成爲「新數學」這波改革中的犧牲者；形式化的定義及冗長的邏輯推導，打著「嚴謹」的名義，取代了對三角學的實質了解。Eli Maor 指出一些以集合符號及語言佔據了三角學的討論，結果使一些單純的課題，變成了含糊而無意義的形式主義。例如：一般人談論的是角的度量，而不是角的本身；定義正弦和餘弦，是定義成「定義域在  $[-1,1]$  區間的函數」，而不是以幾何學的方式，定義成三角形邊的比率或單位圓在  $x$  軸和  $y$  軸上的投影。而 Edna Kramer 在《現在數學的本質與成長》一書中提到：「有些學生認爲，三角學是加了榮耀之冠的幾何學，再加上計算的苦刑」 [13]。

### 2.2.2 三角函數教材目標之轉變

依據王煥琛、呂秋文所編著之《各國國民（初級）中學數學課程之比較研究》我國在 57 年實施九年國民教育，並於此年修訂國民中學暫行課程標準，可以說這是九年國民義務教育首度實施的課程，在第三學年度的時候學生學習三角函數，其製訂之「銳角的三角函數」單元之單元目標和過程目標如下：

● 單元目標

1. 了解三角函數的恆等關係
  - (1) 倒數關係
  - (2) 平方關係
  - (3) 商數關係
2. 了解恆等式的意義
3. 了解證明恆等式的方法
  - (1) 自一端化至他端
  - (2) 自兩端分別畫成同一式
4. 了解三角形的解法
  - (1) 直角三角形的解法
  - (2) 已知一角之函數值，求此角之其他函數
  - (3) 等腰三角形的解法
  - (4) 正多邊形的解法
  - (5) 圓內接正多邊形的周長與面積
5. 了解三角函數的變化
  - (1) 正弦自 0 至 1，餘弦自 1 至 0 的變化
  - (2) 正切自 0 遞增，餘切遞減至 0 的變化
  - (3) 正割自 1 遞增，餘割遞減至 1 的變化

● 過程目標

1. 基本關係與恆等式

由直角三角形的一角的三角函數值，引導學生尋找出它們的關係，使學生能夠：

- (1) 查出  $\sin$ 、 $\csc$  的關係
- (2) 查出  $\cos$ 、 $\sec$  的關係
- (3) 查出  $\tan$ 、 $\cot$  的關係
- (4) 知道它們倒數關係
- (5) 知道倒數關係，寫出它們的變形
- (6) 查出  $\sin$ 、 $\cos$  的關係
- (7) 知道它們的商數關係

- (8) 查出 $\sin^2$ 與 $\cos^2$ ， $\tan^2$ 與1； $\cot^2$ 與1的關係
- (9) 知道它們的平方關係
- (10) 知道恆等式的意義
- (11) 知道證明恆等式的方法

## 2. 三角形的解法與應用

由已知一銳角，查出銳角的某函數值，引導學生，使學生能夠：

- (1) 純熟查表查出已知角之某函數值
- (2) 純熟由一角的已知函數值，查出角的大小
- (3) 純熟利用畢氏定理，求直角三角形的邊
- (4) 知道我國古代正五邊形的近似作圖法
- (5) 知道等腰三角形及其解法
- (6) 知道直角三角形及其解法
- (7) 知道正多邊形及其解法
- (8) 知道求正多邊形的面積

## 3. 三角函數的變化

由三角函數值表中的各函數值，引導學生看表中的數，使學生能夠：

- (1) 畫出單位圓
- (2) 再畫出正弦對應的線段
- (3) 查出線段變化的情況
- (4) 說出正弦線段變化的範圍
- (5) 畫出正切所對應的線段
- (6) 查出正切線段長的變化情況
- (7) 說出正切線段變化的範圍
- (8) 利用(1)~(7) 相同的方法說出餘弦線段，其變化情況及其變化範圍
- (9) 利用倒數關係，仿上法說出餘割、餘切、正割的變化狀況
- (10) 寫出角 $0^\circ$ 及角 $90^\circ$ 的三角函數值表
- (11) 應用(10)解有關的問題
- (12) 應用三角函數變化關係，解有關問題

八十八學年度為九年一貫課程公佈前，最後一屆國中生在三年級使用編有三角函數選修教材的部編版教科書，主題為「銳角三角函數及其簡易應用」，分為基礎篇和應用篇兩節。其教師手冊建議之教學時數共 12 節課（每節 45 分鐘），且其教學目標如下所述：

### 基礎篇

1. 知道兩直角三角形中，若有一雙銳角對應相等，則他們的「對邊：斜邊」、「鄰邊：斜邊」、「對邊：鄰邊」的比值，也對應相等。
2. 知道任意直角 $\triangle ABC$ （ $\angle C = 90^\circ$ ）之三邊所成「對邊：斜邊」、「鄰邊：斜邊」、「對邊：鄰邊」的比值都是銳角 $A$ （之度數）的函數。
3. 對於任意直角 $\triangle ABC$ （ $\angle C = 90^\circ$ ），能寫出：

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} \dots\dots \text{稱爲 } \angle A \text{ 的正弦函數}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} \dots\dots \text{稱爲 } \angle A \text{ 的餘弦函數}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} \dots\dots \text{稱爲 } \angle A \text{ 的正切函數}$$

這三個函數的定義，並知道它們又通稱爲三角函數。

4. 能求出 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 與 $60^\circ$ 等特別角的正弦、餘弦及正切函數值。
5. 能利用三角函數的定義證明：若 $\angle A$ 爲一銳角，則

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \dots\dots\dots(\text{商數關係})$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \dots\dots\dots(\text{平方關係})$$

6. 能由三角函數的定義得知：若 $\angle A$ 與 $\angle B$ 都是銳角且 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，則

$$\sin A = \cos B ; \cos A = \sin B \dots(\text{餘角關係})$$

7. 若知道一銳角的某個三角函數值，能利用商高定理或三角函數關係式，求出該銳角的其他兩個三角函數值。

## 應用篇

1. 能利用量角器、刻度尺等工具去畫圖與測量的方式，求任意銳角（整數度數）的三角函數近似值。
2. 知道課本所附的三角函數值表內之數值，大多數為近似值。
3. 能根據課本所附的銳角三角函數值表，查出  $1^\circ$ 、 $2^\circ$ 、 $3^\circ$ ， $\dots$ ， $89^\circ$  等整數度數的三角函數值。
4. 能根據課本所附的銳角三角函數值表，由某銳角（整數度數）的一個三角函數值查出此銳角的角度。
5. 知道當銳角的角度變大時， $\sin$ 、 $\tan$  的函數值也變大，而  $\cos$  的函數值卻變小。
6. 能分析實際測量問題的情境，找出已知與未知的條件。
7. 能將某些簡單的測量問題，轉化為三角形邊角的問題，並利用三角函數的概念，求得其解。

### ● 三角函數單元主題之轉變

三角函數課程在過去修訂國中數學綱要的過程中除了上述教材目標有變化之外，在單元主題的規劃上也有所轉變，整理如表 2-2-1：

表 2-2-1 國中三角函數單元主題演進整理

民國七十四年教育部修訂公佈的國民中學數學課程標準內容	民國八十三年教育部修訂公佈的國民中學數學課程標準內容		民國八十九年（公佈暫行綱要前一年）國民中學數學課程部編版公佈內容
單元主題	大幅精簡或刪除	備註	單元主題
第三章 數值三角及其應用		* 只介紹正弦、餘弦函數，特別角的函數值。 * 不列入必修教材中。	第一章 銳角三角函數及其簡易應用
3-1 銳角三角函數			1-1 銳角之正弦、餘弦及正切
3-2 三角函數的基本關係	○		1-2 商數關係、平方關係及餘角關係
3-3 用查表法求三角函數值	○		
3-4 三角函數的應用			

資料來源 台灣南一高中教師手冊

### 2.2.3 三角函數銜接教材

九年一貫課程實施後，原本列入國中數學選修課程的三角函數單元已不存在，但教育部考慮到 94 學年度進入後期中等教育的學生仍使用依據民國 84 年修訂之高中數學課程綱要所制定的數學課程，因此委由國立中正大學數學系針對九年一貫數學學習領域銜接高中課程教材作出銜接教學說明。中正大學數學系研究小組對高一課程三角函數單元建議如下：

1. 只處理正弦，餘弦和正切三個函數的圖形，至於餘切、正割和餘割函數的圖形可列為參考資料。
2. 刪除反三角函數。

三角函數單元銜接的實施方式，無論是中正大學數學系研究小組所提出的建議【方案一】完成銜接教材後再進入高一課程，或【方案二】銜接教材融入正式課程中，都是在 94 學年度下學期每週增加一節課做為銜接補強教學[2]。

銜接教材附錄中列出「集合的概念」、「平面幾何的基本性質」與「三角函數的基本概念」三個單元，來協助同學們順利銜接高中課程的學習。這份教材除了提供給高中做為銜接教學的參考依據之外，研究小組也希望提供給同學們自我學習[2]。

銜接教材建議的附件三以介紹三角函數的基本概念為主要架構，沒有指導性質的教學目標，共以四個範例、三個類題練習和五題家庭作業呈現。這些範例和習題內容其實與九年一貫課程實施前一版的國編版三角函數選修教材內容雷同。例如：

【範例 3】分別求出  $45^\circ$  角的六個三角函數值。

【解】 如右圖，直角三角形三邊長的比例為  $\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

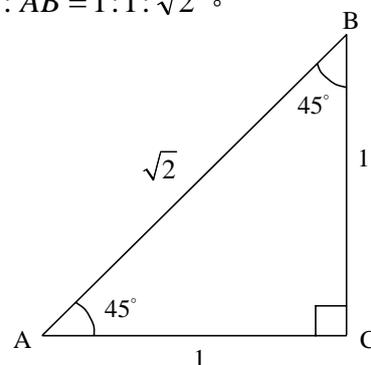
$$\text{所以 } \sin 45^\circ = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{1} = 1 ;$$

$$\cot 45^\circ = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\angle A \text{ 的對邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{1} = 1 ;$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\text{斜邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} ;$$



$$\csc 45^\circ = \frac{\text{斜邊}}{\angle A \text{的對邊}} = \frac{\overline{AB}}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}。$$

【類題練習 2】完成下表：

$\angle A$	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
$30^\circ$						
$60^\circ$						

【範例 3】和【類題練習 2】皆是藉由銳角三角函數之定義求出  $30^\circ$ 、 $45^\circ$  與  $60^\circ$  等特別角的正弦、餘弦及正切函數值，若學生能適當利用三角函數的倒數關係則餘切、正割和餘割函數也容易求出，不過九年一貫課程實施前一版的國編版三角函數選修教材教學目標不強調學生對於餘切、正割和餘割函數的理解。

#### 2.2.4 對於本研究的啟示

三角函數單元無論在課程目標、教學目標和實際的教材內容上，隨著過去國中數學課程綱要幾次修訂或改變，皆不斷精簡或刪除。但根據過去三角函數單元的課程目標、教學目標和實際的教材內容以及三角函數銜接教材，都可歸納出三角函數單元的核心重點，例如六個三角函數值 sine、cosine、tangent、cotangent、secant 和 cosecant 的定義。而這些核心重點知識的建立，都需要其他相關數學單元的鋪陳。像是八十八年部編版三角函數單元的基礎篇中，第一條教學目標：知道兩直角三角形中，若有一雙銳角對應相等，則他們的「對邊：斜邊」、「鄰邊：斜邊」、「對邊：鄰邊」的比值，也對應相等。就需要學生知道「銳角」、「直角三角形」、「比值」和「相似形」的知識。本研究將依據 Eli Maor 對於三角學知識的批判與建議，在分析三角學及其先備知識時，注意台灣和英國在教材內容編製上，是否對於一些單純的課題，以含糊而無意義的形式化過程呈現，並試圖詮釋台灣和英國編製相關教材內容的教學切入點，期望分析結果，對於三角函數單元編製有具體建議。

## 2.3 三角函數相關研究

國內對於三角函數課程已有一些相關的碩士研究論文，主要可分為兩大類，一類是利用測驗、問卷調查或質性訪談的方式，探討或診斷學生學習三角函數錯誤類型的研究；另一類主要是針對三角函數教學方法進行研究，以一些電腦輔助工具，如 GSP 或網路化數學學習教導學生學習或複習三角函數，以下將分兩小節探討其研究成果。

### 2.3.1 三角函數錯誤類型研究

#### ● 三角函數錯誤類型

研究者賴潔芳整理《高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究》後指出學生在三角函數概念學習的錯誤類型分為三類：(一) 定義的理解不清：三角函數與反三角函數的定義混淆、函數與反函數合成的誤用、角度單位換算有問題、三角函數值相等的概念不清楚、函數週期的定義概念不清楚、同界角的認識不清楚、三角函數的平方關係不清楚；(二) 代數性質的誤用：乘法性質的誤用、誤認三角函數具有線性性質、三角函數的奇偶性質錯誤、三角函數的正負不會判斷、三角函數的遞增與遞減不清楚、三角函數的疊合性不清楚。(三) 圖形的認識不清：三角形三邊長性質的誤用、三角函數的圖形與平移認識不清、三角函數圖形的對稱概念不清、三角函數的週期與振幅性質認識不清[14]。

簡志明(2004)在《高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究》中提出，學生在「銳角三角函數」運算的錯誤類型主要為：對定義瞭解不清楚、角度與邊長的對應關係為片斷性的認知、無理數運算過程出錯、解聯立方程式產生錯誤、對恆等式轉換不熟悉而產生誤用、代數觀念薄弱，無法作答、沒有記憶  $30^\circ$  -  $60^\circ$  -  $90^\circ$  三角形的三角函數值以及運算不完整。

學生在「廣義角三角函數」運算的錯誤類型主要為：對同界角、廣義角定義不清楚、角度的範圍無法用不等式表示、各象限角的三角函數值正負判斷錯誤、角度轉換錯誤、三角函數方程式不會分解、象限角的三角函數值為錯誤值、不會查閱三角函數值表及運算不完整。

表 2-3-1 國內學者實証研究所發現三角函數學習的錯誤的概念類型

單元內容	錯誤概念類型
廣義角	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 圖形錯覺，由圖形誤導廣義角度數。</li> <li>2. 誤認一圈等於 180 度，對於一圈 360 度做不當推論。</li> <li>3. 對於旋轉量的認知沒有深刻的體認，難以想像大於 360 度的角度。</li> <li>4. 有向角方向錯誤或忽略始邊、終邊這些本質屬性所賦予廣義角的意義，將角度所涵蓋的象限當成有向角性質符號的判定依據。</li> <li>5. 學生對於同界角的概念非常模糊，傾向以幾何圖形判斷法。</li> <li>6. 角度的單位換算有問題。</li> </ol>
銳角三角函數	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 定義的理解不清楚。</li> <li>2. 三角形三邊長性質的誤用。</li> <li>3. 三角形邊角關係先備知識不足，對於圖形中呈現的直角三角形一律當成所認知的特別角角度的三角形。</li> </ol>
廣義三角函數	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 定義的理解不清楚。</li> <li>2. 各三角函數值範圍錯誤。</li> <li>3. 代數性質的誤用：乘法性質的誤用、誤認三角函數具有線性性質、三角函數的奇偶性質錯誤、三角函數的正負不會判斷。</li> <li>4. 廣義三角函數的求值解題策略偏愛使用代數記憶公式，但不是很符合概念地學習公式，導致不能很正確地用運公式。</li> <li>5. 對於定義操作步驟的程序性知識亦不夠熟稔，求值時，易忽略有向線段的性質符號，或是邊長的比例錯誤。</li> <li>6. 對於同界角三角函數，少從同界角的方向去判斷其值相等。</li> <li>7. 對於廣義三角函數定義的圖解步驟，步驟執行技巧不夠熟練，缺乏完整的程序性知識。</li> <li>8. 對於三角函數的概念性知識不夠完備，自行綜合歸納，作過度的推論類化。</li> </ol>

三角函數的圖形	1. 函數週期的定義概念不清楚。
三角函數的圖形	2. 三角函數的遞增與遞減不清楚。
三角函數的圖形	3. 三角函數的圖形與平移認識、對稱性概念、三角函數的週期與振幅性質認識不清。

(引自 余艷惠)

● 學習三角函數概念的困難處

學生在學習銳角及廣義三角函數的基本概念時的學習困難有下列各項[15]：

1. 預備知識的不足無法貫通
2. 計算過程感覺繁雜，產生困難
3. 對於文字符號不能清楚掌握
4. 銳角擴展至廣義角三角函數時，難以銜接
5. 無法仔細認清題目的各項條件而加以連接
6. 代數觀念沒有落實
7. 在日常生活中，少有實際應用相關題目，以致學習時較為抽象吃力
8. 邏輯推理觀念不足，無法逐步思考

● 學生學習三角函數概念錯誤的之成因

陳忠雄 (2003) 指出學生在三角函數概念學習的錯誤之成因如下：(一) 未能達成「概念的獲得」的錯誤概念原因有：三角函數與反三角函數定義的概念缺乏、三角函數的定義域與值域概念缺乏、反三角函數的定義域與值域概念缺乏、角度的單位換算不清楚、同界角的概念缺乏、函數週期的定義概念缺乏。(二) 未能達成「概念的同化」的錯誤概念原因有：乘法性質的誤用、函數與反函數合成的誤用、三角形三邊長性質的誤用、三角函數遞增與遞減性概念缺乏、三角函數的平方關係的概念缺乏、誤以為三角函數具有線性性質、三角函數的正負判斷錯誤、三角函數的奇偶性概念缺乏、三角函數的疊合性概念缺乏、三角函數圖形與平移概念缺乏、三角函數圖形的對稱性概念缺乏及三角函數的週期與振幅的概念缺乏[16]。

整體而言，研究者賴潔芳 (2003) 歸納，學生在三角函數學習產生錯誤的主要原因為 (一) 思維經驗的負遷移及典型的視覺心像影響；(二) 因概念不清楚未

能獲得新知識或同化後而產生錯誤；(三) 對定義的不了解；(四) 函數圖形的變化性質不了解。

### 2.3.2 三角函數教學方法研究

#### ● 融入數學史於三角函數教材

研究者陳建丞(2002)於《融入數學史教學對高一學生數學學習成效—以「和角公式」單元為例》[16]發現「融入數學史的教學」雖未能比「傳統式教學」更能提升學生數學學習成就，但是卻無負面的影響。「融入數學史的教學」的實驗組學生在數學學習態度呈正向的改變，並且達到顯著；實驗組學生與對照組學生在數學學習態度量表前後測的變異數分析上，也達到顯著差異。研究者從學生繳交的數學史心得報告中發現，學生很喜歡這些數學史資料，它帶給學生相當大的衝擊與感動，不只在對數學的認知，更在學習興趣上和引發動機上有相當大的幫助，但對學習成就較低之同學幫助不大。研究者從學生填寫的融入數學史教學感受量表與問卷中發現：學生對數學史融入教學都十分肯定，有助於學生學習的融會貫通。但在教材的設計不應太多而造成學生學習上的壓力；課程的難度要衡量學生的程度，避免太難而造成學生無力閱讀。研究者並發現，數學史融入教學增加了學生邏輯思考的機會，也讓學生對數學的概念更加清晰。

#### ● 科技輔具融入三角函數的教學

余麗惠(2003)在《高雄市高職學生運用 GSP 軟體學習三角函數成效之研究》[17]發現，學生在三角函數的學習成就上，運用 GSP 軟體學習三角函數的實驗組與沒有運用 GSP 軟體學習三角函數控制組在學習成效上並無顯著差異。低分群學生在三角函數的學習成就上，運用 GSP 軟體學習三角函數的實驗組顯著優於控制組。GSP 輔助學習對於基本概念或抽象概念的建立有顯著的成效，GSP 輔助學習可促進學生對課程的理解並加深對課程的印象，有效提昇學生學習興趣，運用 GSP 軟體學習三角函數的學生對使用 GSP 輔助學習持正向肯定的態度。將高職三角函數課程融入 GSP 軟體來輔助學習，以 GSP 輔助學習引發學習興趣，促進概念的建立與釐清，利用傳統學習訓練數學運算技能的學習方式值得推廣。

- 網路課程複習三角函數單元

此網路課程的教學平台為設在中山大學，網址為 <http://ds.ks12.edu.tw>

研究者吳英孝 (2004) 《網路化數學學習之成效研究-以高中三角函數複習為例》 [18]發現，網路學習確實可以幫助學生作有效學習；而由研究者吳英孝觀察受試者之學習歷程，發現閱讀時間的長短與學習成效有顯著正向相關。由態度問卷發現學生普遍認為網路學習是增進學習效果的；並且認為 Flash 教材中一步一步的學習過程對於改善迷思概念有幫助。使用此網路平台學習的自然組學生學習效果顯著，但社會組不顯著；社會組學生閱讀時間對學習成效有顯著正向相關，但自然組不顯著。

### 2.3.3 對本研究的啟示

學生學習三角函數認知錯誤類型和探討認知錯誤類型的成因之研究論文，皆描述了學生學習三角函數時的困難處。在課程與教學的觀點下，造成學生對於三角函數知識內容產生迷思概念或學習困難的原因，除了教學方法可能不適合之外，教材內容在銜接組織與編製結構上的缺失也是可能影響因素之一。因此本研究將以探討教科書文本的方式，輔以英國教材為參考對象，詮釋鋪陳三角函數相關知識的教材內容、分析輔助學習三角函數之工具，如：電算器或網路之使用及相關教學法，提出可供三角函數單元教材編製之意見。

## 2.4 概念構圖理論與應用

本研究之研究目的為探討三角函數相關課題之主題編排及詮釋三角函數分別在台灣與英國數學課程中的連結。而概念圖是將概念以整合、階層方式表現其間相互關係的工具，將概念間的關係以圖形表示，描繪其知識結構；概念與概念以標籤線連結且概念間有其從屬關係與相互關係[19]。由於概念圖對於本研究可以更具體地圖示呈現出所探討之三角函數相關知識間的連結關係，故本節將從「概念圖相關學理」和「概念圖在課程發展上的應用」兩個方向探討概念圖。

概念繪圖是用來深入於敘述架構之概念意義的圖示設計。概念繪圖法是一種圖示法的敘述技巧，經由概念繪圖法，可獲得一個概念圖。將「概念繪圖」的觀念應用於教學中，無論在課程設的設計、組織及內容方面，概念繪圖的應用是一種強而有力的教學工具。教師可藉由學生繪出的概念圖，了解學生的認知結構，並指出學生的錯誤概念。近年來國內外教育界逐漸採用概念繪圖的評量方式，以了解教師教學效率與學生學習情形[20]。

### 2.4.1 概念圖之相關學理

基於 Ausubel 所提出的同化理論，概念圖使概念間的關係外顯，可當作進一步學習的前導組織，所以有助於促進有意義的學習[21]。在概念圖中所描述的知識是脈絡相依的，不同的概念圖中的相同概念是依照其在圖中相對的上位概念、連結語的差異與個別概念間的安排等而傳達著不同的意義。

概念圖各有其特殊性，他們透過有效命題描繪出某一領域中的關鍵概念，然而也反映出構圖者的經驗與知識，這樣的特徵使概念圖特別有助於舉例說明情境脈絡如何影響知識結構與知識如何應用的方式，如本文之 4.3.3 節。因為概念彼此之間相互連結的網路圖形，得以說明意義與理解整合的本質，而使得知識能夠動態呈現。

學生在學習過程中建立數學概念，除概念構圖可以掌握學習內容間的關係外，在學習主題內教師也可提供適當的數學模型概念圖以輔助學生學習，研究者 Lesh、Post 和 Behr 討論了概念的五種表徵[22]，如圖 2-4-1，分別為「圖

像」、「操作模型」、「書面符號」、「現實生活情境」和「口述語言」，研究者 Lesh、Post 和 Behr 指出這五種表徵間及其內部的轉換可幫助形成新的概念。

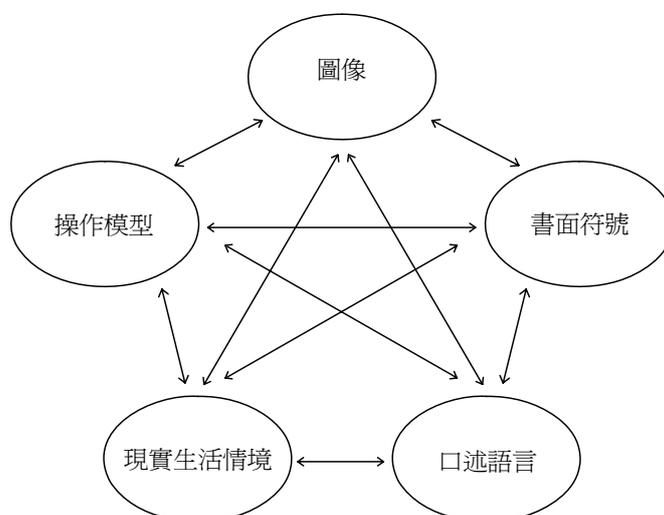


圖 2-4-1 數學概念的五種表徵

#### 2.4.2 概念圖在課程發展上的應用

研究者 Lloyd 認為一本教科書，在設計上應該是提供的概念總數較少，且都能針對每個所提供的概念提出更進一步詳實且精緻的補充說明者，才是一份好教材，因為這些精心設計及補充說明能夠提供更多複雜的概念聯結關係，可促進學習和幫助回憶。在科學和數學教育的課程改革中，已經從背誦公式和強調演算技巧的機械式學習，轉變到強調以學科主題結構為主的學習。因此，課程設計與發展應以學科主題知識為核心，圍繞此核心，進而開發出結構嚴謹精良、概念補充說明詳實精緻，及強調有意義學習的課程知識。

有鑑於此，學者 Posner & Rudnitsky 以及 Novak & Gowin，建議把概念構圖當成是課程發展過程的一部份。他們把課程計劃分成三個待解的問題領域，分別是：目標、理由和方法。目標是指，要學習的是什麼？理由是指，為什麼要學習它？方法：如何學習又該如何改善學習？然後，再根據這些議題，應用概念構圖去嘗試回答或解決它們。而有另一批學者 Starr & Krajcik 等人，則強調「概念圖的修改」在課程發展中的重要性；也就是在任何課程領域中的概念圖發展過程，都是一種動態、互動和具有挑戰性的過程，隨著概念圖不斷地被修改，可以立即引發注意和發展概念間的聯結關係[23]。

### 2.4.3 對於本研究之啟示

對於概念之間的聯結和銜接性，概念構圖提供了一個有架構的思考模式，相信對於本研究 and 教材設計者，會有正面的影響。研究中將探討三角函數相關知識在教科書上呈現的表徵，也期望以一種有系統概念構圖呈現與三角函數知識相關之主題或內容間的關聯性。

### 第 3 章 研究方法與實施期程

本研究主要目的是從台灣、英國的數學教科書中，陳述、比較、分析並且詮釋「三角函數的先備知識」之鋪陳和差異。基於研究主題、特性和研究目的，本研究選用內容分析法、比較教育研究法和文獻探討進行研究。本章內容依序為研究對象、研究方法及研究步驟。

#### 3.1 研究對象

本研究之研究對象為關於「三角函數」概念之教材內容。所選用的教科書分別為台灣和英國的課本，分述如下：

1. 台灣教材研究對象為根據民國 90 年訂定之「九年一貫暫行課程標準」所發行之教科書，以南一版為主，其他出版社的版本做參考用之。
2. 英國教材研究對象為依據英國「國定標準數學課程綱要」所出版之教材，國小（KS1-KS2）部分為 Elmwood Press 出版之「Target Maths」；國中（KS3）部份為劍橋大學於 2003 出版之「SMP INTERACT FOR THE MATHEMATICS FRAMEWORK」（core）；高一（KS4）部分為「SMP INTERACT FOR GCSE MATHEMATICS」，且此為英國廣泛使用的教科書[8]，在本研究論文中，英國小學（KS1、KS2）、中學（KS3）及高中（KS4 for GCSE）之數學教科用書將分別簡稱為「Target Math」、「SMP」及「for GCSE」。

劍橋大學依照《標準》制定的 KS3 SMP 教科書分為三個系列，分別是 T series（最淺），S series（中等）及 C series（最深）。本研究所選用的是 S series [E2]。S series 分為三本，研究中將分別稱為 7S、8S 和 9S，適用的對象分別為一年級，二年級和三年級的英國中學生。

關於 S series 介紹如下：

- 7S 強化並且複習英國國定數學能力指標 level 4 的內容、主要學習 level 5 的內容、先備一些 level 6 的延伸內容。
- 8S 完成並且深化 level 5 的內容、主要學習 level 5 的內容。
- 9S 複習一些 level 5 的內容、完成並且深化 level 6 的內容、先備一些 level 7 的延伸內容 [E3]。

## 3.2 研究方法

### 3.2.1 選用之研究方法

- 內容分析法

本文以後設論述的內容分析法分析教科書文本為主，輔以語意學的方法認識教科書發展背景協助研究。一般教科書評鑑規則可分為四大屬性，就是內容、教學、實體、行政（出版特性）等四屬性[24]。本文將就內容屬性的部分，也就是理論基礎、目標、範圍和順序、主題選擇、知識正確性和時效性、潛在課程等，作出描述、分析和詮釋。其他三個屬性也將視研究中之所需適切論述。針對教科書內容特性進評估，主要仍以三角函數的相關知識對教科書進行特定性的分析。

- 比較教育研究法

本研究採用 George Z. F Beredy 的比較教育研究法。系統性地閱讀我國與英國教科書單元內容的描述，進而針對兩國的數學科三角函數之相關單元進行單元內的解釋，並就三角函數相關知識的連結進行數學課程中單元間分析。本論文依年級將台灣與英國的數學科教科書內容進行並列摘錄，從中針對有關三角函數內容與其先備知識的概念鋪陳，深入探討比較之。

- 文獻探討

本研究蒐集相關之一手或二手資料，尤其在教科書方面，除了所探討研究對象之教材版本，也參考其他版本教材，並依據相關課程與教學理論，以便提出更具體的分析內容和佐證資料。像是 4.3 節及附錄中提出的概念構圖，皆是參考自其他版本之教師手冊，也幫助研究者確立了與三角函數知識相關的數學主題，提供了 1.3.2 節中的第一個待答問題的解答。

### 3.2.2 選用研究方法之探討

由於本研究之對象為教科書，一般研究者皆以內容分析法執行類似的研究，而關於內容分析法的研究相當多，使用內容分析法的研究更比比皆是，故本節將對內容分析法作重點描述，然後摘述研究者挑選之數學教育論文在相關研究法上使用情形。

- 內容分析的意義

傳統上教科書分析最常用內容分析法[25]。內容分析也稱為資訊分析或文獻分析。內容分析是客觀、系統及量化敘述明顯的傳播內容的一種研究方法。在許多領域的研究，常需要透過文獻獲得資料，因此內容分析研究法便有其價值與採用的必要，該研究法與史學家使用的歷史研究法類似，惟後者以探討較遙遠的過去的紀錄為主，而內容分析主要在解釋某特定時間某現象的狀態，或在某段期間內該現象的發展情形[26]。

內容分析在方法上是注重客觀、系統及量化的一種研究方法。在範圍上，不僅分析傳播內容的信息，而且分析整個的傳播過程。在價值上，不只針對傳播內容做敘述性的解說，而且推論傳播內容對於整個傳播過程所發生的影響。

- 內容分析的方法[25]

1. 以「量」為取向的內容分析法

首先必須決定分析的目標或項目，並依據所決定的目標或項目，將資料內容系統化的分類與數量化的統計。量化內容量化時所採用的標準分類，較常用的分析單位有：字、主題、人物、項目、時間與空間等。

2. 以「質」為取向的內容分析法

- (1) 後設論述的方法

後設論述是作者對教科書論述的論述，是作者有意的或無意的介入論述之中，以引導讀者，而不僅告訴讀者某些內容。

後設論述可以使作者向讀者宣布內容最迷人的地方，改變主題，指出重要的理念，注意讀者的存在，表明對一件事情的態度，協助讀者了解教科書的內容，及作者的觀點。後設論述可以協助讀者重組原作者的撰寫計畫，使讀者對教科書的內容、目標、結構、組織、話題、形式等先有一種心理準備，引起對教科書的興趣和注意，進而更了解教科書的基本論述。

後設論述不像以「量」為取向的傳統內容分析法，它不重視內容出現的次數，而是強調構成基本論述的基礎，並探討課程的環境脈絡。後設論述也不僅重視教科書內容本身，即基本論述的分析，而且強調深入探討影響基本論述的因素或基礎，由此了解課程的整體脈絡。

- (2) 語意學的方法

語意學源於 Pierce 的實用主義哲學及 Saussure 的語言分析。語意學方法逐漸受到重視的原因之一為：後設論述從教科書的修詞方面了解內容及其意義，但尚無法深入探討或挖掘深藏於教科書內容中的意識形態。

語意學方法的目的是在建立關於符號的、意義的、或訊息的系統科學。符號有三方面的關係，即對某些人而言，某些事情（有意義者）在某些脈絡中（背景），代表其他的一些事情（對其他事情有意義）。在人類社會生活中，語言及傳統符號佔有重要的地位，但語意學引導我們更注意其他有意義的事，如說話者的服飾，說話者的態度，手勢、說話地點的裝飾等。

語意學在本論文研究中，使研究者更加注意研究對象之背景發展因素。例如，在研究文本方面，台灣與英國的文本都是以我們熟知的語言文字編寫。又如，在課程綱要及教科書發展方面，兩國有各自教育上的改革背景。台灣方面，近十年台灣教改脈絡為當代人共同經歷的經驗，在此不多加贅述。英國方面，英國的教改並非始於工黨政權，而是從 1980 年代後期就開始檢討了。當時他們也做了國際比較，並曾經讚揚台灣的教育體系。其讚揚的理由是台灣中小學幾乎全是公立學校，因此全國國民有一個低廉的、一致的並且公平的受教育機會。工黨在 1997 年執政以後，的確更迅速地提出相關方案，像是文獻探討 2.1.2 所提到的狄林報告 (Dearing Report)。

- 常見質化取向之內容分析類別[27]

- (1) 概念的分析：為了釐清概念，可採取的作法有：描述概念的要義或一般的意義、確認概念的不同意義，或在各種例子中描述概念的適當用法。
- (2) 編纂：文獻的編纂與出版，可按照年代保留下來，對以後的研究有所助益。
- (3) 描述性敘述：針對某事件作描述性敘述，依年代告知其始末的故事。雖然敘述的重點在於描述事件的細節，但事實上，它是故事的延續性與流程的綜合。
- (4) 詮釋性分析：詮釋性分析，乃將某教育事件與該期間內其他事件的關聯性相互結合的做法，該類分析包括同時發生的經濟的、社會的與政治的事件，即對該事件的研究，不採孤立而在較寬闊的脈絡中，進行分析。

(5) 比較分析：即把當時與其他期間教育事件的相似性和差異性，作質的比較分析，此種分析可以標示一製的趨勢、一系列獨特的情境，或開展新方向。

(6) 普遍化的分析：學理的分析或哲學的分析，提供普遍的詮釋。透過學理的或哲學的分析，歷史的例證、過去趨勢的規則，以及事件的順序所提議的命題，皆可用來解釋教育事件的進程。

上述任何一種分析的類別，在教育研究中均有其用途。概念分析具體指出某一概念內蘊含的意義與涵義。文獻編纂為未來的研究保存了不可或缺的文獻。描述性敘述可作為後續的詮釋性分析或比較分析提供間接資料。為了進一步了解差異，詮釋性與比較性分析就顯得重要。如有新的資料出現或有不同的科學概念呈現，既有的詮釋或分析，可能需作修正，普遍化分析也常有修正的情況發生。

- 內容分析在教科書分析上的優勢與限制[27]

1.分析上的優勢：

(1) 內容分析法特別適合於長期間研究的縱貫式分析及比較研究，前者可藉以研究對象的趨勢，後者可以比較哪一套教科書意識形態較濃，或哪一家報紙的社論較保守。

(2) 內容分析的紀錄資料是自然發生的，如提供資料者的日記，便是在自然情況下完成的。

(3) 內容分析的資料極為多元，舉凡正式文件、私人文件、數量統計，甚至照片、錄音(影)帶等，都有分析的價值。

(4) 內容分析比大規模的調查，成本較低，且較省時；因為許多文獻大多集中在圖書館、報館資料室，均易查詢。

(5) 由於有的文獻，如報紙的專欄，都由學有專精之士撰寫，其品質較郵寄問卷的品質為佳。

(6) 內容分析的文獻多早已完成，因此內容分析不致對既有的內容、主題有所影響。

2.分析上的限制：

- (1) 易忽視質的限制：內容分析是依選定的分析單位，加以量化的操作，然後由顯現出的數量差異，探究差異的意義。這種傳統的量化研究或評量，只重視個別變項的操作，忽視了質的部分，其實質的評量才能探討課程核心的部分，故本研究主要以質性取向進行分析。
  - (2) 易有「斷章取義」之弊：內容分析法無論是以字、句、主題、項目、人物為分析單位或類目，都有斷章取義之嫌，由這些資料或得的結論脫離了還境脈絡，忽視了現象所在的整體的社會結構。
  - (3) 忽視潛在課程：教科書只是「顯著課程」的一部分，分析教科書，只就顯現出來的部分加以分析，若不深入探討「潛在課程」的層面，無法了解何以呈現這些教材，而不呈現另一種教材，也就是不能深入了解影響教材選擇的原理、原則及影響因素。若只知其然，不知其所以然，對課程研究的貢獻不大，故本研究分析將探討研究對象中可能存在的潛在課程。
  - (4) 忽視不能說出的語言：教科書中呈現的，尤其是社會科教科書上呈現的，只是能說出的語言中的一小部分而已。以社會科教育而言，社會科教育學者已在有形、無形中以各種方式控制了可能引發爭議的情境，如：選擇比較安全的知識理論，選用價值中立的語言，選擇非反省性的研究主題以及早已被控制的社會交互作用的形式。結果內容分析時，易僅注意到這一小部分用語看來價值中立的「能說出的語言」，而忽略了「不能說出的語言」。
  - (5) 如何挖掘「有意迴避偵測」：內容分析法已常被用於檢討性別、種族等偏見上。宣傳教材或教科書編者為迴避傳統的內容分析的偵測，已知如何將這些偏見隱藏到更深的層次，如「教科書敘述的相互關係結構」裡面。雖然這樣的迴避內容較常出現在社會科學，但事實上自然科學中也會有一些內容，是考慮學生的認知發展而被迴避的，故本研究也期望能看出教材內容中可能迴避了哪些議題。
- 近期數學教材內容分析相關研究  
近年來數學教育以內容分析研究法為研究方法的論文有林秀瑾、張英傑 94 年發表於期刊的《台灣地區三十年來國編版小學幾何教材內容範圍分析研究》[28]，為一種質化取向之內容分析中的比較分析，比較三十年來關於幾何的教材

演變；近期則有國立編譯館補助之研究論文吳麗玲 94 年《國小五、六年級分數教材內容分析比較之研究—以台灣九年一貫康軒版、美國 Mathematics in Context 與新加坡 My Pals are Here! Maths 為例》[29]，以一個主題作為內容分析，但因為研究目的的不同，本研究較著重於檢視教材的銜接性，所以採納的研究建議有限；以探討數學科內容分析方法的論文有吳明穎 91 年《國小數學教科書內容分析之研究》[30]，但其內容為內容分析國小數學教材的方法為主，故研究的參考價值在於此研究方法所建議的內容分析模型，但因為本研究還需探討國中與高中的教材範圍較廣較大，所以採用的研究建議也不多。

- 關於本研究內容分析的效度和信度

本研究重視內容分析的表面效度，所選定的研究對象和探討之文獻都是已經發行或發表之教材與研究論文，且研究對象更是鎖定同一時期所發行的台灣和英國教材，相信以蒐集到的資料和研究對象為基礎所做的推論知適當性、意義和有用的程度都可表現出研究效度，而這也是相關研究者提出質的研究效度之意義[31]。

信度方面，本研究著重工具信度，內容分析的主要類目也就是與三角函數相關之數學主題之訂定，除了依據指導教授的判斷以及研究者根據 2.2 節教學目標的分析，也將時間範圍內的相關文獻加以比較所決定之，以確保所分析之數學主題具有研究上的工具信度[32]，而相關文獻是指部編版國中教師手冊（民國 83 年修正之數學課程標準）、南一版中學教師手冊（國中依據九年一貫暫行綱要，高中依據民國 84 年修正之數學課程標準）和康熙版高中教師手冊所提供之本章架構圖。分析主題是將與三角函數有所連結之數學相關主題歸納而成，並於第四章加以比較、分析這些主題，而文獻提供之架構圖如附錄所呈現。

### 3.3 研究步驟

本研究針對國內數學領域教科書進行深入而有系統的探討與分析。研究挑選數學領域三角函數的課題，探討後期中等教育教導三角函數課程前，分析教科書在國小與國中階段對於與三角函數相關數學主題的編寫安排，了解教材的銜接性和一貫性。研究的實施步驟如下所述：

### 1. 準備階段前期

- (1) 於 93 學年度下學期參與中小學數學科課程綱要評估與發展研究，研究過程中了解英國、新加坡、韓國、日本、大陸與台灣的學制和課程標準等相關背景知識。
- (2) 蒐集資料並研讀之，所研讀之文獻有《各界人士對數學課程觀感的分析》、《亞洲及西方各主要國家及地區的數學課程比較研究》、《數學課程全面檢討報告》（梁貫成、林智中、莫雅慈、黃家鳴）等等。

### 2. 準備階段後期

- (1) 94 學年度起，依照台灣目前後期中等教育數學課程中所遇之瓶頸，研討研究方向進而研究形成問題，過程中不斷修正並將研究範圍縮小並確立研究核心。
- (2) 根據研究問題蒐集所需之研究資料，其中包括台灣、英國之教科書等教材。
- (3) 了解研究所需之研究方法進行文獻探討，並持續蒐集研讀研究中所可能使用之文獻資料以供研究階段繼續做分析工作。

### 3. 研究階段

- (1) 決定研究主類目，除了依據指導教授以及研究者的判斷，也依據文獻探討 2.2 節及教師手冊所提供之架構圖附錄一和附錄三，將與三角函數有所連結之數學相關主題歸納而成；以這些歸納的主題尋找研究對象中的相關單元，藉由其教師手冊提供的架構圖，如附錄二，掌握綱要中規定學生所需的基本能力，以取得研究主題及其工具信度。
- (2) 研讀教科書，依據主類目也就是分析主題製作台灣與英國三角函數相關知識之並列表格。英國原文部分之並列表放在  
<http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/mathedu/gaojc>
- (3) 加以分析比較與三角函數相關之數學主題。
- (4) 挖掘並分析可能存在之潛在課程，提供課程設計者意見。

## 第 4 章 台灣與英國教材關於三角函數課題之比較與評析

本章一共分為四小節，第一節以分年級的方式，並列、描述、比較與分析台灣和英國教材中與三角函數相關之內容。第二節參考陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛教授們在（2005）《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》之數學主題分類方式：數與量、代數（含關係、樣式、函數）及圖形與幾何，將鋪陳三角函數學習內容主題歸納後再更深入的比較與評析。第三節為英國教材 for GCSE 和台灣高中南一版教師手冊，所提供的關於三角函數單元之概念構圖；第四節以相關學理探討教材中可能影響學生學習之潛在課程。

### 4.1 分年並列與比較

#### 4.1.1 台灣和英國教材一到十年級關於三角函數課題之內容概述

台灣教材，從一年級認識形狀開始，讓學生辨識圖形；二年級則沒有關於幾何的教材內容；三年級的學生要能夠辨認三角形的邊與角，並有水平和鉛垂概念的單元；四年級加深並複習三年級的教材；五年級學生開始認識圓周率，並會以數單位格子面積的方式計算圖形面積；六年級學生開始認識比和比率，教材加深關於圓周率的知識以便學生能夠在將來計算圓的周長和面積；七年級的學生要會使用三角形的面積公式，對於三角形邊角關係的性質也要有所認知；八年級的教材編有直角坐標和畢氏定理的主題；九年級的教材加深學生對於圖形幾何性質的認識；十年級學生在上學期完成函數內容後，於下學期進入三角函數單元。

英國 KS1 的教材中學生要能夠辨識二維和三維的幾何圖形；KS2 教材螺旋式的呈現位置和方位、角、二維圖形；從四年級的教材起，開始探討圖形面積，水平和垂直概念；KS3 學段七年級的教材延續著大部分 KS2 已有的教材內容，但題目數量增加許多，並在教材尾聲介紹函數與圖形；八年級的教材正式介紹比和比例尺、平方和平方根；九年級的教材第一次介紹圓周率；十年級教材出現了畢氏定理和三角函數。

#### 4.1.2 以年級作區分，並列、分析、比較和描述教材內容

表 4-1-1 一年級教材內容摘要並列表

台 灣	英 國
<b>認識形狀 (3-1 P.27) <sup>註1</sup></b> 圖形歸類。 <b>分類圖形 (2-1 P.15)</b> 在紙上描繪三角形。	<b>認識 2-D圖形 (P.62) <sup>註2</sup></b> 圖形分類並著色。

- 描述

台灣在一年級上學期教科書中，請學生把形狀很像的圖形放在一起。並以文字分別在教材分類的圖形中標示出「這些叫作三角形」、「這些叫作正方形」、「這些叫作圓形」、「這些叫作長方形」。

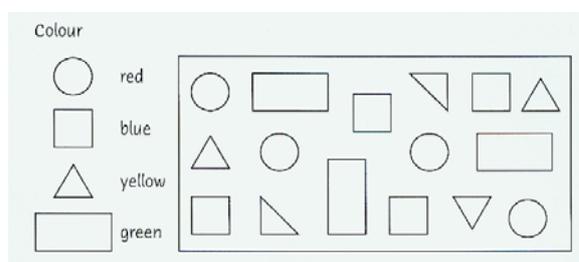
在一年級下學期教科書中，請學生繪出三角形或利用竹籤排出三角形。

英國沒有教科書，以習題樣卷為分析對象，Target Maths Year1 習題卷為認識 2-D 圖形，教材中先請學生做圖形分類的動作。在一堆黑白的圖形中，圓形塗上紅色、正方形塗上藍色及三角形塗上黃色。

- 比較

#### 分類圖形

台灣方面在分類圖形中，沒有出現一看就很特別的三角形，如：正三角形、等腰三角形及直角三角形等，幾乎都是以不等邊的三角形呈現；但英國在圖形分類上的三角形則出現了正三角形及等腰直角三角形，而英國沒有對這些三角形作出名稱上的說明。

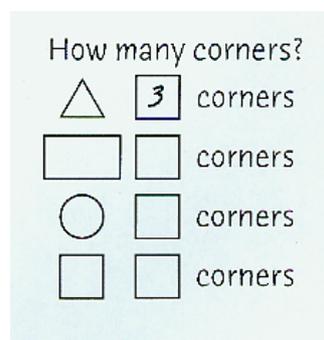


(Target Maths Year1 習題卷 (P.62))

註 1 (3-1 P.27) 代表摘入南一版教材的章節為第三章第 1 節，且出現在教科書的第 27 頁，各年級的重點摘要表依此類推。

註 2 (P.62) 代表摘入的要點出現在英國教材的第 62 頁，以下各年級依此類推。

值得注意的是，英國在分類圖形後的教學，請學生回答圖形中共有幾個三角形，三角形有幾個邊，三角形有幾個角（corners）。更特別的是，也問了學生圓形有幾個角（corners）。



(Target Maths Year1 習題卷 (P.62))

- 分析

1. 台灣在圖形分類的過程中，學生容易受到圖片中原本的颜色干擾，譬如：正方形、長方形及三角形，圖片中其實都塗上綠色，但這也更能讓學生釐清圖形颜色跟圖形形狀無關。

2. 英國教材則需要學生準備四種颜色的色筆，處理塗颜色的問題，學生可能以相同颜色計算各圖形的個數，而不是以認識圖形形狀本身去計數。

三角形塗上黃色，但其實圖片的指引說明是正三角形的那個形塗上黃色，可是需要分類的圖片中卻有出現等腰直角三角形，如果遇到要求精準的學生，可能會產生疑惑，如果遇到色盲的學生在著色上可能會對使用色筆產生問題。

整體而言，台灣和英國皆以圖形分類的方式，讓學生開始認識圖形，以定義名稱的方式介紹圖形名稱。台灣和英國的教材設計，皆以依據圖形的外表輪廓來讓學生分辨圖形。此時學生能辨認三角形或正方形，但其辨認只依照整個形狀，不會分析圖形的性質，並不知道正方形是四個邊等長且四個角都是直角的性質。

- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

認識圖形，學生知道三角形這個平面圖形，為一個三角函數在幾何認知上的起步。

表 4-1-2 二年級教材內容摘要並列表

台 灣	英 國
	認識 2-D 圖形 (P.94) 圖形分類並著色。

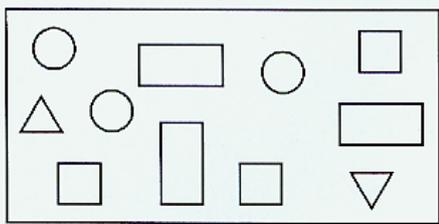
- 描述

台灣沒有與三角函數直接有關的教材內容

英國則在 Target Maths Year2 習題卷為認識 2-D 圖形，教材設計中，依然延襲 Target Maths Year1 利用請學生著色分類圖形，但對於圖形分類設計上顯得更為嚴謹，也就是沒有發生圖片的指引說明是正三角形的那個形塗上黃色，分類的圖片中卻有出現等腰直角三角形的情況。

Colour the shapes.

○ red   □ yellow   △ blue   ▭ green



Finish the table.

Shape	Number of sides	Number of corners
Square		4
Triangle		
Rectangle		

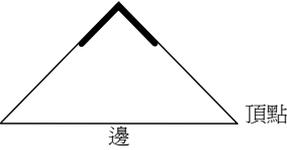
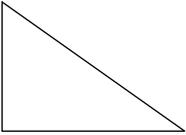
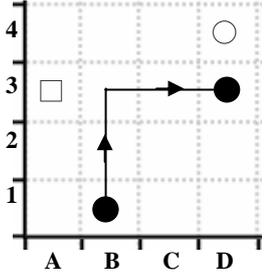
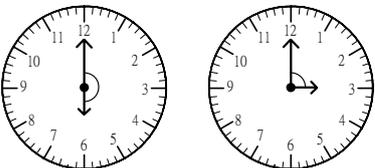
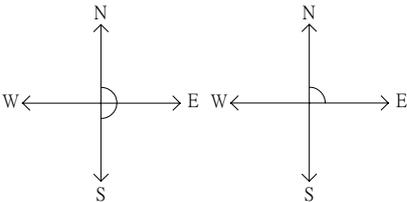
Target Maths Year2 習題卷 (P.94)

另外英國開始請學生利用著色方式，分類直角三角形和其他三角形、分類半圓形和其他不同弧度的圓形。但在教材文本中，並沒有出現定義什麼是直角三角形和半圓形的敘述。

- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

認識圖形，學生知道三角形這個平面圖形，為一個三角函數在幾何認知上的起步。

表 4-1-3 三年級教材內容摘要並列表

台 灣	英 國
<p><b>認識三角形的邊、角和頂點 (4-1)</b></p> <p>角：轉角的地方</p>  <p><b>察覺平面圖形物件的角 (4-2)</b> 例：指出圖形的角在哪裡？</p>  <p><b>水平和鉛垂 (7-2)</b> 認識水平面和水平直線 1 利用水在瓶中的靜止畫面，觀察水面是不是平平的。並敘述水平面平平的直線，叫作水平直線。 2 利用懸吊重物的畫面，敘述由上到下直直的線叫作鉛垂直線。</p> <p><b>認識角 (6-1)</b> 比較角的大小時，把 2 角疊合，頂點對齊頂端，以小角落入大角之內或 2 角的 1 個邊長相對齊，看另 1 邊長的落點來判斷大小角。</p> <p><b>認識直角 (6-2)</b> 鉛垂直線和水平直線所形成的角，叫做「直角」。 比直角大的角叫「鈍角」；比直角小的角叫「銳角」。</p> <p><b>認識量角器 (6-3)</b> 用「量角器」可以量出角的大小。 直角是 90 度。</p>	<p><b>認識 2 維圖形 (P.80)</b> 三角形：具有三條邊的二維圖形。</p> <p><b>位置和方位 (P.88)</b> 找出在格子點上的位置並使用東、南、西、北表示方位。</p>  <p>在格子點上的位置是由坐標決定的。 橫坐標總是第一個寫出。</p> <p><b>角 (P.90)</b> 了解半圈、<math>\frac{1}{4}</math> 圈的旋轉。</p>  

- 描述

台灣在三年級，開始以形狀的方式定義三角形的角，比較角的大小，並且認識直角，學生能夠使用量角器測量一個角的度數。

英國在三年級，認識二維圖形的單元定義三角形為具有三條邊的圖形，並以矩陣和坐標的方式，教導學生如何說明一個點或圖在方陣和坐標中的位置。英國也在三年級的時候開始介紹角。

- 比較

1. 角

台灣和英國都在三年級的時候介紹角，但介紹角的方式不相同，台灣以形狀的方式指出平面圖形上的角；而英國以時針分針的夾角及指南針的北方和南方、北方和東方的夾角，敘述指針的旋轉用來表示角的旋轉量，並說明指針旋轉 $\frac{1}{2}$ 圈後為一直線，旋轉 $\frac{1}{4}$ 圈為直角。

2. 直角

台灣在第五冊的國小教材中教導鉛垂線和水平線的前置教材，在第六冊介紹角後，引出「鉛垂直線」和「水平直線」的交角為直角，但是英國此階段的學生，教材中並沒有提到關於「鉛垂直線」和「水平直線」的知識，英國教材是利用時針和分針的夾角，北方和東方的夾角，說明時鐘和羅盤的 $\frac{1}{4}$ 圈為直角。

3. 比較角的大小

台灣和英國皆在三年級比較角的大小，台灣是以課本介紹的程序性方式，讓學生操作後比較任意兩角的大小，英國則是請學生判斷圖形中的角比直角大或是小。但是台灣在三年級第六冊教材的第六單元介紹量角器的使用，讓學生處理關於測量角度的問題。

4. 位置和方位

台灣國小一年級下學期的教材中，以左手邊和右手邊介紹位置和方位，但是到三年級時，還沒有如同英國以坐標的形式教導學生關於位置和方位的概念。

- 分析

1. 認識角

台灣以形狀的概念介紹角，英國以旋轉量的方式介紹角，但若問「圓」有幾個角問題，都會令學生發生認知衝突。特別是英國在 Target Maths Year1 習題卷上，已經問到學生圓有幾個角（corner），台灣教材中則一直迴避這個不適合學生回答的問題。

英國以旋轉量來介紹角的方式，學生雖能與生活中看時鐘的畫面做結合，但英國在舉例和練習其實都是以整點的時刻，來引導學生了解特殊角（ $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 、 $360^\circ$ ）的概念，嚴格來說，這不算是很真實的生活情境，因為學生不會隨時看到有時針、分針出現在整點時刻的時鐘，學生需要想像一些畫面來處理關於旋轉量定義角的概念。

- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

台灣與英國在三年級的教材中皆出現了直角的概念，一般介紹三角函數的三角比就是從直角三角形中開始定義，所以必須先認識什麼是直角。台灣方面，介紹了角的概念與使用量角器測量角，英國也介紹了角的概念，而這是介紹直角的前置經驗。位置和方位的單元雖然不直接與教導三角函數有關，但卻是三角測量中可能用到一個知識層面上的屬性也和極坐標直接相關。

表 4-1-4 四年級教材內容摘要並列表

台 灣	英 國
<p><b>辨識直角和平行線 (3-3)</b></p>  <p><b>複習邊、角和頂點 (3-4)</b> 兩條直線相交所成的形狀叫做角。</p> <p><b>分類、命名和比較異同 (3-5)</b> 有兩個邊等長的三角形，是等腰三角形；三邊都等長的三角形是正三角形。</p>	<p><b>面積和周長 (P.82)</b> 面積的單位通常是平方公尺（<math>m^2</math>）或平方公分（<math>cm^2</math>）</p> <p>周長是繞著圖形邊長的長度。 周長的單位通常是公尺或公分。 了解面積和周長的分別</p> <p>長度測量的單位為公尺或公分 了解一個域的面積和周長的差別 周長是圍籬 面積是那個域本身</p>

### 張開角的認識和大小比較 (3-6)



### 旋轉角的認識和大小比較 (3-7)

角的大小不會隨著位置、方向的改變而改變。

### 認識量角器和度的意義 (3-8)

量角器每 1 小刻度形成的角是 1 度，可記做 $1^\circ$ 。

### 使用量角器做角 (3-9)

例：用量角器分別畫出 60 度和 140 度的角。

### 使用量角器量角度 (3-10)

例：拿出 1 個三角板，先在角上做記號，再量量看，3 個角各是幾度？

### 長度和方位 (2-1)

以教材中，學校在市區位置的繪圖，教導學生東、南、西、北的方位。

6cm



面積 = 長 $\times$ 寬

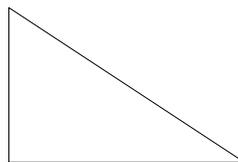
$$= 6 \times 4 \text{ 平方公分} = 24 \text{ 平方公分}$$

周長 =  $2 \times (\text{長} + \text{寬})$

$$= 2 \times (6 + 4) \text{ 公分}$$

$$= 20 \text{ 公分}$$

測量面積和周長



### 二維圖形 (P.92)

有三個邊的稱為三角形

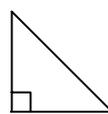
介紹等邊和等角在圖形上的記號。

並圖示三種三角形

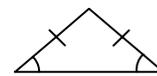
直角三角形

等腰三角形

正三角形



直角三角形



等腰三角形



正三角形

### 坐標 (P.102)

學習在坐標上找到方格點的位置

### 直線 (P.104)

地平線是遠方天與地的交界處

水平線是延著地平線的

垂直線為垂直水平線的直線

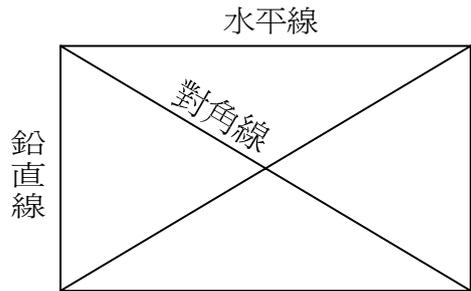
對角線是從一角到另一角直線

例如：

水平線—旗子的上方和下方的邊

垂直線—旗子的側邊

對角線—橫跨旗子

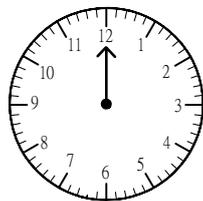


**角 (P.108)**

角是旋轉和轉彎的多少的量度。  
介紹度的記號 ( $^{\circ}$ )。

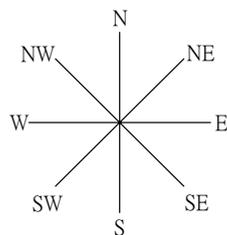
- 旋轉一圈為  $360^{\circ}$
- 旋轉半圈為  $180^{\circ}$
- 直角為  $90^{\circ}$

利用時鐘的分針旋轉說明：  
分針旋轉一圈  $360^{\circ}$  為一小時  
分針旋轉半圈為  $180^{\circ}$  為 30 分鐘  
分針旋轉直角為  $90^{\circ}$  為 15 分鐘



使用指南針羅盤說明  
順時方向旋轉

- 由北方旋轉到南方為  $180^{\circ}$
- 由北方旋轉到東方為  $90^{\circ}$
- 由北方旋轉到東北方為  $45^{\circ}$



順時鐘方向旋轉與逆時鐘方向旋轉

- 描述

台灣在四年級時，介紹平行線和辨識直角，學生開始認識直角的記號，教材中用角的旋轉量之觀點，說明角的概念。學生除了要能用量角器測量角度外，也要能利用量角器畫出老師指定角度的角。第八冊的教材中，學生要能夠回答關於東、南、西、北的方位問題。

英國在四年級時，教材中出現了直角三角形、等腰三角形及正三角形的圖示。學生認識等邊、等角及直角的記號；教材開始試圖說明水平和垂直的概念，並以長方形的旗子引導學生了解水平線和垂直線。在角及坐標的單元內，並沒有出現較英國三年級教材中更深的知識，但加廣了一些習作內容。而英國在四年級的教材中，在例題中學生能夠計算長方形的面積和周長，在練習的題目中也要求學生測量三角形的周長和計算三角形的面積，需要被測量和計算的三角形有兩個，教材中圖示一為直角三角形，另一為正三角形，但都沒有出現引導計算的文字解說。

- 比較

1. 三角形的圖示和說明

英國以明確的三角形圖示及記號介紹了直角三角形、等腰三角形及正三角形，但沒有明確的定義；台灣教材中則以較明確的定義敘述，說明了等腰三角形和正三角形。

2. 水平和垂直

英國在四年級的教材中開始說明水平和垂直的概念，而台灣在國小三年級的教材中就已經開始闡述水平線和垂直線。

- 分析

### 水平和垂直

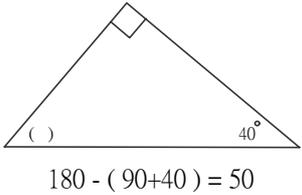
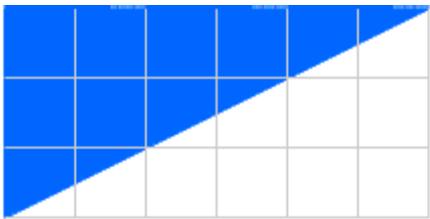
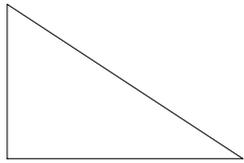
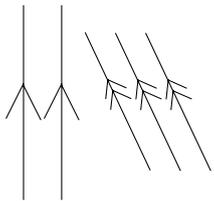
英國教材中的水平和垂直的概念，是概念性的敘述，例如：「地平線是遠方天與地的交界處」、「水平線是延著地平線的」及「垂直線為垂直水平線的直線」，都是需要學生想像的語句。

台灣三年級教材中關於水平和垂直的概念則以程序性的方式，讓學生經由操作和觀察，讓學生了解水平和垂直。

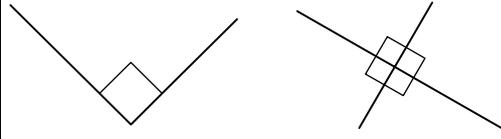
- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

台灣方面延續三年級教材介紹直角，這與定義在直角三角形上的三角函數有關；位置和方位的單元，雖然不直接與教導三角函數有關，但卻是三角測量中可能用到一個知識層面上的屬性。英國開始介紹周長和面積的測量，進而要求學生能夠計算直角三角形和正三角形的周長和面積，都是在三角函數單元中利用面積導出相關定理或性質的必要的知識。

表 4-1-5 五年級教材內容摘要並列表

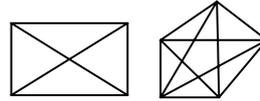
台 灣	英 國
<p><b>垂直、平行和四邊形 (9-3)</b>            兩條直線相交所成的角是直角時，可以說兩條直線互相垂直。            互相平行的線，和同一條直線垂直，把平行線延長，永遠不會相交。</p> <p><b>三角形內的角度 (9-3)</b>            三角形內的角合起來叫做「內角和」，共180度。</p>  <p><b>認識圓周率 (11-1)</b>            每一個圓的周長大約是直徑的 3.14 倍，我們把這個「3.14」，叫做「圓周率」。</p> <p><b>圖形的面積 (5-1)</b></p>  <p>先利用平行四邊形在方格上計算平行四邊形的面積，三角形的面積為平行四邊形面積的一半。</p>	<p><b>面積和周長 (P.84)</b>            面積的單位通常是平方公尺 (<math>m^2</math>) 或平方公分 (<math>cm^2</math>)            周長是繞著圖形邊長的長度。            周長的單位通常是公尺或公分。            了解面積和周長的分別            長度測量的單位為公尺或公分            了解一個域的面積和周長的差別            周長是圍籬            面積是那個域本身            測量面積和周長</p>  <p><b>坐標 (P.92)</b>            一個在格子點上的位置是由 x 和 y 座標決定的。</p> <p><b>線 (P.94)</b>            了解平行線和垂直線。            平行線間的距離相等。            鐵軌是平行線。</p> 

垂直線與另一直線的交角為直角。



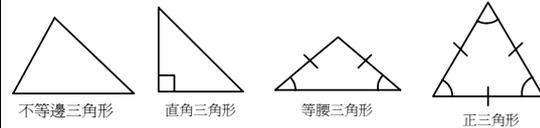
對角線

對角線是從一角的頂點到對角的頂點。



### 二維圖形 (P.96)

與國小四年級同一個單元主題相比較多了不等邊三角形的介紹



不等邊三角形

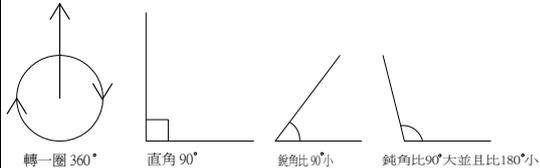
直角三角形

等腰三角形

正三角形

### 角 ( P.107 )

以夾角圖示直角 $90^\circ$ 、小於 $90^\circ$ 角的銳角、大於 $90^\circ$ 角並且小於 $180^\circ$ 的鈍角



### 使用量角器 (P.107)

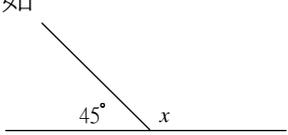
大部分的量角器有兩種度刻度方式，順時方向的刻度稱為外刻度，逆時方向的刻度稱為內刻度。使用正確的刻度測量角度是重要的。

使用量角器常犯的錯誤類型

1. 使用錯的刻度
2. 因為錯誤的方向而讀錯刻度

介紹角的記號

(  $\hat{\quad}$  )，例如  $A\hat{O}E$

	<p><b>在直線上的未知角 (P.113)</b></p> <p>例如</p>  <p><math>x^\circ + 45^\circ = 180^\circ</math>  <math>x^\circ = 135^\circ</math></p>
--	--

- 描述

台灣五年級的教材繼續教導學生垂直和平行的概念，對於三角形的內角和為  $180^\circ$  做出說明，在圓周和直徑的單元學生由教材認識圓周率大約為 3.14

(圓周長 ÷ 直徑)。在第十冊的教材中，台灣開始介紹如何計算三角形面積。

英國五年級的教材在面積和周長、坐標、線、二維圖形和角的單元內容都與四年級的教材相仿；與以往教材內容不同的兩個單元分別是使用量角器和求直線上的未知角，在使用量角器的單元中正式出現了代表一個「角」的記號為  $(^\wedge)$ 。

- 比較

1. 垂直和平行

台灣和英國在五年級的教材都有設計關於垂直和平行的單元，這個單元中，台灣配合四邊形分類的活動，定義了菱形（4 個邊都等長的四邊形）、梯形（只有 1 雙對邊互相平行的四邊形）和平行四邊形（2 雙對邊互相平行的四邊形）。英國則更明確的圖示平行線和互相垂直的直線，但在「線」這個單元中相較於平行線和垂直線的討論，對角線的討論明顯多了更多，而且針對幾個正方形的對角線性質有明確的敘述，教材中也設計了幾個觀察凸多邊形對角線的活動。

2. 未知角度的計算

英國在五年級的教材中已經出現了未知角度的代數計算，利用未知數形式的代數，列出一條式子，計算直線上的未知角度。台灣方面在三角形內角和為  $180^\circ$  的教材中，也有類似英國教材的計算，但沒有明確使用未知數的代數形式，只利用  $180^\circ$  減去三角形中另外兩個已知角的角度，求出另一個未知角的角度。

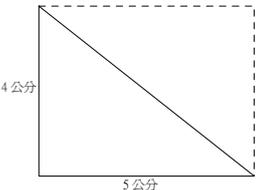
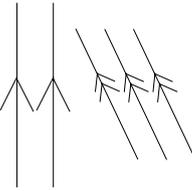
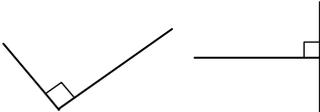
- 分析

英國教材在指導學生使用量角器作為測量角度的工具比台灣進度稍晚，但台灣和英國都在教導學生使用量角器後，分別示例學生利用計算的方式，不用量角器實際測量，計算直線上和三角形內未知角的角度。

- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

形體、垂直和平行的圖像概念與三角函數測量有關外，台灣和英國的教材都在五年級介紹如何求出未知角的角度，找出未知角為學生轉換正、餘弦三角函數—求出餘角的前置經驗，尤其台灣教材中第一個處理的未知角度是以直角三角形例示。

表 4-1-6 六年級教材內容摘要並列表

台 灣	英 國
<p><b>三角形的面積 (#11 5.2)</b>            三角形的面積 = 底 × 高 ÷ 2。</p> <p><b>比的意義 (#11 12.1)</b>            例題：            5 個好兒童章對 1 張獎勵卡，一般人通常會說兒童章對獎勵卡的比是「5 比 1」，記成「5 : 1」。像這樣的表示方法，我們叫做「比」。</p> <p><b>比值 (#11 12.2)</b>            例題：            拉動滑輪組的長度是物品上升高度的 2 倍。這個 2 是「2 : 1」、「4 : 2」、「6 : 3」的比值，也就是比的前項除以後項所得的結果。</p> <p><b>最簡單整數比 (#11 12.3)</b>            例題：            像「1 : 5」這個比，除了 1 以外沒有其他的公因數，我們叫做「最簡單整數比」。</p> <p><b>圓周率 (#12 8.1)</b>            每一個圓的圓周長與直徑之比值約為 3.14，我們把這個圓周長與直徑之比值叫做「圓周率」。</p>	<p><b>面積和周長 (P.84)</b>            計算直角三角形的面積</p> <p>思考長方形面積的一半為一直角三角形的面積。</p>  <p>長方形面積 = <math>(5 \times 4) \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2</math>            直角三角形面積 = <math>20 \text{ cm}^2 \div 2 = 10 \text{ cm}^2</math></p> <p><b>線 (P.90)</b>            了解平行和垂直線            平行線間的距離相等。            鐵軌是平行線。</p>  <p>垂直線與另一直線的交角為直角。</p> 

### 對角線

對角線是從一角的頂點到對角的頂點。

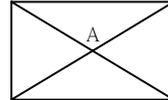
### 交線

兩條互相通過的直線

### 交點

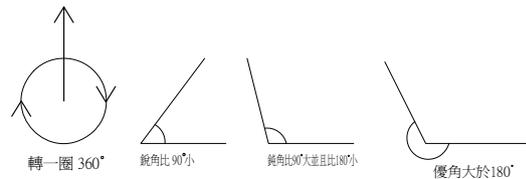
交點在兩條相交的直線上

了解交叉線和交點



### 角 (P.105)

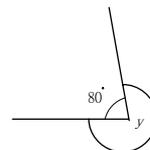
以夾角圖示直角 $90^\circ$ 、小於 $90^\circ$ 角的銳角、大於 $90^\circ$ 角並且小於 $180^\circ$ 的鈍角以及大於 $180^\circ$ 的優角 (reflex angle)。



### 求未知角角度

例如

- 直線上的未知角，角度計算  
直線上的角度和為 $180^\circ$
- 點上的角度  
繞點一圈的角度和為 $360^\circ$



$$y + 80^\circ = 360^\circ$$

$$y = 280^\circ$$

- 求三角形內的未知角的角度  
三角形內角和為 $180^\circ$

### • 描述

台灣在六年級的教材中，編製了「比」和「比值」的概念，並在第十二冊繼續對圓周率做更深入的介紹。

英國在六年級的教材中，與三角函數相關的概念除了「三角形內角和為 $180^\circ$ 」之外，其餘單元均與過去的教材內容沒有太大差別，只加深加多了些習題內容。

- 比較

- 面積的計算

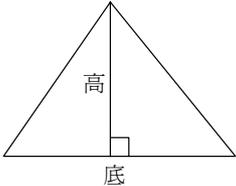
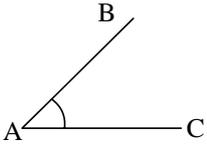
台灣教材從五年級開始鋪陳關於三角形面積的計算，與英國教材相同的部分為，教材中都是由長方形或平行四邊形開始進而計算直角三角形面積，但英國在四、五年級教材上，引導學生學習三角形面積的計算並沒有和台灣一樣利用方格面積的方式來處理，在六年級的教材中，以較為直接的文字方式敘述：

「長方形面積的一半即為所求之直角三角形面積」，教材中畫出長方形的一條對角線，直接給學生長方形面積為直角三角形面積的兩倍之概念。

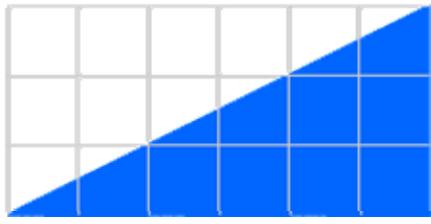
- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

台灣在六年級的教材中設計有「比」和「比值」，運用「比」和「比值」與三角函數中三角比的內容有直接的關係，三角函數三角比的定義就是來自於直角三角形某兩邊長的比值。五、六年級教材中設計有圓周率的單元，是三角函數在弧度量的轉換上的一個重要的前置經驗。

表 4-1-7 七年級教材內容摘要並列表

台 灣	英 國
<p><b>圖形的樣式與規律 (3-2 p.99)</b></p>  <p>三角形面積 = <math>\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}</math></p> <p><b>角及度量 (1-1.1 p.5)</b></p> <p><math>\overrightarrow{AB}</math> 與 <math>\overrightarrow{AC}</math> 交於 A 點，形成了一個角，我們把這個角記成 <math>\angle BAC</math>、<math>\angle CAB</math> 或 <math>\angle A</math>，點 A 稱為 <math>\angle A</math> 的頂點，<math>\overrightarrow{AB}</math> 與 <math>\overrightarrow{AC}</math> 稱為 <math>\angle A</math> 的邊。當我們用「<math>\angle A</math>」這個符號時，可以代表一個角，也可以代表該角的角度。</p>  <p>如果 <math>\overrightarrow{BA}</math> 垂直 <math>\overrightarrow{AC}</math> (<math>\angle A = 90^\circ</math>)，我們說 <math>\angle A</math> 是直角；如果 <math>\angle A &lt; 90^\circ</math>，我們說 <math>\angle A</math> 是銳角；如果 <math>\angle A &gt; 90^\circ</math>，我們說 <math>\angle A</math> 是鈍角；如果 <math>\angle A = 180^\circ</math>，我們說 <math>\angle A</math> 是平角。</p> <p><b>組成三角形的要素 (1-1.2 p.6)</b></p> <p>若依三角形的內角角度來看：</p> <p>三個內角都小於 <math>90^\circ</math> 的三角形稱為銳角三角形；有一個內角是 <math>90^\circ</math> 的三角形稱為直角三角形；有一個內角大於 <math>90^\circ</math> 的三角形稱為鈍角三角形。</p> <p>三角形的三個內角和是 <math>180^\circ</math>。</p> <p><b>三角形的邊角關係 (1-1.4 p.12)</b></p> <p><math>\triangle ABC</math> 中、如果 <math>\angle A &gt; \angle B &gt; \angle C</math>，那麼 <math>\overline{BC} &gt; \overline{AC} &gt; \overline{AB}</math>。也就是說，一個三角形中，若有兩角不相等，則大角對大邊。</p> <p><math>\triangle ABC</math> 中，如果 <math>\overline{BC} &gt; \overline{AC} &gt; \overline{AB}</math>，那麼</p>	<p><b>#7<sup>註3</sup> 角 (P.47)</b></p> <p>了解銳角、鈍角、優角和直角。</p> <p>角是由一直線從一個位置旋轉到另一個位置所產生的。</p> <p>一圈、半圈、<math>\frac{1}{4}</math> 圈的旋轉</p> <p><math>\frac{1}{4}</math> 圈的旋轉也轉了一個直角</p> <p>A.比較角度大小 B.使用量角器測量角度 C.畫角度     使用量角器畫出指定的角度 D.繞著某點旋轉的角度 E.計算角度     計算未知繞點的角度     計算直線上未知的角度     計算直線未知的對頂角角度</p> <p><b>#17 數的胚騰 (P.127)</b></p> <p><math>3 \times 3</math> 稱為 3 的平方</p> <p><b>#23 三角形 (P.164)</b></p> <p>給定長度和角度下畫出三角形 三角形的分類和它們的性質 計算三角形的角</p> <p>A.正確畫出三角形（使用圓規和直尺） 介紹名詞：角、半徑、建構（尺規作圖）、頂點</p> <p>◎圓的一部分稱為弧 ◎圓心到圓周的距離稱為半徑 ◎利用筆、直尺和圓規正確的畫出圖形稱為作圖，利用這個方法畫出的圖形稱為尺規作圖 ◎一個圖形轉角的部分稱為形的頂點</p>

註 3 #7 代表摘入的要點出現在英國該年級教材的第 7 單元，以下各年級依此類推。

<p><math>\angle A &gt; \angle B &gt; \angle C</math>。也就是說，一個三角形中，若有兩邊不相等，則大邊對大角。</p>	<p><b>B.正三角形</b> 三邊相等長度的三角形為等邊三角形</p>
<p><b>相似三角形 (2-2.3 p.62)</b></p>	<p>介紹正多面體：正四面體(4個三角形)、正六面體(6個三角形)、正二十面體(20個三角形)</p>
<p>當兩個三角形對應邊長成比例時，那麼這兩個三角形相似。</p>	<p><b>C.等腰的三角形</b> 有兩邊以上邊長相等的三角形稱為等邊三角形</p>
<p>當兩個三角形對應角相等時，那麼這兩個三角形就相似。</p>	<p><b>D.不等邊的三角形</b> 三個邊長都不一樣長的三角形為之</p>
<p><b>角的度量與弧長 (3-1.2 p.75)</b></p>	<p><b>E.使用角</b> 利用量角器和有刻度的值尺畫出指定的三角形(給定的條件為ASA)</p>
<p>我們通常用量角器去度量一個角的大小。以任意相鄰的兩個等分點與圓心的連線為兩邊，圓心為頂點的角的度數都是1度(記為<math>1^\circ</math>)。</p>	<p><b>F.三角形的角</b> ◎內角和為<math>180^\circ</math> ◎三角形中其中一角為<math>90^\circ</math>稱為直角三角形</p>
<p>圓心角的度數等於它所對弧的度數；弧的度數等於它所對圓心角的度數。</p>	<p><b>G.使用二等邊三角形的角</b></p>
	<p><b>#26 面積和周長 (P.195)</b> 三角形的面積為何？</p> 
	<p><b>#35 垂直線和平行線 (P.250)</b> ※判斷垂直和平行 ※畫出垂直和平行線</p>
	<p><b>知道你的計算器</b> 會按出<math>\sqrt{49}</math></p>
	<p><b>#51 函數與圖形 (P.362)</b> ※依據規則畫出圖形(函數圖形) ※找到直線方程式</p>
	<p>把方程式 <math>y = 2x + 1</math> 想成一個與 <math>x</math> 和 <math>y</math></p>

	有關的規則、函數。 給定一個 $x$ 值會找到一個 $y$ 值。
--	-------------------------------------

- 描述

台灣在七年級的時候，教材中出現三角形面積計算公式，學生要學會量測角的角度、知道弧度的定義和如何計算弧長。三角形的性質章節中複習小學已經教過的銳角、鈍角和直角三角形，進而學生要知道三角形的邊角關係、圖形的放大與縮小章節中則介紹相似三角形及其應用。

英國延續著國小教材的內容，同樣以旋轉量介紹了角、垂直線和平行線。在三角形的單元中，則介紹了正三角形、等腰三角形和不等邊三角形。在正三角形的主題中介紹了五種正多面體，而七年級的英國學生在計算三角形面積的方式則以計算方格面積的方式處理，教材中沒有提出三角形面積計算公式的文字。值得一提的是，英國在七年級教材的尾聲介紹函數與圖形。

- 比較

1. 面積計算

英國開始計算三角形面積，但七年級教材中這個面積計算方式，在台灣五年級教材第十冊中就已經出現。台灣七年級的三角形面積計算已經教導學生使用公式。

2. 三角形的性質

七年級的台灣教材，介紹三角形不以觀察形狀後而產生的概念為重點，取而代之的是直接明確定義什麼是正三角形、等腰三角形、銳角三角形、直角三角形和鈍角三角形。教材明顯更著重三角形的相關性質，先確立能構成一個三角形的三邊長關係，再利用摺紙操作的活動，讓學生認知大角對大邊的邊角關係，最後甚至介紹了三角形兩邊中點連線性質。

七年級的英國教材，學生要能依照例示用圓規和直尺畫出一個三角形，然後教材中定義了一些關於圓和圓規的專有名詞，接下來教材設計的活動是確立構成一個三角形的三邊長關係，儘管沒有如同台灣教材將結論整理出來，但單元中仍請同學試著以圓規和直尺畫出三邊長為 10 公分、4 公分和 5 公分的三角形，並觀察會發生什麼事情？教材中沒有確立三角形的邊角關係，所以沒有出現如同台灣大於 ( $>$ ) 或小於 ( $<$ ) 的符號。三角形內角和為  $180^\circ$  的內容，台灣教材在五年級已經利用完全一樣的剪紙操作的方式做出說明。英國在這個單元的教材除了

介紹正三角形還介紹了五種正多面體，並例示如何利用圓規、直尺和剪刀做出一個正六及正八面體，這是一個很特別的活動設計。

### 3. 圓和弧的認識

七年級的台灣和英國教材，都介紹了圓和弧的概念，英國在使用圓規後定義了一些與畫圓有關的基本名詞；台灣教材中則配合量角器的使用，介紹了圓心角，然後說明「弧的度數等於它所對圓心角的度數」，而不是像英國對於弧只介紹它是屬於圓的一部份。

- 分析

#### 1. 相似三角形

七年級的台灣教材較英國教材早介紹相似形，台灣以「兩個多邊形，如果對應邊成比例，而且對應角相等，就說這兩個多邊形是相似多邊形」的敘述句，明確的定義了什麼是相似多邊形後，再教學生相似三角形的相關知識。教材中各以一個活動說明「當兩個三角形對應邊成比例時，那麼這兩個三角形相似」及

「當兩個三角形對應角相等時，那麼這兩個三角形相似」。

#### 2. 垂直和平行

七年級的英國教材繼續鋪陳關於垂直和平行的概念，跟英國小學教材不同的地方在於，對於垂直和平行的介紹不再只以「地平線是遠方天與地的交界處」、「水平線是延著地平線的」及「垂直線為垂直水平線的直線」等需要學生想像的語句做說明，反而較如同台灣小學教材中介紹垂直和平行，以具體形物操作後，讓學生了解。例如：介紹平行時，教材中的示例為，請學生押著筆桿滾動一枝筆，這支筆在起點和終點處就互相平行。

#### 3. 函數與圖形

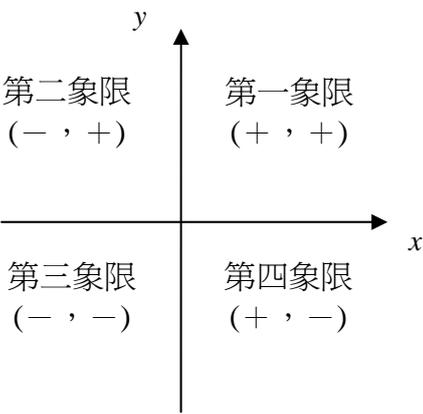
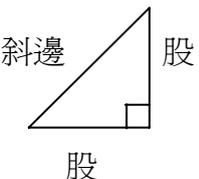
七年級的英國教材開始介紹函數與圖形，教材中說明函數為一個規則。教材中說例，把方程式  $y = 2x + 1$  想成一個與  $x$  和  $y$  有關的規則，給定一個  $x$  值會找到一個  $y$  值。對於函數與圖形的介紹，英國較台灣早開始鋪陳。

- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

三角形性質的應用，是三角函數重要的基本知識。台灣介紹相似形與三角測量有很大的關係；英國介紹函數與圖形則為三角函數在「函數」上的一個基本認識。

而台灣和英國教材中提到關於圓和弧的知識，則為三角函數相關定理或應用問題在名詞上的基礎知識。

表 4-1-8 八年級教材內容摘要並列表

台 灣	英 國
<p><b>坐標平面上的點與坐標 (4-1.3 p.124)</b>            坐標平面是由一條水平數線(<math>x</math> 軸)與一條鉛垂的數線(<math>y</math> 軸)所構成，<math>x</math> 軸向右為正向、<math>y</math> 軸向上為正向，兩軸的交點 <math>O</math> 稱為原點。            坐標平面被 <math>x</math> 軸、<math>y</math> 軸分割成四個區域(不含 <math>x</math> 軸、<math>y</math> 軸)。依逆時針方向，分別稱之為第一、第二、第三、第四象限。</p> 	<p><b>#2 比 (P.6)</b>            使用比的記號。            瞭解等比。            比較「比」。</p> <p><b>#8 面積 (P.114)</b>            三角形的面積公式  <math display="block">\text{面積} = \frac{\text{底} \times \text{高}}{2}</math>            思考此方法            「找出底和高的一半」            底邊，可以是三角形的任意邊，但高必須是垂直於選定底邊的一條特定直線</p> <p><b>#16 平方、立方及平方根、立方根(P.106)</b>            計算平方和立方數。            找出平方根和立方根。</p> <p><b>#22 比例尺 (P.152)</b>            比例因子 (scale factors)            使用比例尺繪圖</p> <p><b>#24 方位角 (P.170)</b>            用三個位數來測量和紀錄方位角            用其他兩點的方位角來固定一點的位置</p>
<p><b>平方根與畢氏定理 (2-2 p.62)</b>            畢氏定理：任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方。</p> 	<p><b>#32 規則和坐標 (P.222)</b>            函數圖形在四個象限            給定直線兩端點的坐標，找出直線的中點</p>

• 描述

台灣在八年級二元一次方程式的教材後，設計了平面坐標系的單元，單元中介紹了坐標平面上的點與坐標；在平方根與商高定理的單元中，說明「任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方」。

英國在八年級教材的一開始正式介紹了比和比值的表示法與概念，接著介紹三角形面積公式；在第十六單元中同時介紹了平方、立方及平方根、立方根。教材的尾聲有「比例尺」、「方位角」和「尺規作圖」三個單元。

- 比較

1. 平面坐標

台灣在平面坐標的單元中，除了說明如何敘述方向和位置的內容外，更請學生畫出二元一次方程式的圖形，但是教材中沒有將方程式與函數的概念做出連結，這是與英國教材內容不同的一個地方。另外，台灣的教材很注重兩個二元一次方程式的聯立解在平面坐標上的圖形樣式。

英國在教材中沒有如同台灣明確介紹坐標平面上的四個象限，但也利用二元一次方程式在坐標平面上畫出圖形，不過比台灣教材更強調方程式就是一個規則、一種函數的概念，而沒有強調如何敘述方位，畢竟英國教材之前已經對於平面坐標上如何表示方位的鋪陳，有長期的螺旋式設計。

2. 平方根

台灣在介紹平方和平方根後，就開始介紹商高定理。學生會運算平方和平方根是配合商高定理的一項重要技能。英國教材對於「平方、立方及平方根、立方根」這個單元，沒有強調要如何應用，但很重視學生要會運算，教材中在坐標平面上繪出一「橫軸是 -4 到 4，縱軸是 -4 到 4 的平方」的圖形。英國教材同時重視學生對於平方、立方及平方根、立方根的運算技能，設計許多計算的題目。

- 分析

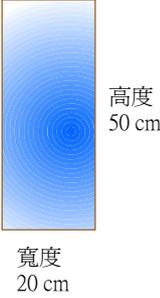
英國教材在八年級第一次正式介紹比和比值以及三角形的面積公式，這兩項教材內容的教學時間點已經比台灣晚了許多，台灣小學六年級的教材就已經設計有比和比值的單元。英國教材在設計比例尺的單元，呈現有相似形的概念，但沒有如同台灣七年級教材就明確說明相似多邊形的定義，更沒有介紹相似三角形，以請學生實際在方格上繪圖放大或縮小各類形狀為教材主軸，比例尺單元的尾聲將八年級一開始介紹的「比」引入，讓學生在比例尺換算中注意測量單位。英國教材中方位角是台灣在八年級前的教材都還沒有出現過的內容。

- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

八年級的台灣和英國教材，計算數的平方和平方根是與三角函數最有關聯的部分，台灣更介紹了商高定理，這與求銳角的數值三角有很大的關係。英國「比」和「面積」的教材內容，都是要能使用三角函數定義或導出三角函數定理的重要前置經驗。表列其他英國和台灣的單元都與三角測量有關。

表 4-1-9 九年級教材內容摘要並列表

台 灣	英 國
<p><b>比與比值 (4-1 p.112)</b>            兩個數 <math>a</math> 與 <math>b</math> (<math>b \neq 0</math>)，<math>a</math> 比 <math>b</math> 就記作 <math>a : b</math>，它的比值為 <math>\frac{a}{b}</math>，其中 <math>a</math> 稱為這個比的前項、<math>b</math> 稱為這個比的後項。</p> <p><b>相似三角形 (4-2 p.138)</b>  <b>SAS 相似性質</b>：如果兩個三角形的一角相等，而且夾此角的兩邊對應成比例，則這兩個三角形相似。  <b>AAA 相似性質</b>：如果兩個三角形的三個內角對應相等，那麼這兩個三角形必相似。  <b>SSS 相似性質</b>：如果兩個三角形的三邊長對應成比例，則這兩個三角形相似。</p> <p><b>三角形的外接圓 (1-2.1 p.24)</b>            直角三角形的外心即斜邊的中點，它到三個頂點的距離相等。            直角三角形中，若有一個內角為 <math>30^\circ</math>，則此角所對應的股其長度是斜邊長度的一半。</p> <p><b>幾何證明 (2-2 ex4,ex5)</b>            一個直角三角形 <math>ABC</math>，已知 <math>\angle A = \angle B = 45^\circ</math>，<math>\angle C = 90^\circ</math>，則 <math>\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}</math>。            一個直角三角形 <math>ABC</math>，其三個內角為 <math>\angle A = 30^\circ</math>，<math>\angle B = 60^\circ</math>，<math>\angle C = 90^\circ</math>，則 <math>\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2</math>。</p>	<p><b>#5 使用規則 (P.37)</b>            解出簡單的方程式。            代換數字進入一個公式去解出給定方程式。            改變簡單公式的主題</p> <p>反算的規則(Inverse rules)            從 <math>m = 6n - 2</math> 轉換成 <math>n = \frac{m+2}{6}</math></p> <p>隱含的方程式(Implicit equations)  <math>x + y = 10</math></p> <p><b>#6 圓周長</b>            從一個圓的直徑和半徑來計算一個圓的圓周。            圓周長是繞著圓的長度</p> <p>圓周長的計算公式            正確的乘數為 <math>\pi</math></p> <p>圓周長的計算公式 (P.50)  <math>r</math> 為半徑，<math>d</math> 為直徑，<math>C</math> 為圓周長  <math>C = \pi d</math>            又 <math>d = 2r</math>，故 <math>C = \pi \times 2r</math> 寫成 <math>C = 2\pi r</math></p> <div data-bbox="842 1532 1054 1738" data-label="Image"> <p>The diagram shows a circle with a center point. A dashed red line segment from the center to the circumference is labeled '半徑 r' (radius r). A dashed red line segment passing through the center and connecting two points on the circumference is labeled '直徑 d' (diameter d).</p> </div> <p><b>#8 放大 (P.55)</b>            ※從形的中心點放大一個圖            ※處理放大的問題            利用比例因子</p>

	<p><b>#10 直線圖形 (P.63)</b></p> <p>※根據代數方程式畫出直線圖形          ※找出平面坐標圖形中直線的斜率以及此直線和 y 軸的截距。          ※根據直線的斜率以及直線和 y 軸的截距，找出直線方程式。</p> <p><b>#11 點、線和弧 (P.73)</b></p> <p>※滿足某種規則所形成的點集稱為軌跡          ※取得正確的資訊畫出正確的圖</p> <p><b>#13 比和比例 (P.85)</b></p> <p>將比寫成一個數          則用比值去決定，兩個量受否成比例          例題          這個長方形的窗戶高為 50 公分，寬為 20 公分</p> <div style="text-align: center;">  <p>高度 50 cm</p> <p>寬度 20 cm</p> </div> <p>高：寬為 50:20 or 5:2          另一個比的表示法為 <math>\frac{\text{高}}{\text{寬}}</math>          這個窗戶高與寬的比值為 <math>\frac{\text{高}}{\text{寬}} = \frac{50}{20} = 2.5</math></p> <p><b>#21 角 (P.151)</b></p> <p>※複習之前習作過的角之知識          ※學習關於角和平行線的知識</p>
--	---

- 描述

台灣在九年級的教材設計有比與比值、相似三角形、三角形的外接圓及幾何證明等單元，其中相似三角形較七年級相似三角形教材有更深入的內容，但更強調相似三角形本身的性質，也搭配比與比值的概念做應用。三角形的外接圓和幾何證明單元中，皆以例題或習題強調直角三角形的邊角關係。

英國在九年級的教材還是以螺旋式的編製結構為主，因此在使用規則、圖形放大和直線圖形等單元都是稍微加深些之前已經教過的概念，唯一新的單元就是圓周長。九年級教材的尾聲，英國特別整理一個「角」的單元，統整複習曾經教材中編製關於「角」的知識。

- 比較

- 1.圓

對於圓的介紹，台灣開始於小學五年級的圓周率，英國首次提到圓周率就是九年級，很明顯英國介紹圓的時間比較晚。對於圓周率本身的介紹，英國教材中敘述了些發現 $\pi$ 的歷史，在計算上英國先以「3」代替 $\pi$ ，再來就直接以「 $\pi$ 」代入圓周長計算過程。

台灣九年級對於圓的教材設計，已經開始將圓與直角三角形作配合，在許多關於圓的性質中，提到了直角三角形的外接圓性質。台灣九年級在圓的教材設計，比英國教材更注重與圓相關的性質與應用，因此內容較深入也較難。

- 2.比和比值

台灣九年級的教材中，比和比值已經邁入應用階段，英國九年級的教材還在鋪陳比和比例的概念，儘管例題中做了一些初步的應用。台灣教材更注重比和比值在數學上的意義與運算技巧，像是分子不為0與內項積等於外項積。

- 分析

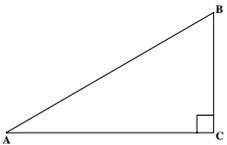
- 比和比值

九年級的教材，台灣已經利用連比的寫法表示兩種特殊直角三角形邊長的連比，不過教材中並沒有把連比的樣式拆開來分別說明邊和角的關係，如果可以拆開來分述，則為一個更明顯關於三角比的前置經驗教材。

- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

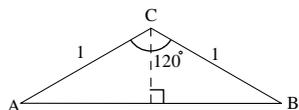
九年級的台灣和英國教材都提出了圓的概念，特別是台灣更注重圓和三角形的性質，而三角形的外接圓性質與正弦定理直接有關係。英國教材還是很重視使用規則和函數之間的關係，這與基本的函數概念是很重要的連結。

表 4-1-10 十年級教材內容摘要並列表

台 灣	英 國
<p><b>函數的定義 (1.3.1 P.32)</b>            給了兩個非空集合 <math>A</math> 與 <math>B</math>。如果「<math>A</math> 內每一個元素 <math>a</math>，在 <math>B</math> 內恰有一個元素 <math>b</math> 與 <math>a</math> 對應」，此種對應法則 <math>f</math>，稱為從 <math>A</math> 映到 <math>B</math> 的函數，記作 <math>f : A \rightarrow B</math>。其中 <math>b</math> 叫做 <math>a</math> 的函數值，用符號 <math>b = f(a)</math> 表示。集合 <math>A</math> 稱為 <math>f</math> 的定義域，集合 <math>B</math> 叫做 <math>f</math> 的對應域，而全體函數值 <math>f(a)</math> 所組成的集合叫做 <math>f</math> 的值域。</p> <p><b>函數圖形的定義 (1-3.2 p.33)</b>            假設 <math>y = f(x)</math> 是給定的函數(<math>x</math> 與 <math>y</math> 都是實數)，如果把 <math>x</math> 和 <math>y</math> 看成平面直角座標系中的橫坐標與縱坐標，那麼所有滿足函數 <math>y = f(x)</math> 關係的點 <math>(x, y)</math> 構成一個圖形(可能是一條直線或曲線或某些零散的點...)，這個圖形叫做函數 <math>f</math> 的圖形。</p> <p><b>銳角三角函數值的定義 (2-1P.77)</b></p>  <p><math>\sin A</math> 表示 <math>\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}</math>，稱之為 <math>\angle A</math> 的正弦</p> <p><math>\cos A</math> 表示 <math>\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}</math>，稱之為 <math>\angle A</math> 的餘弦</p> <p><math>\tan A</math> 表示 <math>\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}</math>，稱之為 <math>\angle A</math> 的正切</p> <p><math>\cot A</math> 表示 <math>\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}</math>，稱之為 <math>\angle A</math> 的餘切</p> <p><math>\sec A</math> 表示 <math>\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}</math>，稱之為 <math>\angle A</math> 的正割</p> <p><math>\csc A</math> 表示 <math>\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}</math>，稱之為 <math>\angle A</math> 的餘割</p>	<p><b>#1 畢氏定理 (P.4)</b>            在直角三角形中知道兩個邊長，計算第三邊長。            解決牽涉直角三角形邊長的問題。</p> <p>A. 平行四邊形面積            B. 在直角三角形三邊上的正方形畢氏定理            在一個直角三角形中，直角那個角的對邊稱為斜邊。            斜邊平方等於兩股平方和            C. 開根號            D. 使用畢氏定理</p> <p><b>#20 使用計算器</b>            括弧在計算上的意義            如何四捨五入至小數位或有效位            對於複雜的計算使用計算機            計算平方、平方根和負數的運算</p> <p><b>#25 平行線和角 (P.222)</b>            角 <math>DAB</math>，以 <math>A</math> 為頂點，<math>D</math> 和 <math>B</math> 都在它的臂上            可以記做 <math>\angle DAB</math> 或 <math>\widehat{DAB}</math></p> <p><b>#35 斜率 (P.297)</b>            計算正和負的斜率            將斜率解釋為定...的比率(速率)            例如            水倒入某容器花八分鐘            水流是穩定的速率            下圖是在這八分鐘內容器中水的體積的變化。</p>

**利用作圖法求三角函數值 (2-1.2 p.82)**

例題：



已知  $\triangle OAB$  中， $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ，試求  $\overline{AB}$  之長及  $\triangle OAB$  的面積。

解：過  $O$  點作  $\overline{AB}$  的垂線。

設垂足點為  $D$ ，

因  $\triangle OAD \cong \triangle OBD$ ，

所以  $\overline{AD} = \overline{BD}$ 。

因  $\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$ ，

所以  $\overline{OD} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}，$$

因此  $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ， $\triangle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 。

**倒數、商數、平方關係 (2-2.1 p.87)**

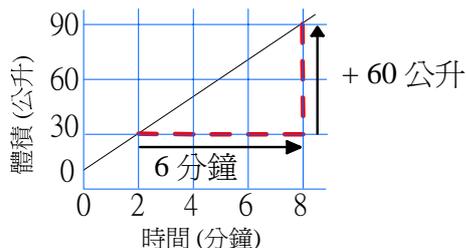
若三角形  $ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle C$  的度數為  $\theta$ ，以  $a$ ， $b$  與  $c$  分別表示三邊  $\overline{BC}$ ，

$\overline{CA}$  與  $\overline{AB}$  之長，就有

$$\sin \theta = \frac{a}{c}，\cos \theta = \frac{b}{c}，$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}，\cot \theta = \frac{b}{a}，$$

$$\sec \theta = \frac{c}{b}，\csc \theta = \frac{c}{a}。$$



水平線表示過了 6 分鐘後，垂直線表示增加了 60 公升。

斜率即為  $\frac{60}{6} = 10$

所以水流速率為每分鐘 10 公升。

**#36 地圖和平面圖 (P.309)**

使用簡單的比例尺

使用方位角

使用四位的格子點參照

使用不同的比例尺在地圖中

A. 使用比例尺

比例尺：一公分代表兩公尺

B. 網格

C. 比例尺

D. 方位角

◎方位角告訴你一個已知點的方向

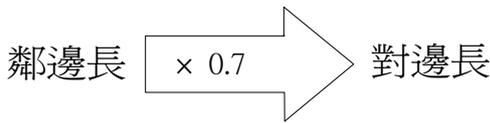
◎方位角通常順時鐘由北方開始測量

◎在地圖上的垂直線通常指向北方

◎方位角以三個位數表示之，如  $065^\circ$

**#37. 比 (P.312)**

複習比  $a : b$  和  $a : b : c$

<p>倒數關係：</p> $\sin \theta \csc \theta = 1 ,$ $\tan \theta \cot \theta = 1 ,$ $\cos \theta \sec \theta = 1 .$ <p>商數關係：</p> $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} ,$ $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} .$ <p>由畢氏定理得出平方關係：</p> $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 ,$ $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 ,$ $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1 .$ <p><b>餘角關係 (2-2.3 p.92)</b></p> <p>餘角關係：</p> $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$ $\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$ $\sec(90^\circ - \theta) = \csc \theta$ $\csc(90^\circ - \theta) = \sec \theta$ <p><b>簡易測量 (2-3.1 p.95)</b></p> <p>水平線指的是過觀測者眼睛且與鉛垂線相垂直的直線，而視線則為通過觀測者眼睛與目標物觀測點的直線。</p> <p>仰角為仰視目標物時，視線與水平線間的夾角；俯角為俯視目標物時，視線與水平線間的夾角。</p> <p><b>如何使用三角函數值表 (2-3.2 p.100)</b></p>	<p><b>#38. 相似形 (P.324-P.348)</b></p> <p>處理小數的比例因子 了解相似形及處理形的比率問題 相似三角形</p> <p>◎用相同的比例因子放大兩三角形的對應邊，這兩個三角形為相似形。</p> <p>◎任兩三角形，三內角相等，則此兩三角形相似。</p> <p>◎任兩三角形有兩個相同的角即為相似</p> <p><b>#42 正切函數 (P.364)</b></p> <p>A.利用 <math>\tan</math> 函數找出角的對邊長長度。</p> <p>◎給定，角 <math>35^\circ</math> 作實驗量出角 <math>35^\circ</math> 對邊邊長度並紀錄下來。</p> <p>◎利用畫圖實驗發現的結果找出角 <math>35^\circ</math> 的對邊長長度。（鄰邊長度任意給定定值並有單位 <math>\text{cm}</math>）</p> <p>◎給定已知鄰邊長，鄰邊長乘上 <math>0.7</math> 為對邊長的規則計算角 <math>35^\circ</math> 的對邊長長度。</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>◎另一個計算規則</p> $\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = 0.7 .$ <p>◎利用畫圖實驗方式，發現其他角度關於對邊與鄰邊比值的規則。</p> <p>◎畫出 <math>10\text{cm}</math> 的水平線和一條垂足於水平線右邊端點的直線</p> <p>◎畫出 <math>10^\circ</math>、<math>20^\circ</math>、<math>30^\circ</math>、..., <math>60^\circ</math>、<math>70^\circ</math></p>
--	--

1 度 = 60 分。 ( $1^\circ = 60'$ )

隨堂練習：

根據本書所附的三角函數值表，查出下列各三角函數值：

(1)  $\sin 17^\circ 40' = 0.3035$ 。

(2)  $\cos 36^\circ = 0.8090$ 。

**使用電算器求三角函數值表 (2-3.3 p.106)**

度量角的單位有“度”與“弧度”兩種。此處我們使用“度”為單位，因此，我們要先操縱切換鍵，使顯示幕上出現“DEG”字樣。

利用電算器也可以由一銳角三角函數值，反求出該銳角的度數。例如由  $\sin \theta = 0.3456$ ，求銳角  $\theta$  的度數。一樣要選用“DEG”，有的機型是先鍵入 0.3456，再按下  $\sin^{-1}$  鍵，即得

20.21842629，因此我們得知  $\theta \approx 20.22^\circ \approx 20^\circ 13'$ 。有的機型是先按  $\sin^{-1}$  鍵，再鍵入 0.3456，然後再按  $\square$ ，即得 20.2184262926。

**廣義角的三角函數值 (2-4.1 p.109)**

把角看作是以其頂點為旋轉中心，以其一邊為始邊，旋轉至另一邊(終邊)而得出的。並規定順時針方向旋轉的旋轉量是負的，逆時針方向旋轉的旋轉量是正的。旋轉量是正的角就稱為正向角或簡稱為正角；旋轉量為負的角就稱為負向角或簡稱為負角。正向角與負向角統稱為有向角。

有向角有正向角與負向角之分，且度數也不限於  $0^\circ$  到  $180^\circ$  之間，我們統稱為廣義角。

定義廣義角的六個三角函數值：

檢視  $\theta$  為任意廣義角的情形：

我們將其頂點放在坐標平面的原點，始邊放在  $x$  軸的正向上。當廣義角  $\theta$  的終邊落在第一、二、三或四象限，我們同樣

◎製作上述畫出角度的簡表

角度	角的鄰邊長	×	角的對邊長
$10^\circ$	10cm	完成結果	
$20^\circ$	10cm	並將數字	
$30^\circ$	10cm	填路此欄	
$40^\circ$	10cm	位。	

利用上表的結果找出給定角，與給定角的鄰邊長度的對邊長長度。

◎說明與鄰邊相乘求出對邊長度的那個值，稱為角的 **tangent**。

◎介紹如何利用計算機的方式找出  $\tan 35^\circ$  的值，並說明  $\tan 35^\circ$  的值接近 0.7。

◎利用計算機按出  $\tan 10^\circ$ 、 $\tan 20^\circ$ 、...、 $\tan 70^\circ$  的值，小數點下三位 ( 3 d.p. )，並與填入 A5 表格中的值作比較。

B. 利用  $\tan$  函數找出角的鄰邊長長度。

C. 找角，例如利用三角函數簡表 (小數點下兩位) 找出角的 **tangent** 值

利用查表方式找出  $\tan 23^\circ$  之值為 0.78

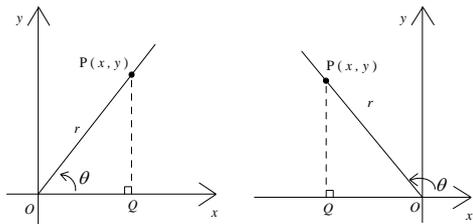
D. 綜合問題  
總結 **tangent** 函數為對邊比上鄰邊

$$\tan a = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

在其終邊上任取一點  $P(x, y)$ ，此處  $xy \neq 0$ 。然後自  $P$  點向  $x$  軸作垂線，令垂足為  $Q$  點，則  $\triangle PQO$  是一個直角三角形。我們以  $r$  表  $\overline{OP}$  的長度，並規定：

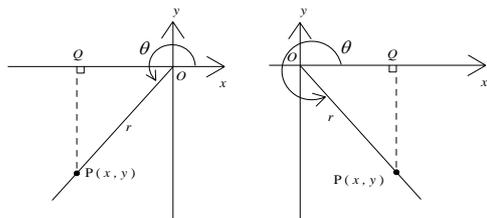
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}, \quad \sec \theta = \frac{r}{x}, \quad \csc \theta = \frac{r}{y}。$$



第一象限

第二象限



第三象限

第四象限

### 同界角 (2-4.2 p.114)

同界角有相同的三角函數值：

$$\sin(n \times 360^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(n \times 360^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(n \times 360^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\cot(n \times 360^\circ + \theta) = \cot \theta$$

$$\sec(n \times 360^\circ + \theta) = \sec \theta$$

$$\csc(n \times 360^\circ + \theta) = \csc \theta$$

### #49 正弦和餘弦函數 (P.431)

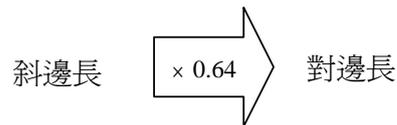
A. 複習正切函數，

並說明比率  $\tan a = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$

B. 正弦函數

在直角三角形中

當角度為  $40^\circ$  時，可使用此規則：



另外一個可使用的規則為：

$$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = 0.64$$

這個乘法上斜邊長度會得到對邊長度的數值稱為角的 **sine** 值

所以  $40^\circ$  的 **sine** 值大約是 0.64

◎利用量角器和直尺作圖方式測量完成  $\sin 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 60^\circ, 70^\circ$  的表

角度	角的斜邊長	$\times$ 	角的對邊長
$10^\circ$	10cm	完成結果 並將數字 填路此欄 位。	
$20^\circ$	10cm		
$30^\circ$	10cm		
$40^\circ$	10cm		

C. 利用 **sine** 計算出斜邊長長度

D. 找角：利用查表方式或計算器由 **sine** 的函數值找出角的角度

E. 餘弦函數

說明比率  $\cos a = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$

對於任意廣義角  $\phi$  都可以找到唯一的一個角  $\theta$ ， $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ，使得

$$\phi = 360^\circ + \theta。$$

三角函數在四個象限之正負關係：  
廣義角  $\theta$  的三角函數值是由其終邊與單位圓之交點  $P(x, y)$  的  $x$  與  $y$  值來決定。  
 $x$ 、 $y$  為正為負，視  $P(x, y)$  點所在的象限而異。

列表如下：

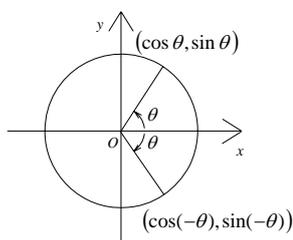
P 點坐落之象限	一	二	三	四
三角函數				
$\sin \theta$ 、 $\csc \theta$	+	+	-	-
$\tan \theta$ 、 $\cot \theta$	-	-	+	+
$\cos \theta$ 、 $\sec \theta$	+	-	+	-

我們把  $P$  點坐落在第一、第二、第三、第四象限的廣義角分別稱為第一象限角、第二象限角、第三象限角、第四象限角。

此外，倒數、商數、餘角及平方關係對於任意廣義角都成立。

### 化 $(-\theta)$ 角之三角函數為 $\theta$ 角之三角函數

(2-4.3 p.118)



$$\sin(-\theta) = -\sin \theta，$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta，$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta，$$

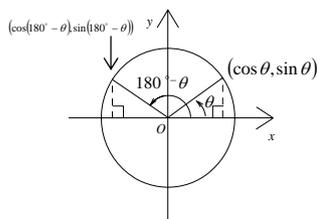
$$\cot(-\theta) = -\cot \theta ,$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta ,$$

$$\csc(-\theta) = -\csc \theta .$$

### $(180^\circ \mp \theta)$ 與 $\theta$ 角的三角函數值間的關係

(2-4.4 p.122)



$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta ,$$

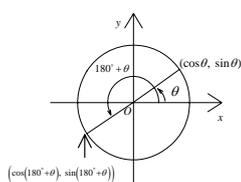
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta ,$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta ,$$

$$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta ,$$

$$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec \theta ,$$

$$\csc(180^\circ - \theta) = \csc \theta .$$



$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta ,$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta ,$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta ,$$

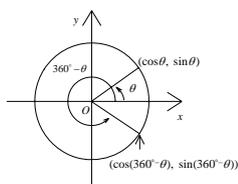
$$\cot(180^\circ + \theta) = \cot \theta ,$$

$$\sec(180^\circ + \theta) = -\sec \theta ,$$

$$\csc(180^\circ + \theta) = -\csc \theta .$$

#### $(360^\circ - \theta)$ 與 $\theta$ 角的三角函數值間的關係

(2-4.5 p.124)



$$\sin(360^\circ - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta ,$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta ,$$

$$\tan(360^\circ - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan \theta ,$$

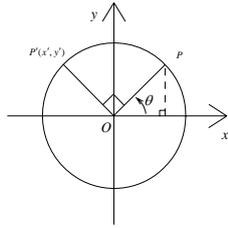
$$\cot(360^\circ - \theta) = \cot(-\theta) = -\cot \theta ,$$

$$\sec(360^\circ - \theta) = \sec(-\theta) = \sec \theta ,$$

$$\csc(360^\circ - \theta) = \csc(-\theta) = -\csc \theta .$$

#### $(90^\circ \mp \theta)$ 與 $\theta$ 角的三角函數值間的關係

(2-4.6 p.125)



$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta ,$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta ,$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta ,$$

$$\cot(90^\circ + \theta) = -\tan \theta ,$$

$$\sec(90^\circ + \theta) = -\csc \theta ,$$

$$\csc(90^\circ + \theta) = \sec \theta .$$

#### (270° ± θ) 與 θ 角的三角函數值間的關係

(2-4.7 p.126)

$$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta ,$$

$$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta .$$

#### 三角形面積與正弦定理 (2-5.1 p.130)

三角形面積公式：

△ ABC 的面積

$$= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

正弦定理：

若 a、b 與 c 分別表示 △ ABC 的三內角 ∠A、∠B 與 ∠C 的對邊長，則

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} .$$

正弦定理與外接圓半徑的關係：

若  $a$ 、 $b$  與  $c$  分別表示  $\triangle ABC$  三內角  $\angle A$ 、 $\angle B$  與  $\angle C$  的對邊長， $R$  為  $\triangle ABC$  之外接圓的半徑，則

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R。$$

例題：

試證明海龍公式，設  $\triangle ABC$  的三邊長分別是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，以  $\Delta$  表示其面積，

$s$  表其半周長，即  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ，

$$\text{則 } \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

證明： $\triangle ABC$  中，

$\overline{BC}$  上的高  $\overline{AD} = c \sin B$ ，所以，

$$\Delta = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$= \frac{1}{2} ac \sqrt{1 - \cos^2 B}$$

$$= \frac{1}{2} ac \sqrt{1 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} ac \frac{1}{2ac} \sqrt{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(2ac - c^2 - a^2 + b^2)}$$

$$\cdot \sqrt{(2ac + c^2 + a^2 - b^2)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(b-c+a)(b+a-c)(a+c-b)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

#### 餘弦定理 (2-5.2 p.136)

若  $a$ 、 $b$  與  $c$  分別表示  $\triangle ABC$  三內角  $\angle A$ 、 $\angle B$  與  $\angle C$  的對邊長，則

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A，$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

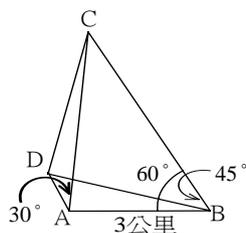
### 基本三角測量 (2-6 p.147)

例題：

如下圖所示，海岸邊兩觀測站  $A$  與  $B$  同時發現海中小島  $C$  的附近，有一艘船  $D$  觸礁。在  $A$  觀測站得  $\angle CAB = 90^\circ$ ， $\angle DAC = 30^\circ$ ；在  $B$  觀測站測得  $\angle CBA = 60^\circ$ ， $\angle CBD = 45^\circ$ ，已知  $A$ ， $B$  兩觀測站相距 3 公里。試求海難船  $D$  與觀測站  $A$ ， $B$  以及海島  $C$  的距離。

$$(\text{已知 } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4})$$

解：



因  $\angle CBA = 60^\circ$ ， $\angle CBD = 45^\circ$ ，

所以  $\angle DBA = 15^\circ$ 。

$$\begin{aligned} \text{故 } \angle ADB &= 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ - 15^\circ \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

由正弦定理

$$\frac{\overline{DA}}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{DB}}{\sin 120^\circ} = \frac{3}{\sin 45^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{DA} &= \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{ (公里),} \end{aligned}$$

$$\overline{DB} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ (公里).}$$

又因在  $\triangle ABC$  中，  
 $\angle CAB = 90^\circ$ ，  
 $\angle CBA = 60^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ，

$\overline{AB} = 3$ ，所以  $\overline{BC} = 6$ 。

$\overline{DB} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ， $\angle CBD = 45^\circ$ ，

所以由餘弦定理知

$$\overline{CD}^2 = \frac{99}{2} - 18\sqrt{3} \quad \text{故 } \overline{CD} = \sqrt{\frac{99}{2} - 18\sqrt{3}}$$

(公里)

### 弧度 (3-1.1 p.151)

弧度的定義：

我們規定常數  $\frac{360^\circ}{2\pi}$  為一弧度。亦即

$360^\circ = 2\pi$  弧度。因此  $1^\circ = \frac{2\pi}{360}$  弧度，故

有  $\left(\frac{360^\circ}{2\pi}\right) = 1$  弧度， $1^\circ = \frac{2\pi}{360}$  弧度。

$\angle POQ = 1$  弧度的意思即  $\widehat{PQ}$  = 圓  $O$  的半徑。

### 扇形的弧長與面積 (3-1.2 p.153)

弧長公式：

若圓心角  $\angle POQ = \theta$  弧度，則  $\widehat{PQ} = r\theta$

扇形面積公式：

若  $\angle POQ = \theta$  弧度，則

$$\text{扇形面積} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(\widehat{PQ})r$$

用弧度為單位表廣義角的大小：

若一廣義角為  $x^\circ$ ，則廣義角為  $x \cdot \frac{2\pi}{360}$  弧

度。

### 三角函數的圖形及其特性 (3-1.3 p.158)

函數的週期：

一個函數  $y = f(x)$  的圖形若每隔一個固定的單位長，亦即可找到固定的正數  $a$ ，使得對於其定義域中每一元素  $x$ ，恆有  $f(x+a) = f(x)$ ，我們就說這個週期函數的週期為  $a$ 。

正弦函數的特性：

(1) 正弦函數  $y = \sin x$  的定義域為  $R$ 。

(2) 正弦函數  $y = \sin x$  的值域為

$\{y | -1 \leq y \leq 1\}$ ，也就是說：對於任

意實數  $x$ ， $-1 \leq \sin x \leq 1$ ，其最大值為 1，最小值為 -1。

(3) 正弦函數的週期為  $2\pi$ 。

(4) 當  $x$  的值由 0 連續遞增到  $\frac{\pi}{2}$  時，

$y = \sin x$  的值隨之由 0 連續遞增到

1；當  $x$  的值由  $\frac{\pi}{2}$  連續遞增為  $\pi$  時，

$y = \sin x$  的值隨之由 1 連續遞減為

0；當  $x$  的值由  $\pi$  連續遞增到  $\frac{3}{2}\pi$

時， $y = \sin x$  的值隨之由 0 連續遞

減增為 -1；當  $x$  的值由  $\frac{3}{2}\pi$  連續遞

增到  $2\pi$  時， $y = \sin x$  的值隨之由 -1 連續遞增為 0。

$x$	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\pi$	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	$2\pi$
$\sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

(5) 因對應任意實數  $x$ ，

$\sin(-x) = -\sin x$ ，所以正弦函數

$y = \sin x$  為一奇函數，若  $(x_1, y_1)$  滿

足  $y = \sin x$ ，則  $(-x_1, -y_1)$  亦滿足

$y = \sin x$ ，故其圖形對稱於原點。

同理推知餘弦函數、正切函數、餘切函數、正割函數及餘割函數的特性。

**餘弦函數的差角公式 (3-2.1 p.174)**

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$  ，

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

**餘弦函數的和角公式 (3-2.2 p.177)**

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$  ，

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

**正弦函數的差角公式 (3-2.3 p.177)**

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$  ，

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

**正弦函數的和角公式 (3-2.4 p.178)**

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$  ，

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

**正切函數的和、差角公式 (3-2.5 p.181)**

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$  ，若  $\tan \theta_1$  ，  $\tan \theta_2$  皆有意義，且

(1)  $\tan(\theta_1 + \theta_2)$  有意義，

$$1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2 \neq 0 \text{ ， 則}$$

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} \text{ 。}$$

(2)  $\tan(\theta_1 - \theta_2)$  有意義，

$$1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2 \neq 0 \text{ ， 則}$$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \text{ 。}$$

**二倍角公式 (3-3.1 p.184)**

對於任意角  $\theta$  ，

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \text{ ，}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ ，}$$

對於任意角  $\theta$  ，只要  $\tan \theta$  ，  $\tan 2\theta$  皆有意義，且  $1 - \tan^2 \theta \neq 0$  ，則

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \text{ 。}$$

**半角公式 (3-3.2 p.187)**

對於任意角  $\theta$  ，

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}},$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}},$$

對於任意角  $\theta$ ， $\theta \neq n\pi$  ( $n$  為任意奇數)，

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}。$$

#### 積化和差公式 (3-4.1 p.192)

對於任意角  $\theta_1$  與  $\theta_2$ ，

$$2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 = -\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

#### 和差化積公式 (3-4.2 p.195)

對於任意角  $\alpha$  與  $\beta$ ，

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

#### 化 $a \sin \theta + b \cos \theta$ 為 $r \sin(\theta + \alpha)$ 之形式

(3-5.1 p.201)

設  $a$ ， $b$  是不全為 0 的實數，則

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)，$$

$$\text{其中 } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}，$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}。$$

#### 正、餘弦函數的疊合 (3-5.2 p.206)

隨堂練習：

是描繪  $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$  的圖形，並求

週期、最大值與最小值。

$$\text{解： } y = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

即其週期為  $2\pi$ ，最大值為 2，最小值為 -2。

### 反正弦函數 (3-6.1 p.210)

$\sin^{-1} a$  的定義：

對於每一個實數  $a \in [-1, 1]$ ，在區間

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  內，都恰好有一個實數  $x$

，使得  $\sin x = a$ 。這個唯一的實數  $x$ ，就記做  $\sin^{-1} a$  (也記做  $\arcsin a$ )，讀作 *arc sine a*。

$\sin^{-1} a$  的性質：

1. 當  $-1 \leq a \leq 1$  時， $\sin^{-1} a$  才有意義。

2. 若  $\sin^{-1} a = x$ ，則  $x$  在區間  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

上且滿足  $\sin x = a$ ，即

$$\sin(\sin^{-1} a) = a。$$

### 反餘弦函數 (3-6.2 p.214)

$\cos^{-1} a$  的定義：

對於每一個實數  $a$ ， $-1 \leq a \leq 1$ ，在區間

$\{x | 0 \leq x \leq \pi\}$  上都恰好有一個實數  $x$  使得

$\cos x = a$ 。這個唯一的實數  $x$ ，就記做

$\cos^{-1} a$  (也記做  $\arccos a$ )，讀作 *arc cosine a*。

$\cos^{-1} a$  的性質：

1. 當  $-1 \leq a \leq 1$  時， $\cos^{-1} a$  才有意義。

2. 若  $\cos^{-1} a = x$ ，則  $x$  在區間  $[0, \pi]$  上

且滿足  $\cos x = a$ ，即

$$\cos(\cos^{-1} a) = a。$$

<p>反正切函數 (3-6.3 p.218)</p> <p><math>\tan^{-1} a</math> 的定義：</p> <p>對於每一個實數 <math>a</math>，在區間 <math>-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}</math> 上都恰好有一個實數 <math>x</math> 使得 <math>\tan x = a</math>。這個唯一的實數 <math>x</math>，就記做 <math>\tan^{-1} a</math> (也記做 <math>\arctan a</math>)，讀作 <i>arc tangent a</i>。</p> <p><math>\tan^{-1} a</math> 的性質：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 當 <math>-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} a \leq \frac{\pi}{2}</math> 時才有意義。</li> <li>2. 若 <math>\tan^{-1} a = x</math>，則 <math>x</math> 在區間 <math>[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]</math> 上且滿足 <math>\tan x = a</math>，即 <math>\tan(\tan^{-1} a) = a</math>。</li> </ol>	
--	--

- 描述

台灣教材在十年級也就是高一的階段，以例題引出兩個變量之間的對應關係，當變量  $y$  的值是隨變量  $x$  的取值，依某一種對應法則而唯一確定時， $y$  就是  $x$  的函數。在教材中主要分為兩個主題：一個是「函數概念」，另外一個主題是「函數圖形」。

1. 函數概念

課本以幾個例題並圖示說明：「每個變量  $x$ ，都恰有一個對應的變量  $y$ 」後，再歸納出函數的定義，當  $y$  是  $x$  的函數時，用符號  $y = f(x)$  表示，變量  $x$  的變動範圍叫做函數  $y = f(x)$  的定義域。其次再透過幾個例題，分別呈現函數的不同面貌：圖形式的對應關係、表格式的對應關係、解析式的對應關係和兩集合元素之間的對應關係。

2. 函數圖形

課本主要介紹函數圖形的特徵，透過這些特徵，判別平面上哪些圖形不是函數圖形。而函數圖形是函數的幾何方式，利用函數圖形，使學生對函數的變化和走勢有一個具體的概念可以掌握。

台灣在高一下的教材進入三角函數，對於三角函數單元內的主題概數如下：

### 1. 銳角三角函數

利用平面幾何性質：相似直角三角形對應邊成比例導出任意直角三角形之三邊所成的六個比的比值隨其銳角的度數而變化，給定此銳角，這六個比的比值也隨角的大小確定。用這種方式引出定義於 $\{\theta | 0^\circ < \theta < 90^\circ\}$ 上之正弦、餘弦、正切、餘切、正割及餘割函數。接著利用平面幾何性質求得 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 角的三角函數，並介紹如何透過作圖法求出其他銳角的三角函數值。

### 2. 三角函數的基本關係

根據銳角三角函數的定義，引出倒數關係、商數關係及平方關係。利用這些關係，只要知道一銳角的某三角函數值，就可求出此銳角的其他三角函數值。由平方關係可導出 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ ， $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ 以及用 $\sin \theta$ 或 $\cos \theta$ 表示 $\tan \theta$ ，證明一些簡單的三角恆等式，最後再根據銳角三角函數的定義，導出餘角公式，作些求值的計算，學生須熟練基本關係的綜合應用。

### 3. 簡易測量與三角函數值表

介紹測量上常用的名詞，列舉幾個測量上的實例。由於實際上所遇到的角都不是特別角，每次用作圖法去求其三角函數的近似值既費時誤差又大，由之引出三角函數值表（含內插法）的必要性，介紹三角函數值表之使用，最後順便提出有關使用電算器求三角函數值要注意的事項。

### 4. 廣義角的三角函數

拓展銳角三角函數，以建立廣義角的三角函數，並探索廣義角與銳角三角函數的關係，作為理論研究和實際應用的基礎。介紹廣義角的意義及廣義角之三角函數值的定義，跟著導出同界角的三角函數值相同，以及倒數關係、商數關係、平方

關係對一般廣義角仍然成立，最後介紹如何化 $(-\theta)$ 、 $(180^\circ \pm \theta)$ 、 $(360^\circ - \theta)$ 、 $(90^\circ \pm \theta)$ 、 $(270^\circ \pm \theta)$ 的三角函數值為 $\theta$ 的三角函數值。

## 5. 正弦定理與餘弦定理

建立三角形的邊角關係的重要定理－正弦定理與餘弦定理。先引出 $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2}ab\sin C$ ，再由之引出正弦定理，討論 SSA、ASA 及 AAS 型解三角形問題。跟著導出餘弦定理，並利用此定理解 SSS 及 SAS 型的三角問題，以及證明平行四邊形定理。

## 6. 基本三角測量

利用正弦、餘弦定理、三角函數的基本關係及三角函數值表解決實際處理一般測量問題。

## 7. 三角函數的圖形

首先介紹角的弧度制單位、弧度的概念以及其與360度制單位的互換關係，然後引出以圓心角（弧度）表示弧長與扇形面積的公式，接著將三角函數的自變數（角）以弧度為單位表出，而以弧度為單位的自變數為一實數，視三角函數為實數間的對應關係。因而可以在坐標平面描繪其函數圖形，進而探討函數值的變化情形與其他相關特性。

描繪函數圖形最簡單的方法就是描點法：先在坐標平面標出圖形上的一些點，然後依次以平滑曲線連結起來，即得出其概略的圖形。為了便於描點，並看出函數的變化情形與周期等特型，課本中引用正弦線段、正切線段的觀念來描繪正弦函數及正切函數的圖形。

## 8. 和角公式

課本利用 $\cos 15^\circ$ 之值的問題，引出餘弦函數的差角公式及和角公式，再利用餘角關係引出正弦函數的和角及差角公式，以及正切函數的和角與差角公式。課本同

時利用兩角  $\theta_1, \theta_2$  的函數值表示  $\theta_1 + \theta_2$  與  $\theta_1 - \theta_2$  的含數值公式，作為推導更多的函數值的依據與研究相關應用的基礎。

### 9. 倍角、半角公式

倍角公式是和角公式的特例，課本中針對正弦、餘弦與正切函數的二倍角、半角公式都有推導過程，利用和角公式推導倍角公式，再轉化而得半角公式，教材提供相關的置換公式，方便學生做倍角公式及和角公式間的轉換。

### 10. 和、差與積的互化

和角、倍角、半角公式以及和、差與積的互化公式等，在作三角量的轉化時常被用到，教材中利用和、差角公式引出和、差與積的互化公式。

### 11. 正弦餘弦函數之疊合

先介紹如何將  $y = a \sin x + b \cos x$  ( $a, b \in R$ ) 轉化為  $y = r \sin(x + \theta)$  或  $y = r \cos(x + \phi)$  的形式，再探討一些由  $\sin x$  與  $\cos x$  組合而成之函數的最大值與最小值問題，也就是學生要知道三角函數結合形成的新函數之變化及值域範圍的相關問題。

### 12. 反三角函數的基本概念

教材中介紹  $\sin^{-1} a$ 、 $\cos^{-1} a$  及  $\tan^{-1} a$  之定義，以及反正弦函數、反餘弦函數及反正切函數，並順帶提到有關方程式  $\sin x = a$ 、 $\cos x = a$  及  $\tan x = a$  之求解問題。

英國在十年級 for GCSE 的教材介紹畢氏定理，接著有一個教導如何使用計算機的單元，相似形的單元中則介紹了相似三角形。斜率、地圖與平面圖和比等單元則同時複習中學階段的知識也加入少許新的內容。三角函數的內容也出現在 for GCSE 的教材中，不過主要是三角比的內容，先介紹正切函數後，間隔了幾個單元，再介紹正弦和餘弦函數。

英國介紹正切、正弦、和餘弦函數，都是先由課本的圖例開始說明，請學生實際繪圖並測量後，課本再歸納結論。學生測量的結果多為帶有小數的近似值，

不過教材在「正切函數」及「正弦和餘弦函數」兩個單元中，並沒有要求學生使用根號計算，所有的例題和練習題都是請學生將結果四捨五入到小數點下所規定的位數，而且可以使用計算機。

- 比較

1. 三角函數

台灣和英國在十年級的教材都編製三角函數的單元，而本研究的主題就是比較與三角函數的有關的知識在台灣和英國教材中編製之異同。

(1) 台灣和英國皆在十年級出現三角函數，但台灣的教材內容明顯較深且廣，一口氣完成大部份三角函數的內容，從直角三角形介紹三角比，包含三角函數的定義、倒數、商數、平方的關係，進而延伸至廣義三角函數值，再推得正弦定理、餘弦定理、正餘弦的差角公式、正餘弦和角公式、正切函數的和差角公式、兩倍角公式、半角公式、積化合差及和差化積公式。最後更引入正餘弦函數的疊合及反正弦函數、反餘弦函數和反正切函數等較深入的三角函數內容。台灣在高一的教材採用了文獻探討 2.2.1 所提到以三角形邊的比率定義了銳角部分的三角學，但同時也以 Eli Maor 所提出的形式化方式定義三角函數；對於廣義角三角函數，台灣則以坐標平面上的象限角為主要闡述對象。

英國方面僅對三角比的部分有詳細的介紹，教材只出現以三角形邊的比率定義了銳角部分的三角學。請學生實際繪圖和測量，對於三角函數的倒數、商數和平方的關係，英國教材中沒有強調，但在正弦和餘弦函數的單元教材中有出現與畢式定理相關的圖示，稍微暗示了三角函數的平方關係。

(2) 台灣對於六種三角函數都有介紹，英國只有介紹正弦、餘弦和正切函數。

(3) 台灣有介紹海龍公式、半角公式、積化和差與和差化積的公式、反函數，英國則請學生用計算機按出反三角函數的結果。

(4) 台灣和英國都有介紹三角測量與應用，但英國的三角測量內容較為簡單。

(5) 台灣和英國都有介紹查表，但台灣查表的教材內容更為完整的介紹內插法，英國的查表部分只有整數銳角角度的簡表，簡表中的數字只到小數點下兩位。

(6) 台灣和英國教材都有介紹計算機的使用方法，但英國在大部分的練習題中都鼓勵學生使用計算機，相對的台灣教材都請學生以根號表示計算出來的結果。

(7) 台灣在三角函數教材中還有介紹到複數的極式表示法、棣美弗定理和 1 的  $n$  次方根等，英國則沒有。

## 2. 函數概念

台灣中學的教材，雖然編有方程式及其圖形，但還沒有說明方程式的斜率和截距，更不強調函數的概念；在十年級也就是高一上學期時，教材從函數定義介紹起，直到解釋函數圖形變化及趨勢的意義後結束，可以說台灣在一年內交代了關於函數的大部分知識，只差還沒利用微積分相關概念去解讀函數圖形了。英國對於函數概念，從中學七年級就有相關教材，教材中強調函數就是一種規則，對於函數圖形來說，英國九年級就開始介紹斜率，for GCSE 的教材中更強調學生要能解釋方程式（一次函數）圖形的斜率意義。

### ● 分析

雖然台灣和英國都是由直角三角形的三角比開始進入三角函數教材內容，但是英國教材從正切函數開始介紹三角函數，然後才進入正弦和餘弦函數，與台灣從正弦函數開始慢慢推向其他的三角函數，是很不同的教學切入點。英國在教正切函數之前，對於解讀函數圖形的斜率概念，其實就有隱含正切函數計算形式上的意義，當學生計算斜率時，就是利用「垂直的變化量」除以「水平的變化量」，而正切函數的計算也就是直角三角形中某個銳角的「對邊」除以「鄰邊」。

另外研究者發現，英國正切、正弦和餘弦函數的教材中對於求直角三角形中未知邊長，計算的形式上都是先從乘法開始再進入除法，以正切函數而言，就是給定直角三角形中某銳角鄰邊的邊長及此銳角的正切函數，指導學生求對邊的邊長，此時學生的計算僅需用到乘法。爾後給定直角三角形中某銳角對邊的邊長及此銳角的正切函數，再指導學生求鄰邊的邊長，此時學生的計算就需用到除法。

在正弦和餘弦函數部份的例題，教材都是先給定學生斜邊長度和銳角的正、餘弦函數值，學生利用乘法即可求對邊長和鄰邊長。

英國三角函數單元中的計算結果，雖然都以小數形式呈現，但英國在 for GCSE 的教材尾聲，倒數第二單元－「Exactly so」中還是有介紹無理數的表示法，也就是根號形式的表示法，此時學生計算畢氏定理和三角函數的結果才開始用根號形式表示，而對於圓周長及圓面積的計算結果，教材也在此單元請學生一定要使用  $\pi$  的形式，儘管如此教材中還是同時呈現了某些根號的結果與其近似值，例如對於  $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$  的直角三角形，教材先說明  $\sin 45^\circ$  就是  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，然後請學生用計算機按  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  的結果大約是 0.707...，再請學生用計算機按  $\sin 45^\circ$  的結果大約是 0.707...。

- 本年級教材內容與三角函數的關聯性

台灣和英國在十年級的教材都有介紹三角函數，而兩國教材中對於函數意義及函數圖形的概念，也都在編製三角函數單元前，更加深入的介紹。表列英國的其他單元內容，則為英國在介紹三角比及三角測量所需用到的基礎知識。

## 4.2 依主題比較、評析與三角函數相關內容

本節將分析與三角函數相關的知識主題，由於比較英國教材文本的目的是為了探討教材中三角函數的先備知識和相關知識的連結，給予台灣教材編製的建議，故並列、比較和評析將配合數學課程標準的內容，4.1 節中藉由內容摘要的並列表可看出台灣與英國在各年級的教材內容，並做了初步的比較和分析，本節則依據九年一貫 92 綱要及高中 95 暫行綱要之分類精神，所分析的數學內容大致分成以下三大數學課題做比較：數與量、代數（含關係、樣式、函數）及圖形與幾何，以較 4.1 節深入的主題方式比較評析，將台灣和英國教材中三角函數相關的知識分述歸類在各數學課題和列點的項目中。

- 數與量

### 量與測量

#### 1. 角度

三角函數發展的歷史過程中，很重要的一個目的就是為了測量，所以學生測量角度和對角度的認知與學習三角函數有關。

- (1) 台灣比英國早使用測量角的工具；台灣在四年級，英國在五年級使用量角器。
- (2) 台灣比英國早認識銳角、直角和鈍角，但英國教材中螺旋式介紹的次數較多；台灣在三年級，英國在五年級認識銳角、直角和鈍角。
- (3) 台灣比英國早以操作的方式進行比較角的大小，不過英國教材中是先比較普通角和直角的大小，台灣教材中可以考慮採用，以增加學生對直角的認知經驗。
- (4) 台灣和英國均有教導學生使用量角器測量角度，在英國教材中更提出學生使用量角器常犯的錯誤，希望學生能夠注意，台灣可在教材中增加這些注意事項。
- (5) 台灣和英國都沒有在三角函數單元前介紹 1 度為 60 分的單位，學生可能受到生活中十進制概念的干擾，會查三角函數表但還是查錯值，而產生查表錯誤的錯誤類型。
- (6) 英國比台灣更注重估計測量，這與英國教材比台灣注重估算有關。

## 2. 三角形面積

三角形面積與三角函數單元中推導正弦定理有關。

- (1) 台灣和英國都在五年級開始發展圖形面積。
- (2) 台灣在中學七年級，英國在中學八年級提出三角形面積計算公式，台灣和英國在推導面積公式的發展流程相同。

## 3. 圓

圓與三角函數相關的地方在於弧度量，學生要學習弧度量的計算後才容易了解並操作廣義角三角函數。

台灣在小學就開始介紹圓，圓周率在小學就已經提出；英國首次提到圓在九年級，台灣對於圓周長和面積的介紹較英國完整。對於角度和弧度的弧度量換算關係，台灣和英國在三角函數教材之前都沒有相關的例題。

台灣在七年級教材定義了弧的度數等於它所對圓心角的度數，這樣定義弧度與十年級弧度的定義：「規定常數 $\frac{360^\circ}{2\pi}$ 為一弧度」有很大的不同，前者是從幾何的觀點定義弧度，後者是從數與量單位換算的觀點定義弧度，教材中定義的不一致，可能讓學生產生困擾。但三角函數單元中，其實是以數與量單位換算的定義為主，建議台灣在單位換算的教材中先以形式化的方式介紹度和弧度轉換，讓學生熟悉度和弧度轉換，先知道一種轉換的規則，對於其意義可稍晚闡述，如此可避免學生換算錯弧度量而干擾了學習廣義角的概念。

## 4. 平方、平方根

英國在七年級教材的第 17 單元「Number patterns」出現了平方的計算，在七年級教材的尾聲，「Know your calculator」單元中第一次介紹平方根的計算，接著在八年級正式完整介紹平方、平方根的內容；台灣處理平方、平方根的問題與介紹畢氏定理有相當程度的關係，教材編列平方、平方根的單元數沒有英國教材多。

- 代數（含樣式、關係、函數與坐標圖形）

1. 未知數/未知量

對於未知數與未知量的計算，台灣和英國都在小學的教材在求未知角度的時候都有出現，不同的地方在於對於未知數/量的符號，台灣小學用（）、□代替未知數/量的記號，直到中學才引入  $x$ ，英國從小學開始就用  $x$  代替未知數/量。台灣數學教材可與語文領域做結合，提早引入英文的代數符號。

2. 方程式

台灣在中學八年級教導了一元一次方程式和二元一次方程式，並強調解方程式；英國對於方程式沒有設專門的單元，但從小學就開始例示解一條直線上未知角度和在一個三角形內求一未知角度的種種教材，就可以知道英國學生還是會求一元一次方程式的解，英國教材較沒有強調二元一次聯立方程式的解題計算。英國強調方程式本身及方程式圖形在平面坐標上的意義，並且在教材中暗示了方程式、規則及函數的關係。

3. 函數

台灣在國中階段沒有對函數作名詞上的介紹，但是英國發展函數概念，則從中學七年級就開始，台灣教材在高一上學期一次介紹完成函數所有的概念。對於函數性質，英國介紹了斜率、截距的概念，教材中希望學生能看出函數圖形的趨勢。

相較英國對於函數性質的介紹，台灣教材在國中階段闡述的實在很少，英國教材用長時間鋪陳函數的概念於 SMP 教材中，卻還沒有應用函數性質在 for GCSE 三角函數的單元中。反觀台灣學生在高一上學習函數，高一下就要在三角函數的單元使用函數性質，台灣鋪陳函數到三角函數的時間就顯得過趕，對於三角函數的教材設計也顯得過深。

4. 方位

對於三角測量的主題而言，方位是一個重要的概念，要在坐標平面上先判斷方位，學生依照三角函數定義求出的結果才會正確。台灣和英國都設計有方位的

教材，不過英國關於方位的教材，則有更多具體的地圖，讓學生經由回答相關問題，熟悉方位的概念。

## 5. 坐標平面

英國從小學就開始有坐標平面的教材設計，在坐標平面的單元中，總以表示方向和位置為教學主軸。台灣於中學才有坐標平面的單元，教材設計上與英國相較，台灣教材編製坐標平面單元前還有一個數線的單元，從一維推向二維，讓學生先熟悉數線並操弄數線相關的符號。

從一維數線推向二維的坐標平面或直接教導學生二維的坐標平面，對於三角函數的教學影響不會很大，畢竟這只是對於幾何的認知歷程有不同的觀點，就有如該從平面上介紹圓，還是從一個球的投影介紹圓？對於教導三角函數內容影響較大的是，學生到底能不能在坐標平面上操作與代數運算有關的測量，像是知道兩點的坐標就該知道這兩點的距離以及這兩點的中點。如果不會求兩點的距離，就算熟記了三角函數三角比的定義，也是無法求得三角函數值，不過台灣暫行綱要的教材和英國 SMP 教材都沒有給定兩點坐標，算出兩點距離的教材設計。在英國教材或許還情有可原，畢竟英國教材所設計的三角函數單元並不需要在坐標平面上處理關於畢氏定理與三角函數結合的問題；台灣在三角函數的教材中除了需要學生處理畢氏定理與三角函數結合的應用問題，甚至教材中示範推導餘弦定理的過程，也出現了兩點距離的代數運算，台灣教材如果不能提早讓學生熟練計算坐標平面上兩點距離，這也難怪學生會算錯坐標平面上某三角形銳角的三角函數值。

坐標平面上的象限角，也是台灣教導三角函數單元的一個主題，學生要很熟悉地操弄坐標平面上各象限的「+」、「-」符號，才有辦法依照定義求出所需要的三角函數值，如果不熟悉的話，就會出現研究者簡志明提出的廣義角錯誤類型—「各象限角的三角函數值正負判斷錯誤」。台灣在中學八年級以一個單元介紹坐標平面，而英國與坐標平面相關的教材從小學三年級起到中學九年級以螺旋的方式至少呈現六次，本論文不果斷的提出教材編製有越多相關內容，學生就能學的越好的定論，但是平心而論，英國學生操弄坐標平面上「+」、「-」符號的次數、熟悉坐標平面上「+」、「-」符號的機會比起台灣學生至少多了五次。

## 6. 關係

### (1) 比

台灣在小學六年級就介紹了比的記號和概念，英國教材在中學七年級的相等分數單元中提出關於「比」的基本概念，但是英國在中學八年級第一次使用比的記號。台灣和英國教材都先以數兩堆不同物體個數的方式，引出比的概念。如果將「比」視為兩個數字、兩個度量單位或兩個數量的倍數比較，英國以相等分數的單元做為介紹比的前置經驗是一個不錯的教材編製，因為相等分數中，就牽涉到約分，分子和分母同時乘上或除以某數，和比的前後項都乘上同一個係數的意義是相同的。

### (2) 比例

台灣和英國教材皆在介紹比例的概念後，引導學生進入相似形的課題。台灣在九年級介紹比後介紹比例式，注重分數形式的意義，例如：比的後項也就是分母不為0、注重內項積等於外項積的運算技巧也介紹連比。比例教材設計台灣比英國教材更注重數學上的意義，也比較形式化。但是台灣教材在介紹比例式的時候，不強調與比相關的性質，如和比、分比性質等等，可是這些性質卻可能大量應用到處理三角函數單元中三角恆等式的相關證明問題，所以台灣設計三角恆等式證明問題時，應注意是否需要使用與比相關的代數性質，如果需要就應該盡早對這些代數性質在教材中做鋪陳。

### (3) 比值

台灣對於比值的介紹，比較傾向於比值就是把比寫成一個數的形式化意義，但相較於英國教材設計則以概念型的意義為教學目標，期望學生學習比值後能將比值視為判斷兩個量是否成比例的標準。

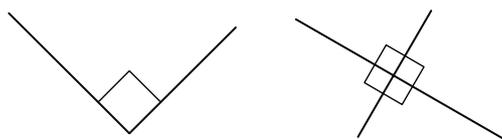
- 圖形與幾何

1. 水平

台灣小學教材對於學生認識水平概念的活動設計顯得很具體，讓學生觀察水杯置於桌面上水面平靜的時候，比英國用敘述句的方式定義水平來的好，符合 Van Hiele 的幾何思維層次第 0 層次的視覺化階段。

2. 垂直

垂直概念是學生進入直角三角形很重要的一個環節，台灣三年級介紹垂直的教學活動設計如同教導水面概念一般，比英國用陳述的方式來的好，也符合 Van Hiele 的幾何思維層次第 0 層次的視覺化階段。但是英國對於示意垂直概念的圖形則顯得刻意製造學生認知衝突，強化學生對於垂直的概念，圖示的直線都斜斜的，但還是互相垂直，這是台灣教材可以學習的部份。



值得注意的是，台灣和英國教材將圖示垂直概念與兩直線交角成  $90^\circ$  關係，都可以再加以陳述，學生對文字理解的不清楚，在沒有圖示的情形下可能會造成學生並不知道直線 L 垂直直線 M 就代表 L 與 M 相交成  $90^\circ$ 。

3. 平行

對於發展平行的概念，台灣教材也比英國早開始介紹，平行線常搭配相似形和圓的幾何性質，出現在三角函數的單元。英國教材示例完成平行的活動為，請學生拿著一隻筆在桌面上滾動。但台灣和英國教材都有類似活動例示著使用直角板繪圖實驗。

4. 三角形

三角形是進入三角函數的必要基礎知識，從小學起台灣和英國都對這部份的知識開始陳述，台灣學生又比英國早認知直角三角形。對於三角形的性質，台灣教材比英國描述的多，台灣有介紹關於三角形的邊角關係，幾何證明的單元更

是以三段式論證，讓學生熟悉使用全等性質；對於三角形圖形的概念，英國教材中呈現的勞作活動比台灣多，像是學生能夠做出柏拉圖正多面體。

台灣在七年級三角形的性質教材中，介紹了兩邊中點連線性質，這個部份的教材設計顯得突兀，因為介紹兩邊中點連線性質前，教材一直在介紹形成三角形邊的條件，鋪陳三角形的邊角關係（如：大邊對大角），在沒有複習平行概念的情況下，出現了一個相當重要的性質，看起來卻是獨立的一個主題。

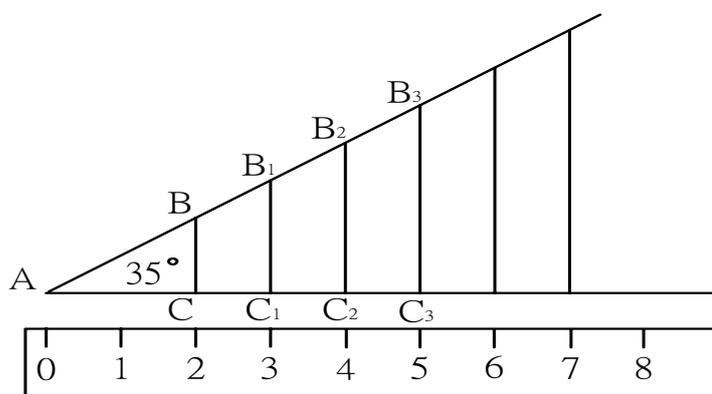
## 5. 圓

圓的性質與三角函數搭配會使三角函數內容產生極大的變化，尤其是三角形內切圓與外接圓的相關問題，台灣在九年級有介紹三角形的外接圓，英國在進入三角函數單元前沒有對於這部份的幾何意義多加闡述，只介紹如何計算圓周長和圓面積。台灣方面因為三角函數的單元內容較多，如果遇到三角函數與圓搭配的課題，銜接上會產生比較多的困難。

## 6. 相似形

台灣和英國都在介紹相似形後，介紹相似三角形。運用比例將圖形放大與縮小是教材的主軸，但其實相似三角形與三角函數有關的部份，在於介紹三角函數三角比之比值為定值的定義。英國教材在介紹正切函數時的教學或活動，就隱含了相似形與某銳角之「對邊」與「鄰邊」之比值為定值。

例如：在下圖中的 $\triangle ABC$ 為一個直角三角形，其中 $\angle C = 90^\circ$ 。



英國教材在例題中請學生去測量  $\angle A = 35^\circ$  的對邊  $\overline{BC}$  和鄰邊  $\overline{AC}$  的長度，並請學生將比值算出來，藉由相似形的性質，請學生發現  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} \dots$  的

比值不會隨著三角形的大小而有所改變。台灣教材也利用相似三角形說明三角比的比值為定值，但並沒有設計相關活動。

## 7. 畢氏定理

台灣和英國都只有一個單元介紹畢式定理，介紹畢氏定理之前，台灣和英國的學生都會代數計算平方和平方根，但是台灣學生是八年級下學期學會了平方根的主題就進入畢氏定理主題；英國的教材在八年級教完平方和平方根的主題後，十年級才介紹畢氏定理，而這中間間隔的教材，則不時的出現一些平方根的習題，讓學生螺旋的複習。可以知道的是，英國教材讓學生有很多機會練習平方根的問題，台灣學生對於平方根練習題可能不夠多，導致應用畢氏定理時計算出錯，再加上畢氏定理和三角函數定義沒有搭好，就會發生不清楚三角函數平方關係的定義的情形，而產生研究者陳忠雄所提出的定義類型錯誤。

- 連結

### 計算器

英國數學課程規定，對學生的計算能力要作全面訓練，使學生掌握心算法、紙筆算法和電算機算法等一系列技能，在 for GCSE 的教材中更是在第三和第二十單元分別安排了心算法、紙筆算法（Mental and written calculation）和使用計算器（Using a calculator）的單元，《標準》中也提出一些具體要求[10]，如：

- (1)指定使用某種算法；例如，對形如個位數乘以十的數，用心算作乘除法，限於答案為整數。
- (2)排除使用某種算法；例如，規定不用電算器，進行三位數加減法，以及進行兩位數乘以個位數的乘法。
- (3)不限定算法；學生可使用任何算法，計算或驗算答案。

英國教材介紹無理數運算，比台灣教材少了許多，SMP 與 for GCSE 教材的計算答案仍以小數點表示為主，但在大部分的單元中，英國教材鼓勵學生使用計算器算出答案，並做出估算和判斷合理的答案。以正切函數為例：相較於

台灣教材注重學生使用無理數的形式表示答案，英國教材則是請學生根據書本上的例示自己繪圖測量，並依照正切函數的定義，將實際測量值代入並使用計算機按出結果。

GCSE 教材中對於三角函數的查表也有介紹，但沒有台灣教材來得深入，for GCSE 教材僅介紹如何利用查表和使用計算器的方式轉換三角函數值與角度，沒有如同台灣還需要將廣義角的概念與內插法的應用做結合。另外英國的三角函數值簡表就在教材單元內容中，台灣的三角函數值表則在教科書附錄中；對於  $\tan 90^\circ$  英國教材在單元中以文字提問的方式請學生討論。英國教材例示學生除了看查表後的所得到的值，也可配合計算器加以驗證結果；在 for GCSE 教材，以無理數表示畢氏定理計算結果的「Exactly So」單元中，更是請學生驗證自己計算，查表與按計算器結果的數值。

### 4.3 教材中呈現的概念構圖

以下小節將圖示研究對象中所表示的三角函數概念構圖，英國 for GCSE 的教師手冊中將各單元間的關係以一張概念圖呈現，台灣南一版小學各冊教師手冊也都呈現以單元名稱連接成的概念關係圖，但在國中教材只出現如附錄二中所呈現的本章教材、已學習和未學習的能力指標間之連結。台灣在高中南一版的教師手冊呈現了單元內各主題關係的概念圖，並試圖連結學生在過去和未來所學的三角函數相關主題。

如文獻探討所述，概念構圖能將概念與概念間、主題與主題的關係外顯，台灣和英國教材都在教師手冊提供概念構圖，英國單元間的主題關係圖或許能給台灣教材編製作為參考。但研究者認為更值得討論的課題為，概念構圖是否需要提供給學生當作教材的預備或是複習使用，而不只是出現在教師手冊？還是學生應自行建構預備知識或複習使用的概念構圖？亦或是教師適切的引導學生完成概念構圖，並利用適當的評量方式，確定學生都了解概念圖中的主題，以確保學生有足夠的知識和能力進入新的學習主題？上述的問題也有待未來研究者加以實證探討。

在 4.3.1 中，可以看到 for GCSE 的教材在進入三角函數前，概念圖連結線與三角學（第 42 和 49 單元）相連的單元分別為第 1、25、37、38、56 及 62，當然還有許多第 42 和 49 單元前的其他單元會影響學生的學習經驗，像是第 35 單元 Gradient（斜率）。英國螺旋式地設計教材，使學生在進入三角函數單元前，還有許多單元可以建立相關知識，但三角函數單元內討論的三角學課題卻沒有如同台灣深入。由 4.3.2 台灣三角學的單元內構圖可以看到，學生的確在一學期內學習了許多三角學知識，而台灣、英國教材中經由概念構圖呈現與三角函數有所關聯的數學主題也已經在 4.1 和 4.2 節加以討論分析之。

### 4.3.1 英國 for GCSE 教材單元間概念構圖

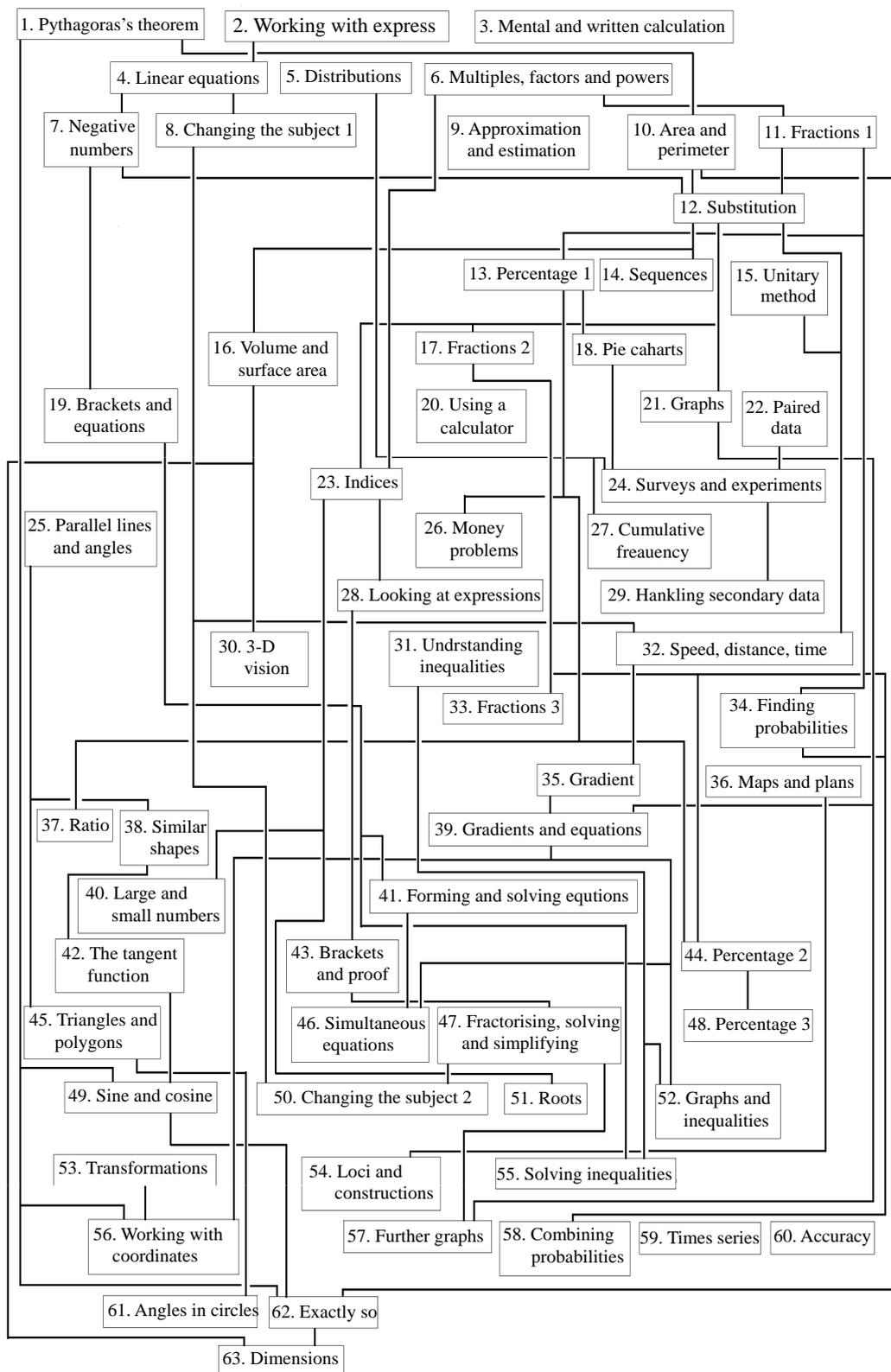


圖 4-3-1 for GCSE 教材單元間概念構圖 (引自 for GCSE 教師手冊)

### 4.3.2 台灣南一版三角函數教材單元內概念構圖

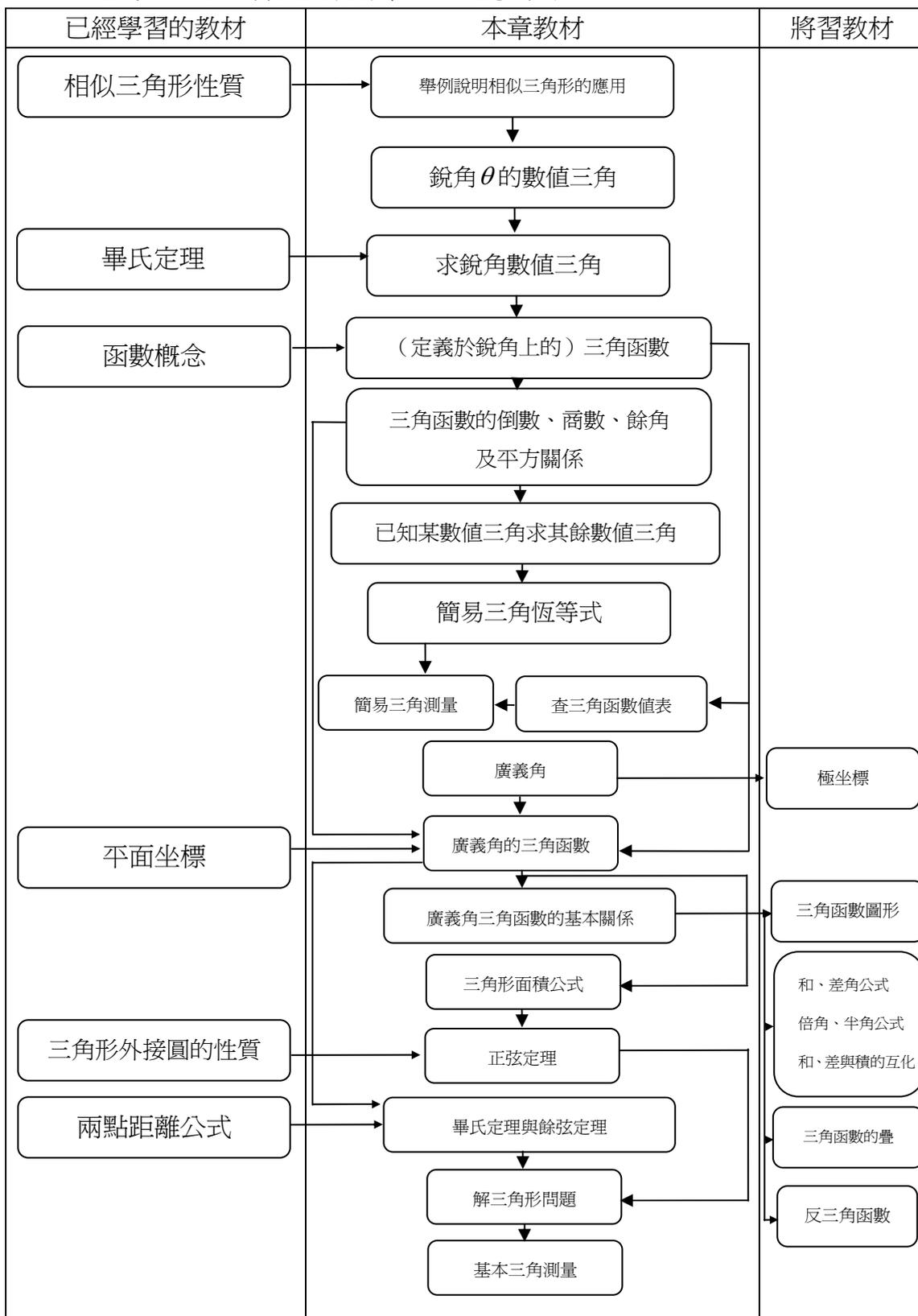


圖 4-3-2 台灣南一版三角函數教材單元內概念構圖 (引自 南一教師手冊)

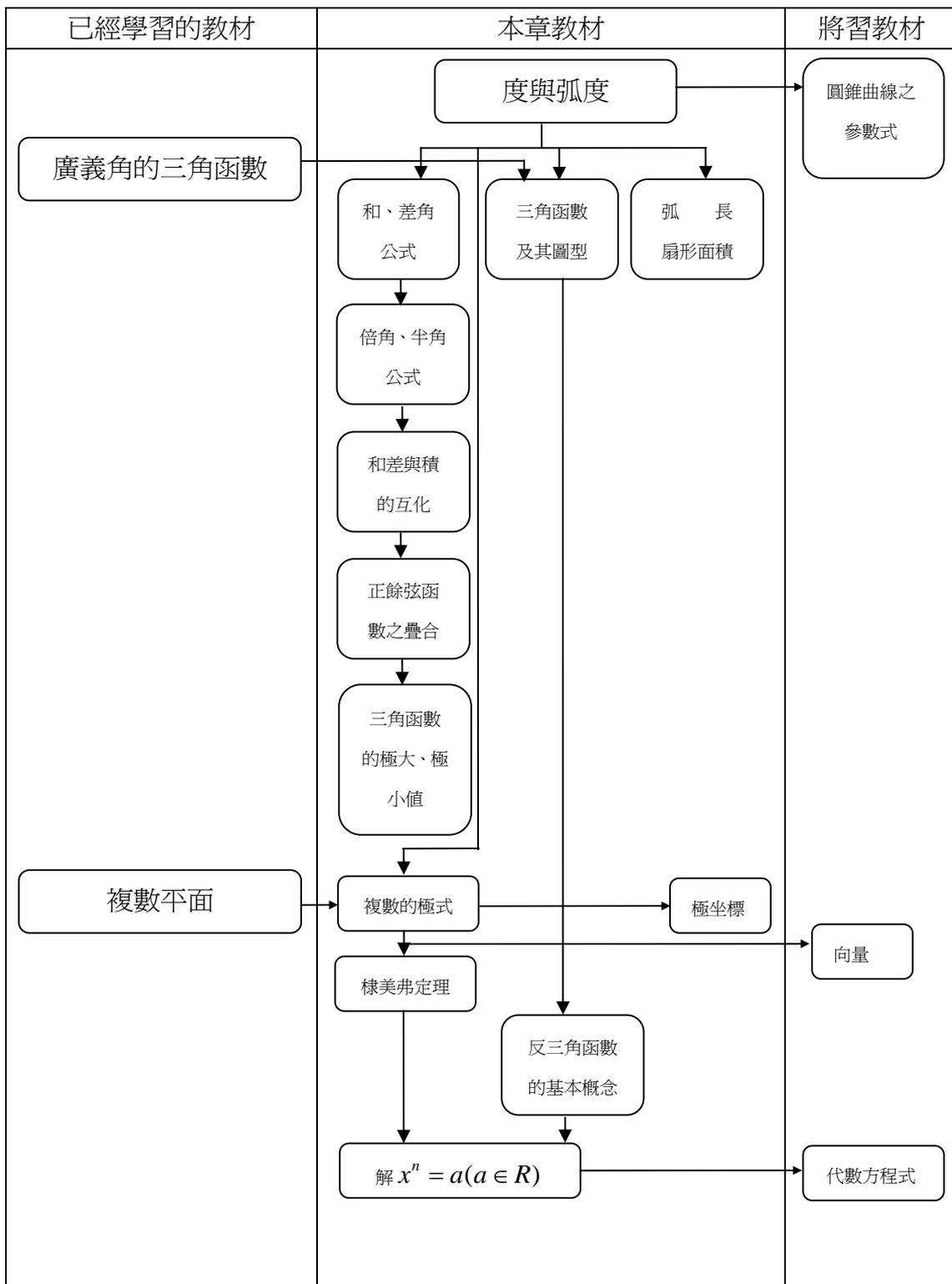
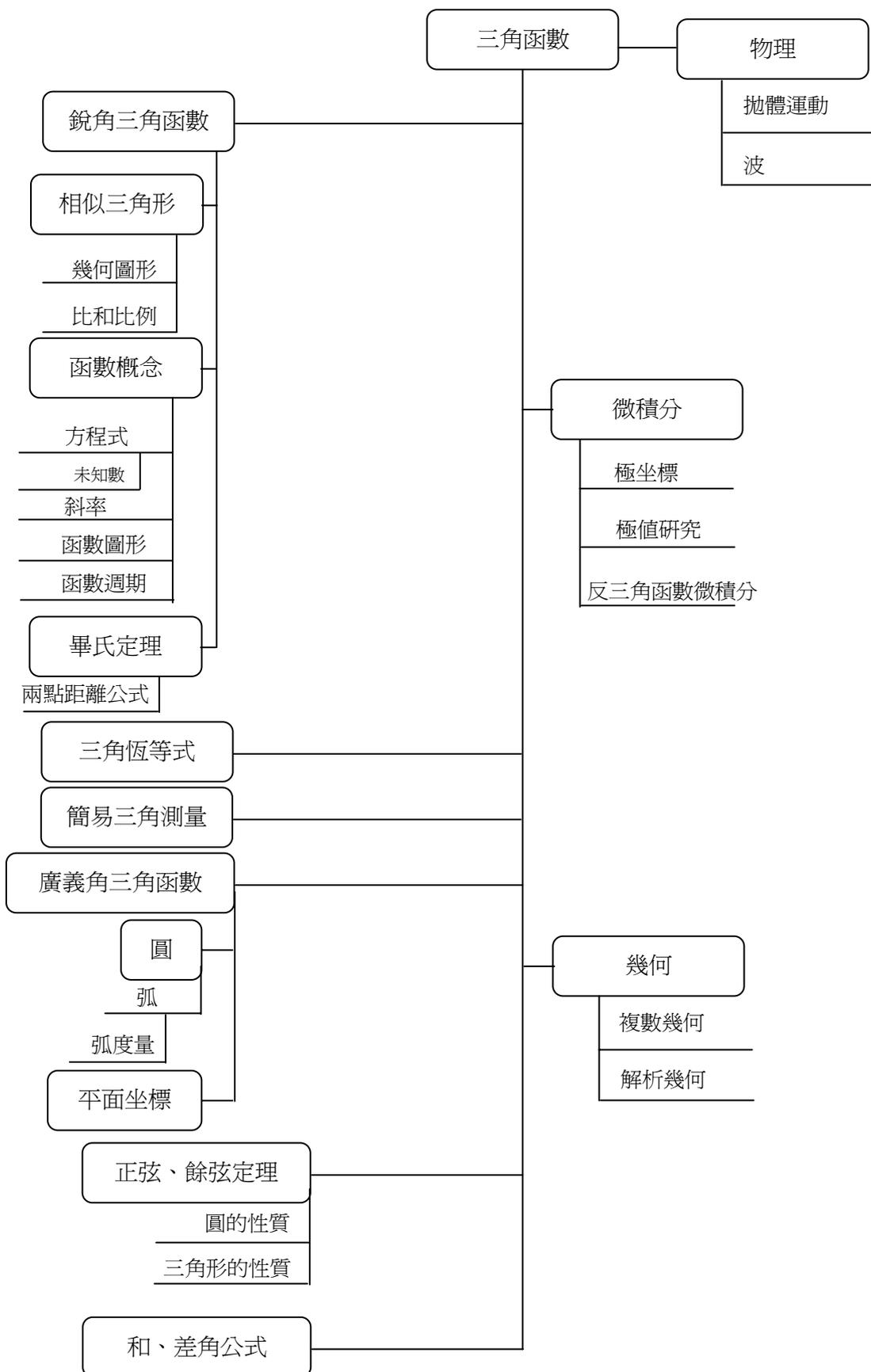


圖 4-3-3 台灣南一版三角函數教材單元內概念構圖（引自 南一教師手冊）

### 4.3.3 整理自 4.3.1、4.3.2 與附錄一之概念構圖



#### 4.4 教材中呈現的潛在課程

潛在課程也會在學生學習的過程中，影響學生學習狀況。研究者歸納潛在課程可能的校內來源，在教材方面是以「內容」、「型式」和「作業」為主[33]。當然還有教師教法、學校組織及教學環境等等方面所形成的潛在課程，潛在課程可能影響學生學習數學的歷程，但是本研究以研究教科書文本為主，故將探討的項目鎖定在教材方面的潛在課程影響三角函數教材編製與學生學習狀況之可能性。

- 英國綱要與教材呈現的機會均等

就《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》[10]的闡述，英國家長並不會排斥分科能力編班，將特定科目學習較慢的學生編在一班，或是將對於某個科目性向較強的學生編在一班，讓他們以不同的教材和不同的進度來學習。與英國教育相當類似的新加坡和紐西蘭都這樣做，所以不應假設英國不這樣做。

以《標準》而言，前三個階段的課程標準只有一種版本，但是在第四階段分成兩種版本：Foundation 和 Higher。國定標準要求第三階段結束時（9 年級）的數學能力至少達到水準 5（Level 5），而較好的學生達到水準 6。如果 9 年級結束時的評量還不到水準 Level 5，則到了第四階段（10,11 年級）就要根據 Foundation 課程標準來授課；其他學生則按照 Higher 課程標準來授課。

就數學教材而言，SMP 教材依照著《標準》的內容制定，在 KS3 學段 SMP 教科書分為三個系列，分別是 T series（最淺），S series（中等）及 C series（最深），事實上英國大部分出版社所出版的 KS3 教材也都依照水準分了三個系列。每個系列（series）分別代表著不同水準範圍，本研究選用 S series 為研究對象，主要原因是選擇一個水準平均值內的教材與台灣做對照。台灣的綱要和教材可參考英國數學科不管是在綱要或教材上，以不平等對待不平等，以不同的水準要求不同能力的學生，製造學習機會均等的用心，但或許台灣的家長還不能接受這樣的理念，所以建議先由銜接教材開始著手，畢竟銜接教材的一項重要作用就是補強各個不同程度的學生，讓他們能夠順利銜接上後其中等教育課程。

- 能力指標間的關聯性

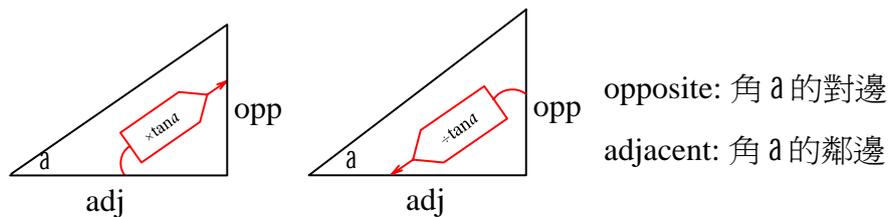
在台灣九年一貫的課程綱要中，我們可以整理出 N-2-17 和 S-2-07、N-2-19 和 S-2-08、N-3-14 和 A-3-05、N-3-15 和 S-3-03 及 N-3-16 和 S-3-06，兩兩能力指標雖然歸類在不同的學習主題，但內容是一樣的。像是能理解長方形面積、周長與長方體體積的公式（N-2-17 和 S-2-07），除了需要數與量的學習主題，幾何圖形上的認知也是不可缺少的。相較於台灣以相同的能力指標內容呈現學生應學習到的能力，英國的《標準》在結構上有一個特色是交叉索引。《標準》[E4] 的排版格式乃是將正文安排在靠內側三分之二的版面上，在靠外側的三分之一空白處寫上註解（Notes）和外部指標（ATTAINMENT TARGET）。其中註解通常是關於教學內容的闡述，指明此一項目與未來學習的關係。例如講相似三角形的對應兩邊比值不變的時候，註解中說明這個觀念是未來學習三角函數的前置經驗。

- 教科書外觀

台灣和英國的數學教材都有教科書本、習題習作本、教學指引或教師手冊。值得一提的是英國小學 Elmwood Press 所出版之「Target Maths」教材為完全黑白的講義形式，研究對象的英國小學及中學習題習作本、教學指引或教師手冊也都是黑白單色呈現，這是與台灣教材非常不同的地方，或許顏色對於數學應該僅止於符號上的意義而已，但小學就以如此不活潑且形式化的教科書本呈現教材，是否會影響學生的學習狀況是值得探討的問題。不活潑的編排方式可能讓本身對於數學感到乏味的學生更排斥學習，形式化的教材或許制式，但學習目標與題型歸納明確，也可能是幫助學生學習的設計，畢竟年紀小或是還摸不清楚學習方向的學生依循著明確規範，比較容易在形式化的制約過程中，確保學習到一些基本知能，而這也是行為主義學習理論的想法。

- 符號的操弄

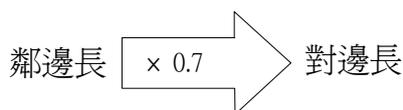
英國的教科書中可以看到比台灣多了一些無關數學本身的表格或符號，但這些記號卻可能隱含了教科書編者所沒有強調的數學概念或事實，以英國正切函數為例：



$$\tan a = \frac{opp}{adj}$$

英國教科書中常出現  這類符號，在正切函數八頁的單元中出現了三次，在正、餘弦函數十四頁的單元中出現了共九次。

在三角函數單元中出現的時機為引導學生填入數字或需要給定數學記號，這類符號本身代表了數學上轉換的過程，有點類似於函數的概念，就是給定一個規則，輸入數字後則會產生一個輸出結果，像是英國  $\tan 35^\circ$  的例題，輸入角的鄰邊長再乘上 0.7 可求出對邊長。



英國教材中不直接給學生推導出結論的規則，常常是先要求學生依照例示的步驟實際操作後，教材才歸納整理出相關的文字敘述。像是上圖「 $\times 0.7$ 」，教材中先請學生測量許多銳角為  $35^\circ$  的直角三角形之對邊長。台灣的教材少有這類符號，多由空格形式的填充題出現。這些符號的出現在認知結構中是否有助於學生記憶編碼，將看到的符碼轉換為意碼作為長期記憶的一部份，也是值得探討的議題；但對於研究者而言這類符號不時地出現，讓研究者認為英國教科書編者或許正有意無意地影響學生後設認知，讓學生時常有機會在一種轉換的過程中操作符號或規則，進而內化為學生處理數學相關問題的一種方法，然而這類符號的操弄是台灣數學教科書中所少見的。

- 數學符號的使用

英國 SMP 教科書中，教材表示運算中所使用「+」和「-」號的習慣與研究者的認知有很大的不同，英國教材在計算例題中呈現「+<sup>-</sup>」，如此正負號相連的情況，與一般強調運算符號與性質符號之間以括弧相隔「+(-)」，是非常不

同的，雖不知道是否是教材排版錯誤，亦或教材編者其實有特別的目的才設計這樣的教材內容，可以知道的是台灣學生在計算題中，以 $+$ ( $-$ )符號的運算常常會發生忘記處理變號的現象，如果不適當的相隔，相信學生在計算過程中會遇到更多的問題。

在八年級的 SMP 教材，第 13 單元「Negative numbers」中，學習目標為使用四則運算及負數（use all four operations,  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  and  $\div$ , with negative numbers）教材中就呈現了一些令研究者感到雞皮疙瘩的題目，像是 $-5 + -2 = -7$ ， $4 \times -3 = -12$  及  $-2(3 + -7) = 8\dots$ 。

- 教材結構內容

英國教材不斷螺旋式呈現許多課題，這與台灣教材設計是不一樣的地方，台灣教材雖也有螺旋式呈現課題，但螺旋的感覺卻沒有英國來的強烈。英國教材螺旋式結構或許是因為《標準》是有法律效力的，教師和學校需負起教導的法律責任 (statutory duty)。為了讓這個法律能夠執行，必須把「該教什麼」定義清楚。如果教師或學校被證明沒有按照《標準》教導學生，那就違反了法律。而教材編者可能認為螺旋式的教材結構是比較能確保《標準》中所規定的課題都為教學內容。

台灣和英國學生所使用的數學教科書皆在單元章節的附近，寫有本章或是本節的學習目標，這是一個引導學生進入此章節前的一個準備，也可達到提醒教師留意教學目標是否符合教材所編寫的教學目標之功能。但是英國的每個單元的學習目標數目其實沒有比台灣教材多，小學部分通常只有一個學習目標，SMP 和 for GCSE 教材的學習目標，可能比台灣多一些，但單元中有一小部分其實是複習之前的教材已出現的內容，所以學習目標會寫說複習某某概念，像是正弦、正切函數單元中，第一條學習目標就為：你將會複習正切函數的使用（You will revise the use of the tangent functions）。這樣的編寫學習目標的方式是台灣教材中所沒有的部分，台灣教材只編寫該單元的學習目標，而台灣教材在單元和單元之間的界線是比英國教材結構明顯的多。研究者相信適當地提醒學生學習過某些內容，並列入學習目標，是符合 Ausubel 所提出的前導組體的概念，可幫助學生學習新知識或了解更深入的內容也比較明顯地知道新課題在

整體知識架構上的相對位置。而教材中歸納整理定義或重點的部分，台灣和英國皆以醒目的底色突顯出重要性。

值得一提的是關於複習的章節，小學部分台灣的教材設計有「加油小站」作為複習使用，英國則針對幾個數學主題在教材結束時設計有複習的單元；中學部分相較於台灣在習作中編製有複習本章的總習題，英國是在教科書中每隔五到七個單元編製有複習的單元，標題都為「複習」(Review)。「複習」中的內容是以這五到七個單元的內容為主也是如同台灣習作以題目的方式呈現；不過特別的是會有一些專門的章節，像是 SMP 九年級第 21 單元，標題是 Angle，學習目標第一條就是複習之前對於角的操作 (revise earlier work on angle)，教材內容也的確以題目引導複習之前教材所陳述之關於角的知識。

英國教材每個章節中，都條列式的呈現教學活動和教材內容，教材編製使用了 A、B、C、D、...等列目，而 A、B、C、D、...各列目下又會出現 A1、A2、A3、...，B1、B2、B3、...和 D1、D2、D3、...項目，學習的層次感比台灣教材章節中的編製鮮明了更多，而這樣的層次也呈現了教材由淺而深的知識內容、由易而難的教學活動，由簡而繁的計算題型，甚至顯示出一種程序性的過程幫助學生認知、記憶和學習，研究者認為如此的編排是有機會影響學生學習的後設認知，學生在依循教材中設計鮮明的步驟，依層次解答問題的同時，無形中可能會形成一種解題的策略程序，往後學生要解決其他問題的同時，可能會設法先設計出一系列步驟或程序，而這也是數學解題歷程中的一個重要環節。

雖然在研究英國數學教材的過程中沒看到學習經驗評鑑的內容，但研究者相信英國教材編製者以如此鮮明的層次感設計教材，其實是以泰勒模式的課程設計架構為雛形具體呈現教材內容，更隱含著編序教學法的精神，而王文科教授也在《課程與教學論》[34]提到泰勒模式為英國課程專家提供思考的架構。以層次感鮮明的方式編寫教材，會對學生學習效果產生什麼影響也有待未來的研究者實證研究。

## 第 5 章 結論與建議

學記中提到「禁於未發之謂豫」，若以教學方法之觀點，狹義可解釋為，教學時先提供相關知識以防學生學習時產生迷失概念。廣義來說，就是提供學生足夠的先備知識讓學生作為學習前的預備。本研究旨在藉由比較、分析和詮釋單元間與單元內的知識，探討和論述台灣一到十年級教科書是否有相關的先備知識讓學生學習三角函數，也檢視鋪陳三角函數相關課題的一貫性與妥適性。並藉由英國教材之編製順序與內容結構，給予台灣教材編製意見。希冀成果作為 98 學年度高中課程綱要修訂之學理依據，也希望提供未來教科書撰寫趨勢之參考。依結論與建議兩部份，分述如下。

### 5.1 結論

#### 5.1.1 與三角函數相關之單元間學習內容

台灣和英國進入三角函數主題前，在數與量方面介紹了關於「角」、「三角形面積」、「圓」和「平方和平方根」等量與測量之教材；在代數（含樣式、關係、函數與坐標圖形）方面介紹了「未知數/未知量」、「方程式」、「函數」、「方位」、「坐標平面」和「關係（比、比例和比值）」等教材；在圖形與幾何方面介紹了「水平」、「垂直」、「平行」、「三角形」、「圓」、「相似形」和「畢氏定理」。

- 數與量方面
  1. 台灣教材在處理「角」、「三角形面積」和「圓」等課題，時間上比英國教材來的早，進度上比英國快，內容知識上也比英國深。
  2. 英國「平方和平方根」的教材內容，比台灣教材早開始，以螺旋式的教材編排，學生有較多反覆演練的機會直到教材引出畢氏定理課題。

- 代數方面

1. 英國教材「未知數/未知量」、「方程式」、「函數」、「方位」和「坐標平面」單元比台灣早開始做鋪陳。使用「未知數/未知量」,「方位」和「坐標平面」等概念都比台灣機會多。
2. 在「方程式」方面,台灣比英國注重方程式解及聯立方程解在坐標平面上的意義。
3. 在「函數」概念方面,英國從 SMP 教材開始介紹函數的概念,在國中階段英國比台灣教材深入,但是直到 for GCSE 的教材中仍只要求十年級學生掌握一次,二次函數和基本的三角函數;而我國目前在十年級則要求學生了解指數、對數函數和三角函數的概念和性質。

- 圖形與幾何方面

在幾何方面,英國對幾何的教學和推理論證的要求低於我國。我國在幾何方面的作圖教材已經較過去簡化,對學生在三段式的論證方法上也沒有以往的要求,但即使如此,我國的教材中仍保有某些經過嚴格證明的幾何性質。然而英國在作圖和幾何等單元的教材呈現上,只以某些圖示或活動引導學生操作及計算,讓學生了解作圖規則和幾何性質。

1. 台灣教材介紹「水平」、「垂直」和「平行」等概念,教材中皆以較英國實際的操作活動,引導學生了解「水平」、「垂直」及「平行」概念。
2. 台灣教材在三角函數單元前,比英國教材早介紹多很多關於「三角形」和「圓」的相關性質,而這些性質會在正弦、餘弦定理中加以應用。
3. 台灣和英國在相似形的教材設計都是先介紹相似多邊形,再介紹相似三角形,英國教材螺旋式呈現相似形教材的次數也比台灣多。
4. 台灣和英國都在三角函數單元前介紹畢氏定理,但是台灣比英國早介紹畢氏定理,台灣在國中教材和英國 SMP 和 for GCSE 教材都沒有利用畢氏定理介紹兩點距離公式。

### 5.1.2 單元內主題比重

三角函數單元中各重要的主題佔了一定份量，經由研究三角函數單元內主題，並探討教材是否對於文獻探討中所提之錯誤類型的主題，設計相關的教學活動幫助學生具備前置經驗，研究者做出以下結論：

1. 台灣教材在三角函數單元內設計的教學主題有：「銳角三角函數」、「三角函數的基本關係」、「簡易測量與三角函數值表」、「廣義角的三角函數」、「正弦定理與餘弦定理」、「基本三角測量」、「三角函數的圖形」、「和角公式」、「倍角、半角公式」、「和、差與積的互化」、「正弦餘弦函數之疊合」和「反三角函數的基本概念」。
2. 英國教材三角函數單元內教學主題有：「銳角三角函數」、「三角函數的基本關係（平方關係）」和「簡易測量與三角函數值表」。
3. 文獻探討歸納學生常出現的錯誤類型主題有：「角度與弧度」的轉換、「廣義角」的概念、「正弦定理」與「餘弦定理」的應用、「三角函數之圖形問題」、「三角函數之週期問題」、「應用問題（測量問題）」和「反三角函數」。

台灣教材在定義弧度時發生定義內容不一致的現象，須幫學生釐清觀念，若從幾何想法為出發點弧度為圓心角的度數，若從數與量的觀點則定義一弧度為常數 $\frac{360^{\circ}}{2\pi}$ ；對於函數性質及圖形的鋪陳時間較英國短少，但台灣和英國教材中對於函數的週期性質都沒有在三角函數單元前提及；英國教材對於測量問題並沒有應用正弦與餘弦定理，測量的題型則類似於台灣教材的簡易測量；英國教材三角函數內容以銳角三角函數為主，有提到反函數的記號，但不像台灣注重定義形式的函數對應關係，僅以計算機或查簡表的方式找出三角函數值所對應之原本銳角度數。

### 5.1.3 潛在課程

台灣和英國教材都在學生比較不常接觸或注意的綱要中，編製著影響學生學習教材的指標規範。在教科書外觀和形式、教材中的符號和內容結構也都可能有意無意的影響學生學習效果。

## 5.2 建議

本研究選擇台灣和英國之其中一種教材進行分析，研究結論雖不可任意推論至其他教材上，但仍期望能提供編製教材之課程設計者與未來研究者一些意見。

### 5.2.1 編製教材之課程設計者

- 留意各單元與三角函數的關聯性
1. 數與量方面：平方與平方根單元，可增加平方和平方根的計算練習，可如同能力指標 N-1-1 的設計，在九年一貫第三階段能力指標中補充，能初步掌握非負整數數詞序列的規律，並能以具體的量、聲音、圖像、數字，進行說、讀、聽、寫、做的活動，表徵 1 到 30 以內整數的平方及 1000 以內完全平方數的平方根計算。弧度與角度單位的轉換關係可在進入三角函數單元之前，加強學生對於計算上的熟練度。
  2. 代數方面：在九年一貫第二階段尾聲，可配合語文領域提前引入未知數的記號；中學階段可利用台灣教材在方程式的編寫，提前引入函數的概念，包括對於函數週期的數感，而九年一貫教材內容關於方程式的單元若加以論述也可以如同英國教材介紹函數的基礎知識。
  3. 圖形與幾何方面：除了可參考相關的幾何認知發展理論，如 Van Hiele 理論，以便掌握學生對於幾何思維層次輔助教學，對於三角函數相關的重要幾何性質，如：三角形中線、平分線等性質及圓與三角形的關係，都可在三角函數教學前多加複習。

- 調整單元內主題比重、順序

經由研究結果可發現，同樣在十年級英國三角函數教材內容的主題數比台灣少了許多，或許英國對於幾何性質上的基礎知識沒有台灣教材來的完整是主要原因，但台灣對於函數性質的教材論述時間卻也比英國短少了許多，台灣教材可考慮，刪除一些形式化定義的內容，如同文獻探討中 Eli Maor 指出一些以集合符號及語言佔據了三角學的討論，而反三角函數主題就是需要學生記憶許多定義域與值域的範圍。課程設計者可適當的剪裁教材，建議教材可將重心先放在，三角學在幾何測量重要應用，讓三角函數單元主題以測量上的用途呈現，爾後教材再呈現三角函數於分析上的理論與用途。

研究同時也發現，英國教導學生三角學的部分無論是前一版（2000，屠耀華等譯）SMP 之教材，或是研究對象 for GCSE 的教材，都是先教導學生認知並應用正切函數，而學生學習正切函數之前，教材則編製有直線方程式斜率的計算，斜率的計算形式則與計算三角比正切值相類似。編製三角函數教材可考慮將教材已經提出的某些主題及其形式加以連結，讓學生感受到主題間的關係。

- 分段實施三角函數單元內容

由英國教材可以發現，在十年級呈現的三角函數內容以三角比及其他基本的三角學的概念為主。目前台灣教材在十年級的三角函數單元內容，知識內容上顯得比英國多且深，雖然相關知識都有在十年級前加以鋪陳，但還是顯得不足。像是三角恆等式的部份需要用到比例的代數性質（和比、分比性質），但台灣在教導三角函數單元前的教材中已不深入的觸及此類代數性質。因此未來台灣教材設計三角函數單元，除了配合小學、中學教材相關知識內容，再參考與台灣相同年級的英國十年級教材內容，適當的切割主題後，至少可分為兩階段完成三角函數的內容。

- 三角函數銜接教材

課程設計者應注意已使用九年一貫教材卻仍未使用新的高中數學正式綱要教材的後期中等教育學生，研究者在銜接進入三角函數教材提供以下意見：

1. 銜接教材之時間：銜接三角函數單元應至少分為兩個時間點，函數的概念應在學生進入高一前施以相關的補充教材，本研究發現英國教材在編製三角函數課題前已有許多與函數相關的單元；三角比的教材可與進入廣義角三角函數的教學時間點切開，形成另一個銜接教材的教學時間點，讓教材有機會螺旋式的幫助學生熟練相關定義。

2. 銜接教材之主題：

代數方面應重視「函數教材」，函數概念是 94 學年度進入後期中等教育的學生在認知上比較薄弱的一環，研究發現九年一貫的教材對於函數教材的設計並不強調。圖形與幾何方面應複習「三角形」和「圓」的性質，台灣教材進入三角函數後會深入的介紹正弦與餘弦定理，故「三角形」和「圓」的性質和關係應加強論述。

- 潛在課程的編製

教材中善意但不制式或不規範性地使用一些符號或程序，可能影響學生建立學習的後設認知或是記憶知識的方式。課程設計者在教材中，可考慮參考英國教材一般使用相關符號，並加強學習內容於教材結構上的層次感。而為了讓學生更能了解教材的銜接性，課程設計者也可妥切地在單元的開始如同英國編製有複習之前學習內容的學習目標和內容，或在單元尾聲引入概念構圖，構圖可能不為正式教材的一部份，但卻也會影響學生對於教材單元間銜接上的認知，為一種形式的潛在課程。唯潛在課程的設計須請課程編製者更加注意相關的設計哲學。

## 5.2.2 未來研究方向

- 改變研究對象

本研究的研究期程正值第一屆九年一貫的學生進入後期中等教育，但他們所使用的教科書是依照九年一貫暫行綱要所制定，未來可以針對依照九年一貫正式綱要所製定的教材加以深入探討。另外，部編版的教科書正在陸續發行中，或許部編版可能是一種形式教材規範，但部編版教材的目的卻可能只是建議學生所需學習知識的最低標準，因此若未來研究者能夠探討部編版的教材，改變研究對象，相信會有不同的發現與建議。

- 課程評鑑與教學現場

一個完整的課程設計包括課程評鑑，建議未來的研究者可以多元的評量方式像是文獻探討提到的概念構圖評量，檢視學生對於教材中三角函數相關主題的理解程度為何。訪談教材編者的課程設計理念，並實際觀察其教學現場，一個課程的實施地方為教學現場，未來的研究者可進入教學現場實觀察學生的學習狀況與教材實施成效。

- 教師教學經驗與學生學習狀況

可配合九年一貫第一屆畢業的高一學生，進行三角函數問卷調查、訪談教師教學及探討學生學習狀況。藉由自編測驗和問卷調查，探討高一學生學習三角函數課題的學習狀況，藉由質性訪談了解教師對於三角函數課題教科書編排的意見。而目前中央大學數學研究所，江佳玲與黃鈺芸同學正進行相關研究。

- 重視課程設計的哲學

數學教材中雖不同於社會科學中所存在的潛在課程或意識形態之概念，但在符號的使用與教材單元內容的編製結構，還是可能會與正式課程產生互相滲透的現象。某些單元內容教材編製多了，可能會排擠另一部分教材內容的呈現。而哪些

內容是可以被剪裁的？又爲什麼可以被剪裁？像是刪除國中三角函數單元的理由爲何？而爲什麼另一些單元可以被保留？這可能就牽涉到課程設計者對於數學教材編製與發展的哲學，未來研究者可配合所研究的數學主題，更深入探討數學教材中存在的哲學，讓課程設計者編製課程時能深入思考相關問題。

- 數學科在後期中等教育與九年一貫課程、大學教育間的斷層

目前後期中等教育的數學科教材內容，以十年級爲例台灣顯得比英國 for GCSE 教材來得厚實，台灣教材編寫比英國多很多的三角函數的內容。但這麼大量的數學知識呈現在台灣後期中等教育的教材中，九年一貫教材數學領域所提供的先備知識卻可能有捉襟見肘的感覺，像是目前的三角函數教材內容需要深入用到許多關於圓和三角形的性質，但九年一貫課程教材卻沒有如此深入地提出相關知識內涵；另外後期中等教育數學科教材內容雖然艱澀，但大學教授卻可能也不認爲學生具有相當的數學程度學習大學教育中的數學課程，因此數學科教材內容在後期中等教育與九年一貫課程、大學教育間是否存在斷層？進入大學的指定考科成績又能否真實反映學生的數學程度？這些問題也都與教材編製有所關聯，因此未來研究方向可以繼續探討關於數學科銜接斷層的議題。

## 參考文獻

- [1] 國立中正大學數學系 (2005)。  
《九年一貫數學學習領域銜接高中課程教材九十四學年度銜接教學說明》  
<http://www.math.ccu.edu.tw/chinese/94sutdy/20050526/expound.pdf> (2005/3/25)
- [2] 國立中正大學數學系 (2005)。  
《九年一貫數學學習領域銜接高中課程教材九十四學年度銜接教學說明》  
<http://www.math.ccu.edu.tw/chinese/94sutdy/20050526/> (2005/3/25 search)
- [3] 張春興 (1999)。《教育心理學》台北市：東華書局。
- [4] 余民寧 (1997)。《教育測驗與評量 成就測驗與教學評量》。  
臺北市：心理。
- [5] 黃光雄、蔡清田 (1999)。《課程設計－理論與實際》。台北：五南。
- [6] 陳伯璋 (2000) P.10-18。  
《邁向課程新紀元－九年一貫課程研討會論文集》。
- [7] 教育部。(2002)《九年一貫數學科暫行綱要》。
- [8] 香港大學 (1999)。  
《亞洲及西方各主要國家及地區的數學課程比較研究》。  
教育署委託香港大學研究。
- [9] <http://gaokaoren.com/shuxue/> (2005/4/15 search)
- [10] 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛 (2005)。  
《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》台北：教育部。
- [11] 堀場芳數 著。羅亮生，羅麗生譯 (2003)。  
《角 $\theta$ 的奧秘 角、圖形及函數的性質研究》凡異文化。
- [12] 洪雅齡 (2005)。  
《台灣與日本之十二年數學課程比較》。中央大學。
- [13] 毛爾 (Maor, Eli) 著。胡守仁譯 (2000) 《毛起來說三角》。  
臺北市 天下遠見出版。
- [14] 賴潔芳 (2003) 《二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究》。  
國立高雄師範大學。
- [15] 簡志明 (2003) 《高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究》國立高雄師範大學。

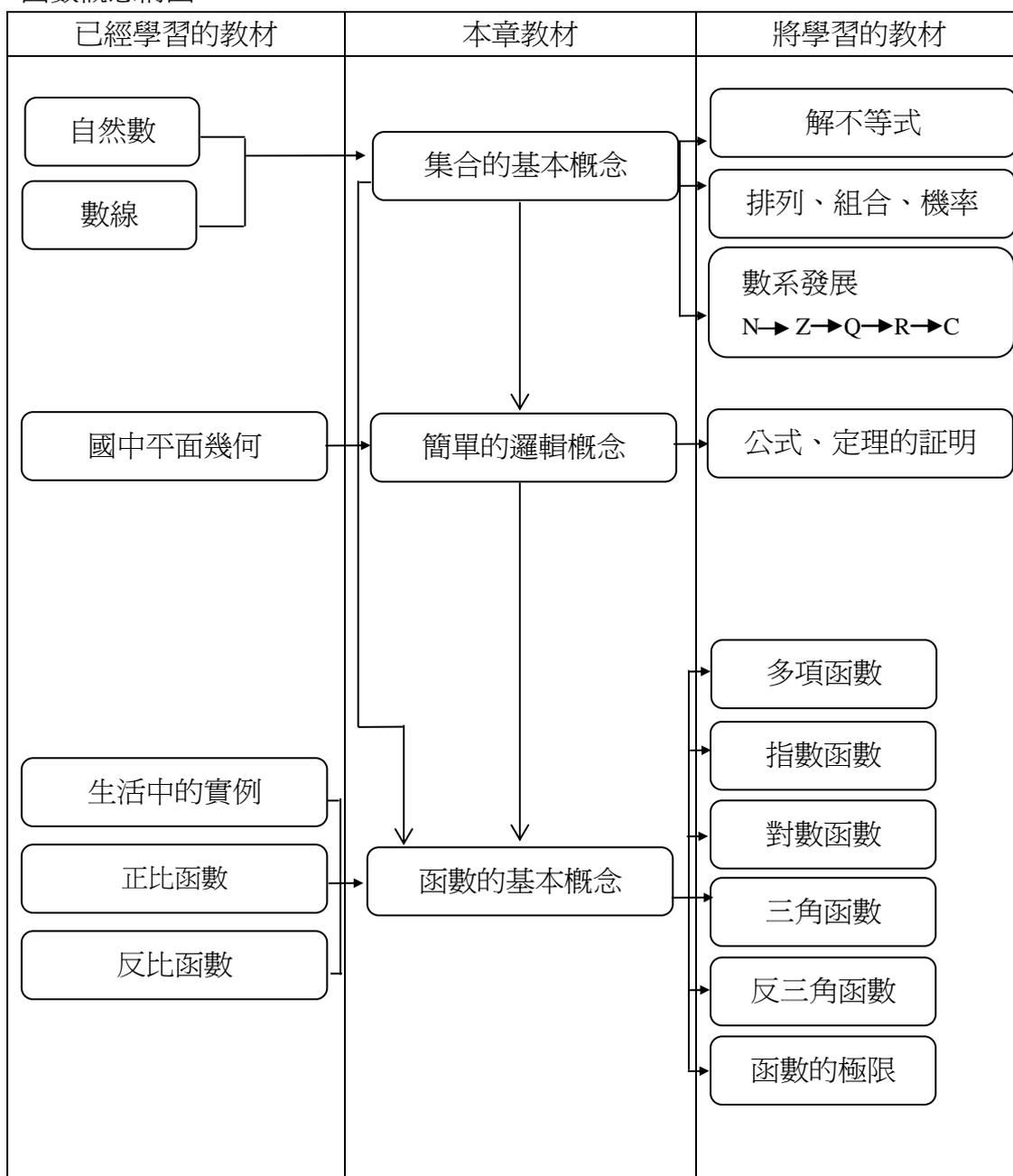
- [16] 陳建丞 (2002) 《融入數學史教學對高一學生數學學習成效—以「和角公式」單元為例》國立高雄師範大學。
- [17] 余麗惠 (2003) 《高雄市高職學生運用 GSP 軟體學習三角函數成效之研究》國立高雄師範大學。
- [18] 吳英孝 (2004) 《網路化數學學習之成效研究-以高中三角函數複習為例》國立高雄師範大學。
- [19] Joel J. Mintzes, James H. Wandersee & Joseph D. Novak 編著。丁信中等譯 (2004)。《促進理解之科學評量 人本建構取向觀點》。
- [20] 陳忠雄 (2002)。《高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究》國立高雄師範大學。
- [21] Ausubel, D., Novak, J.D., & Hanesian, H. (1978). *Education psychology : A cognitive view* (2<sup>nd</sup> ed.). New York : Holt, Rinehart, & Winston.
- [22] John A. Van De Walle 著。張英傑、周菊美譯。《中小學數學科教材教法》台北：五南。
- [23] 余民寧 (1997)。《有意義的學習 概念構圖之研究》。台北市 商鼎文化。
- [24] 歐用生 (1995)。《加強教科書的評鑑和選擇》。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- [25] 歐用生 (1989)。《質的研究》。台北市 師大書苑
- [26] 王文科、王智弘 (2004)。《教育研究法》。台北市 五南
- [27] 王文科 (1999)。《教育研究法新增五版》。臺北市 五南
- [28] 林秀瑾、張英傑 (2005) 台灣地區三十年來國編版小學幾何教材內容範圍分析研究《國立臺北教育大學學報》，第 18 卷第 2 期 P.65~P.92
- [29] 吳麗玲 (2005) 《國小五、六年級分數教材內容分析比較之研究—以台灣九年一貫康軒版、美國 Mathematics in Context 與新加坡 My Pals are Here! Maths 為例》國立嘉義大學。
- [30] 吳明穎 (2002) 《國小數學教科書內容分析之研究》屏東師範學院。
- [31] J.R.Fraenkel, N.E.Wallen/著。楊孟麗 譯。《教育研究法：研究設計實務》心理
- [32] 香港大學 (1999)。《各界人士對數學課程觀感的分析》。教育署委託香港大學研究。

- [33] 中華民國比較教育學會（1992）。  
《各國中小學課程比較研究 中華民國比較教育學會編》。  
台北市 師大書苑。
- [34] 王文科（2001）。《課程與教學論》台北市 五南。
- [E1] Dearing Report Website <http://www.leeds.ac.uk/educol/ncihe>
- [E2] SMP INTERACT FOR THE MATHEMATICS FRAMEWORK  
<http://www.smpmaths.org.uk/interact.htm>（2005/4/17 search）
- [E3] SMP INTERACT FOR THE MATHEMATICS FRAMEWORK  
（T series、S series 及 C series）  
<http://www.smpmaths.org.uk/ks3bookslevels.htm>（2005/4/17 search）
- [E4] 英國國家課程網路版 National Curriculum Online <http://www.nc.uk.net/>

#### 教科書部份

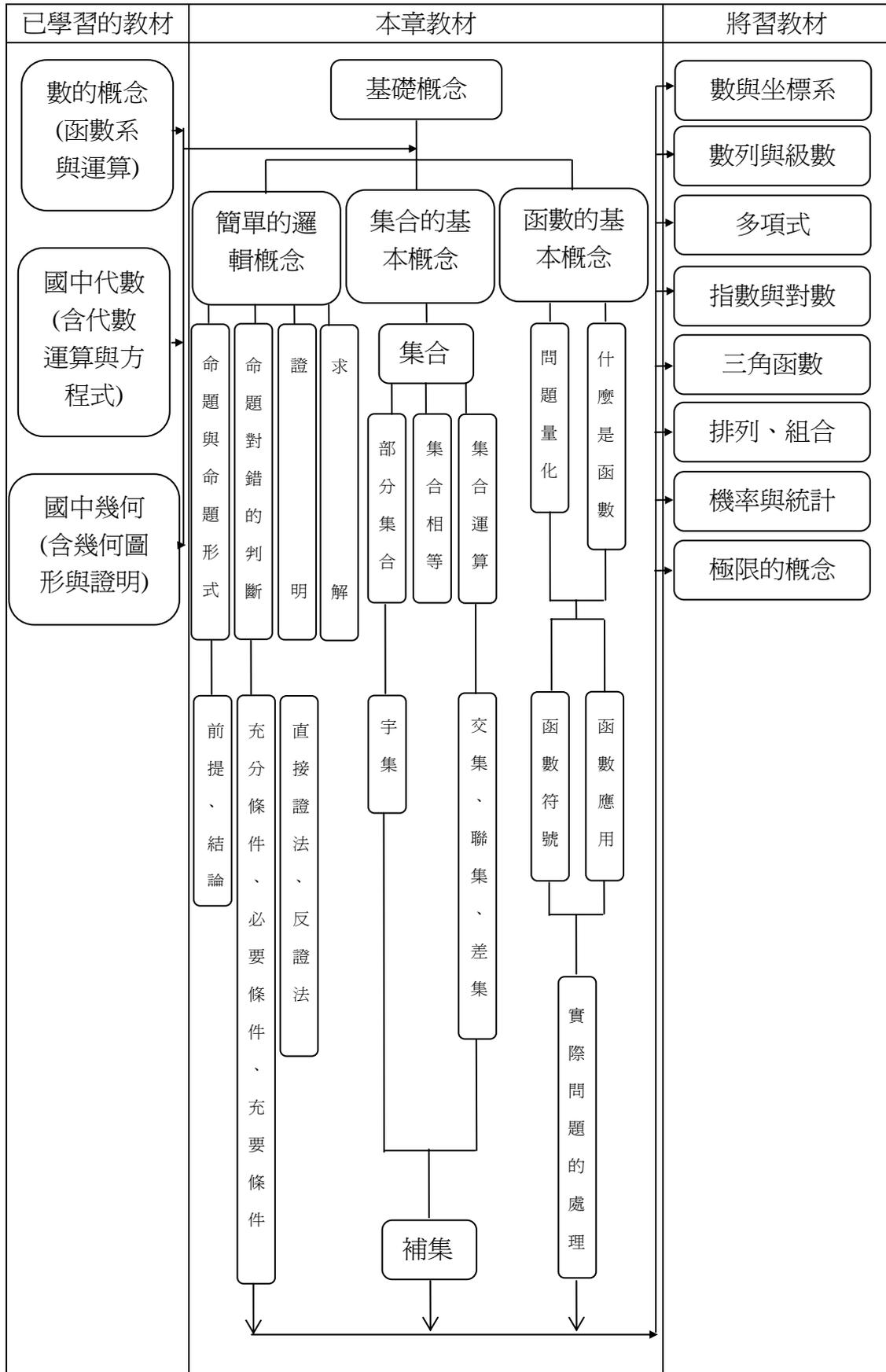
- 張英傑（2005）。《國民小學數學》。台北：南一書局。
- 陳冒海（2005）。《國民中學數學》。台北：南一書局。
- 陳冒海（2003）。《高級中學數學》。台北：南一書局。
- 李恭晴（2005）。《國民小學數學》。台南：翰林書局。
- 朱建正（2005）。《國民中學數學》。台南：翰林書局。
- 楊瑞智（2004）。《國民小學數學》。台北：康軒書局。
- 余文卿（2005）。《高級中學數學》。台北：龍騰出版社。
- 李虎雄（2004）。《高級中學數學》。台中：康熙圖書網路股份有限公司。
- 《Target Maths》。Elmwood Press。
- 《The School Mathematics Project》。Cambridge University Press（2003）。

附錄一  
函數概念構圖



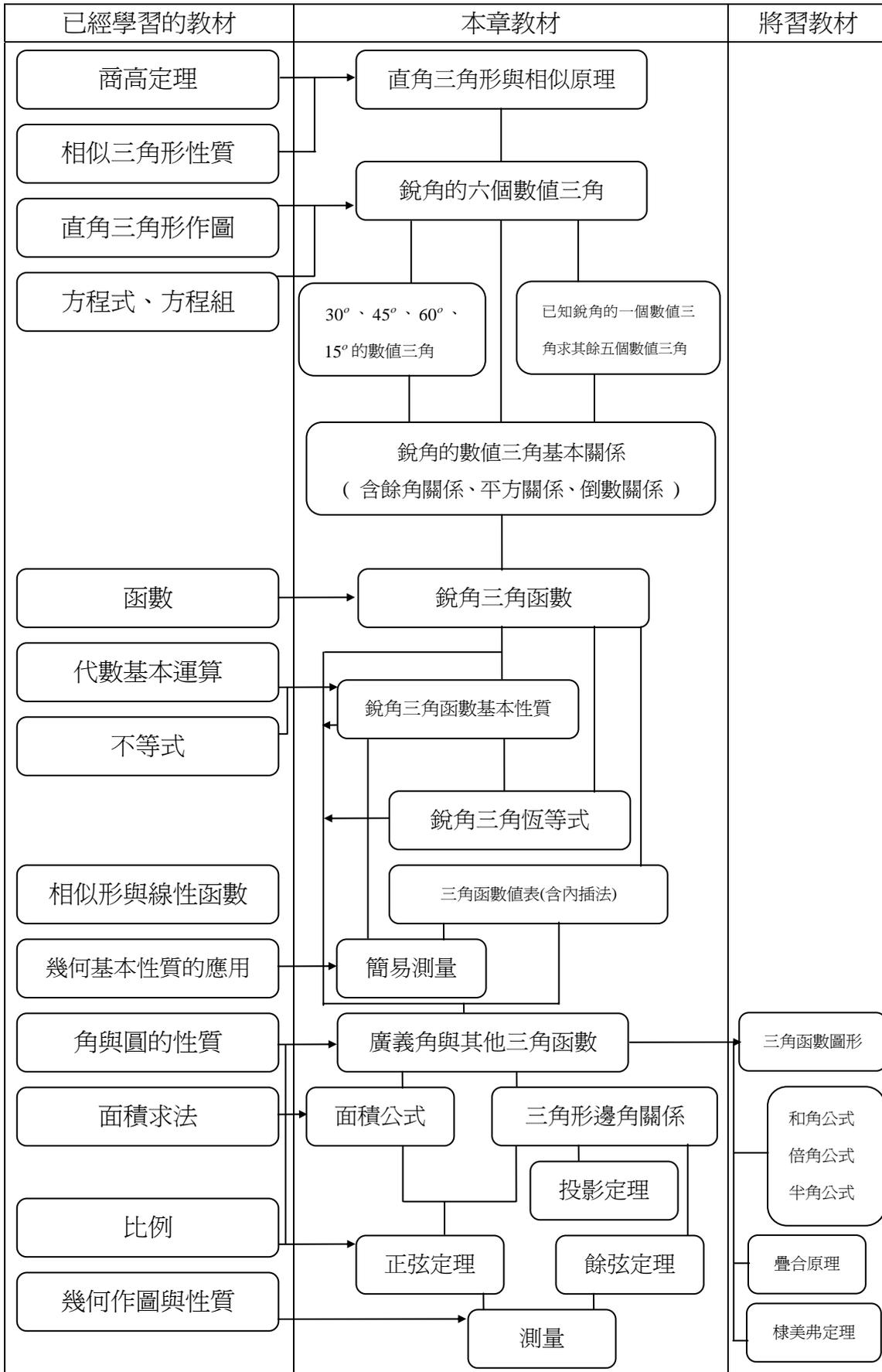
(引自南一版高中第一冊教師手冊)

函數概念構圖



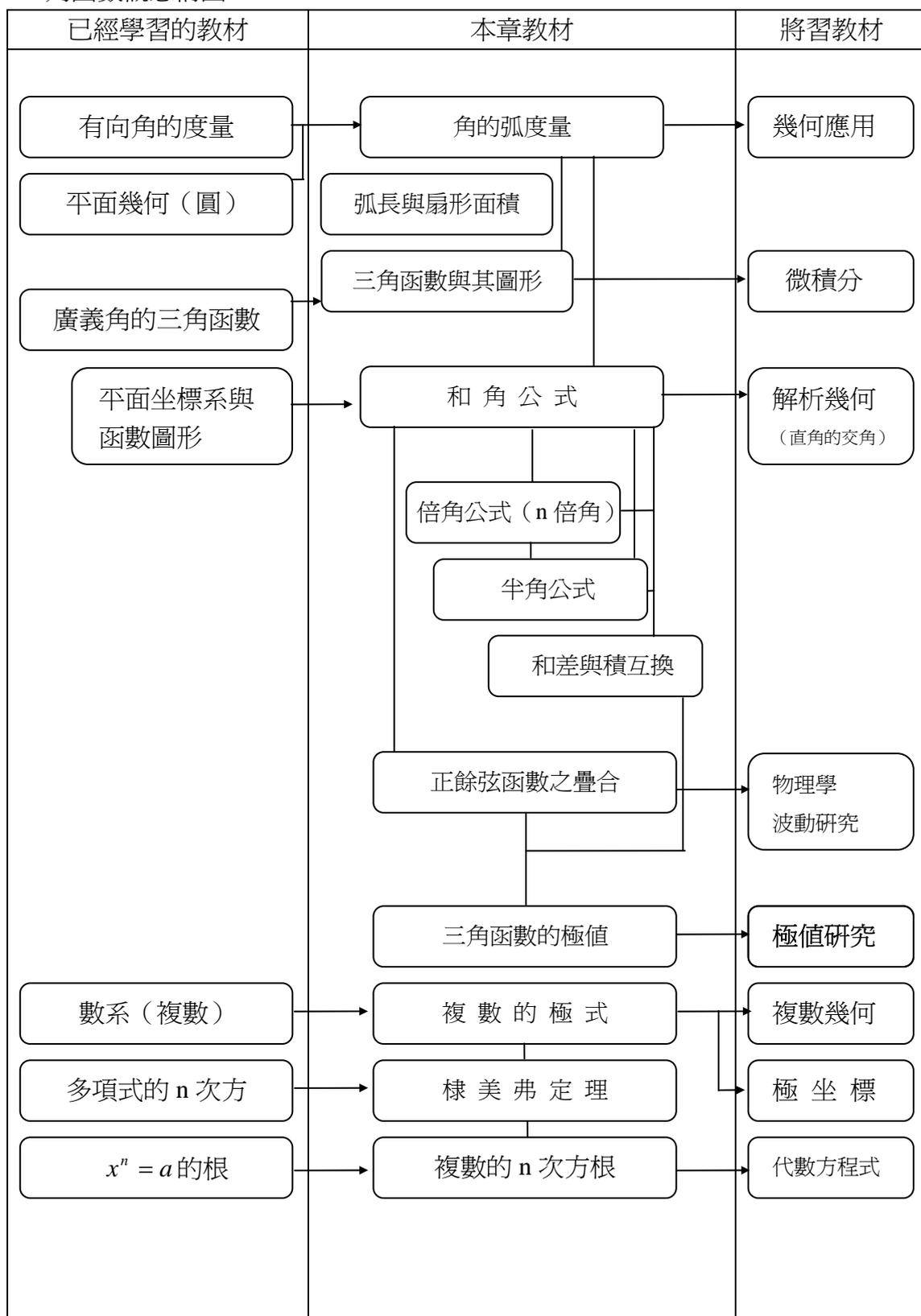
(引自康熙版高中第一冊教師手冊)

三角函數概念構圖



(引自康熙版高中第二冊教師手冊)

三角函數概念構圖



(引自康熙版高中第二冊教師手冊)



附錄二 與三角函數有關連之教材結構圖（引自南一版國中教師手冊）

第六冊 圓的性質教材地位分析圖

已習教材能力指標	本章教材	未習教材能力指標
<div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">S-4-7 S-4-8</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">S-3-10 S-4-1 S-4-5 S-4-9</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px;">A-4-9</div>	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 10px; margin-bottom: 10px;"> <p><b>直線與圓</b></p> <p>點與圓的位置關係 直線與圓的位置關係 兩圓的位置關係 切線的基本性質 兩圓的公切線</p> </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 10px;"> <p><b>圓心角、圓周角與弦切角</b></p> <p>三角形的外接圓 等弧所對的弦 圓周角與其所對的弧 弦切角與其所夾的弧</p> </div>	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">S-4-1 S-4-2 S-4-3</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px;">A-4-12</div>

• 已習教材能力指標

- S-4-7 能辨別檢驗兩圖形是否相似。
- S-4-8 能運用相似三角形的性質進行簡易測量。
- S-3-10 能透過實測辨識三角形、四邊形、圓的性質。
- S-4-1 能根據給定的性質作局部推理。
- S-4-4 能根據性質瞭解某些圖形間的包含關係。
- S-4-5 能瞭解垂直、平行的定義。
- S-4-9 能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。
- A-4-9 能認識商高定理及其生活中的應用。

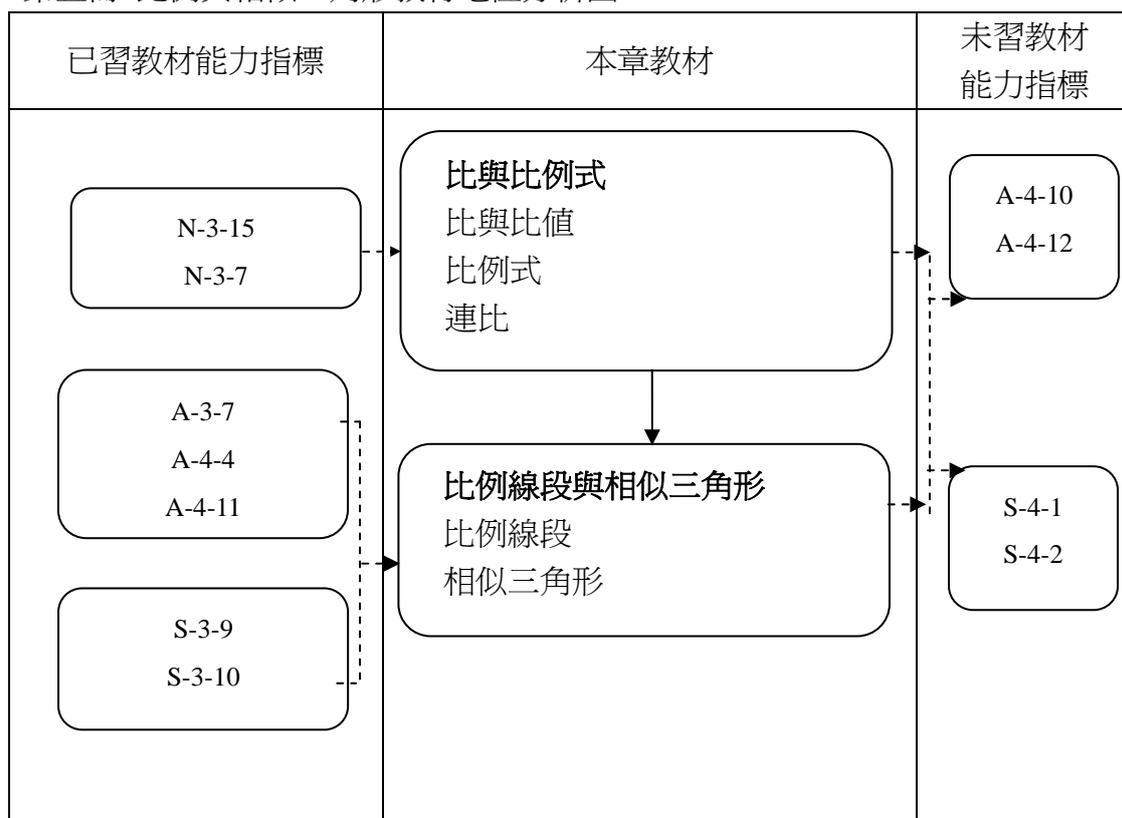
• 本章教材能力指標

- S-4-1 能根據給定的性質作局部推理。
- S-4-2 能非形式地辨識敘述及其逆敘述間的不同。
- S-4-3 能以最少性質辨認刻畫一個圖形並瞭解定義的意義。

• 未習教材能力指標

- S-4-1 能根據給定的性質作局部推理。
- S-4-2 能非形式地辨識敘述及其逆敘述間的不同。
- S-4-3 能以最少性質辨認刻畫一個圖形並瞭解定義的意義。
- A-4-12 觀察生活週遭或其他學科領域中的數學，認識數學的用途與數學思維的特性。

第五冊 比例與相似三角形教材地位分析圖



● 已習教材能力指標

- N-3-15 能在情境中理解比、比例(包括正比例和反比例)、比值、率(百分率、ppm)的意義。
- N-3-7 能用分數倍的概念，整合以分數為除數的包含除和等分除的運算格式。
- A-3-7 能察覺數量模式與數量模式之間的關係。
- A-4-4 能利用一次式解決生活情境中的問題。
- A-4-11 能利用配方法或十字交乘法解一元二次方程式。
- S-3-9 能辨識基本圖形間對應邊長成比例時的形狀關係。
- S-3-10 能透過實測辨識三角形、四邊形、圓的性質。

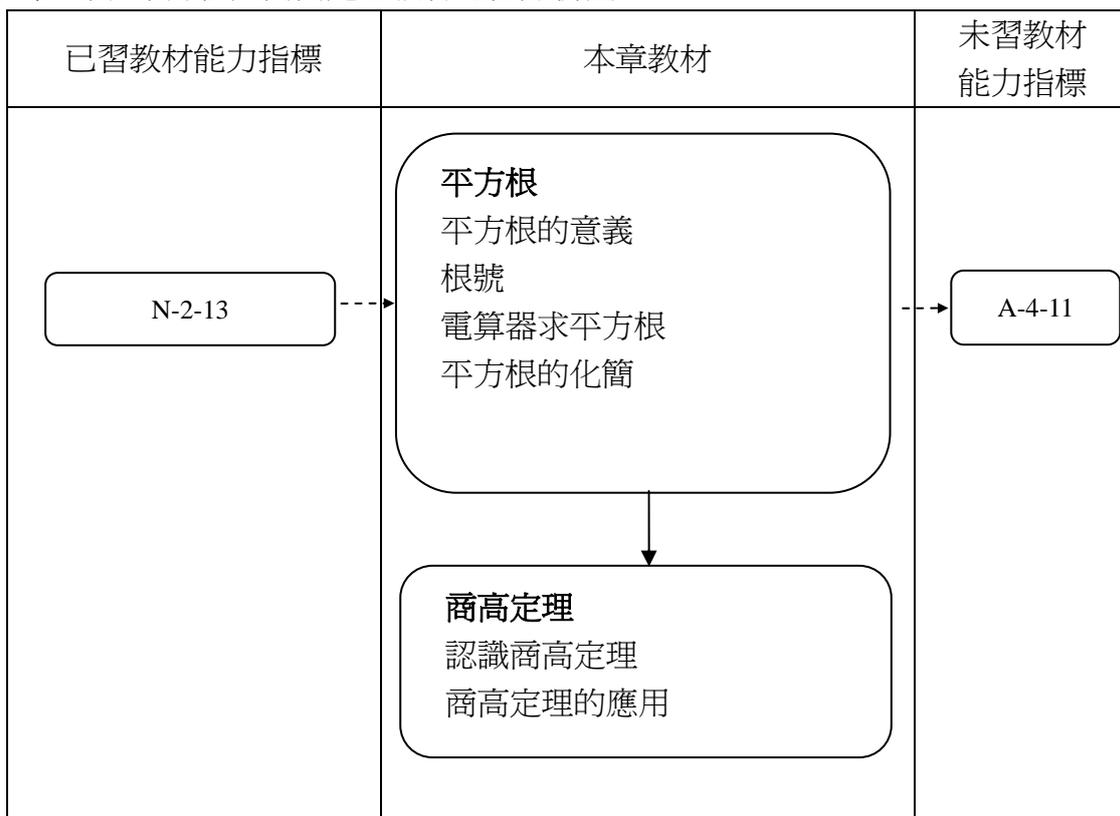
● 本章教材能力指標

- S-4-7 能辨別檢驗兩圖形是否相似。
- S-4-8 能運用相似三角形的性質進行簡易測量。

● 未習教材能力指標

- A-4-10 能認識、欣賞生活中或其他學科領域常用的公式。
- A-4-12 觀察生活週遭或其他學科領域中的數學，認識數學的用途與數學思維的特性。
- S-4-1 能根據給定的性質作局部推理。
- S-4-2 能非形式地辨識敘述及其逆敘述間的不同。

第四冊 平方根與商高定理教材地位分析圖



- 已習教材能力指標

N-2-13 能以個別單位的方式(利用等物合成複製後)描述面積、體積，並能用乘法簡化長方形面積、長方體體積之點算。

- 本章教材能力指標

A-4-7 能認識平方根以及用電算器看出其近似值。

A-4-9 能認識商高定理及其生活中的應用。

- 未習教材能力指標

A-4-11 能利用配方法或十字交乘法解一元二次方程式。

第三冊 二元一次方程式的圖形教材地位分析圖

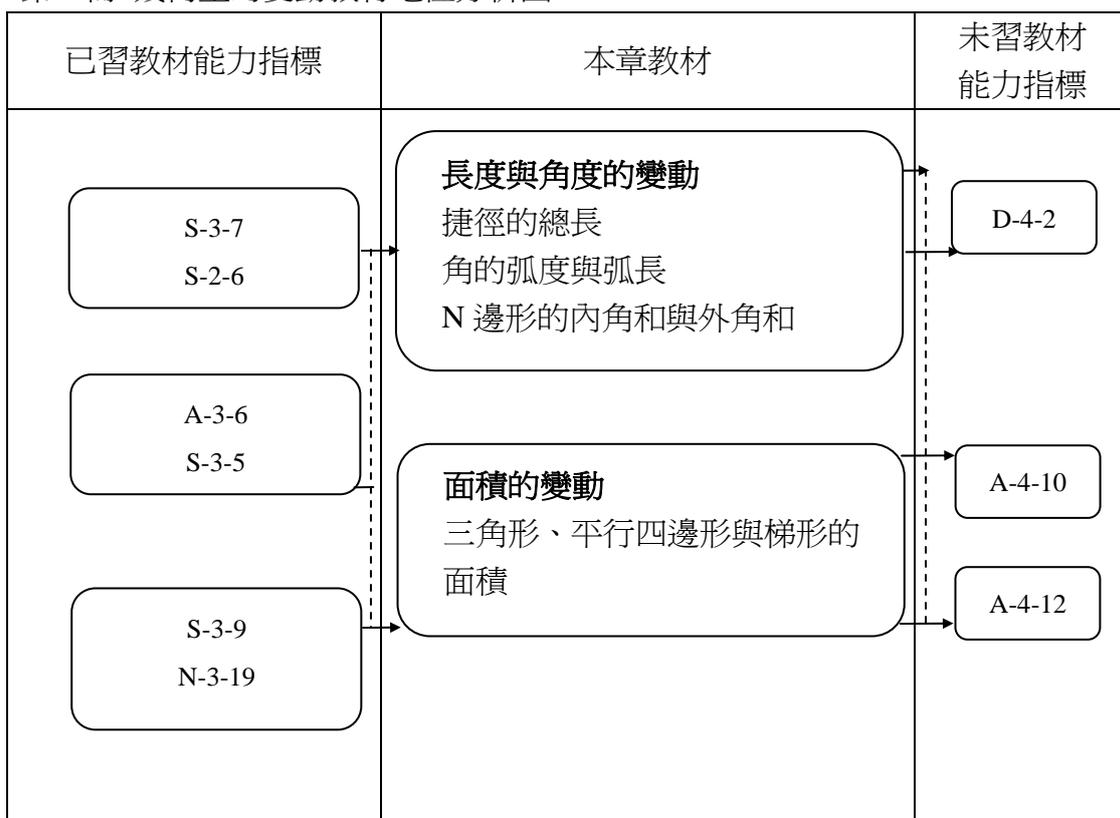
已習教材能力指標	本章教材	未習教材能力指標
<div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; margin-bottom: 10px;">                     A-3-1 A-3-5 A-3-11 N-2-19 S-1-6 S-2-4 S-3-6                 </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px;">                     A-2-3 A-3-2 A-4-6 S-2-5 S-3-2 S-3-6 S-3-7 N-2-15                 </div>	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; margin-bottom: 10px;">                     平面坐標系 直線坐標系 平面上一點的位置 坐標平面上的點與坐標                 </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px;">                     二元一次方程式的圖形 把方程式轉換成圖形 二元一次方程式的圖形 聯立方程式的幾何意義                 </div>	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; margin-top: 10px;">                     S-4-1 S-4-4 S-4-5 S-4-9                 </div>

● 已習教材能力指標

- A-3-11 能以「正、負」表徵生活中相對的量，並能操作負整數的合成分解。
- A-3-5 能察覺簡易數量樣式與數量樣式之間的關係。
- A-3-1 能用  $x$ 、 $y$ 、 $\dots$  的式子表徵生活情境中的未知量及變量。
- N-2-19 能利用等分好的線段上，做出一條簡單的整數數線，並能進一步延伸至簡單的分數和小數的數線。
- S-1-6 能運用上下、左右、前後、內外等方位語詞描述兩物的相對位置。
- S-2-4 能運用東西南北的語詞描述位置及方向。
- S-3-6 能運用直角坐標系及方位距離來標定位置。
- A-2-3 能透過具體觀察及探索，察覺簡易數量模式，並能描述模式的一些特性。
- A-3-2 能將生活情境中的問題表徵為含有  $x$ 、 $y$ 、 $\dots$  的等式或不等式，透過生活經驗檢驗、判斷其解，並能解釋式子及解與原問題情境的關係。
- A-4-6 能做正負數的四則運算。
- S-2-5 能瞭解兩鉛垂直線及兩水平直線互相平行。
- S-3-2 能指出合於所予性質的形體。

- S-3-6 能運用直角坐標系及方位距離來標定位置。
- S-3-7 能瞭解平面上兩直線互相平行、垂直的概念。
- N-2-15 能用不同的想法，檢驗答案的合理性。
- 本章教材能力指標
- A-4-2 能解從生活情境問題中列出的二元一次聯立方程式。
- A-4-10 能認識、欣賞生活中或其他學科領域常用的公式。
- A-4-12 觀察生活週遭或其他學科領域中的數學，認識數學的用途與數學思維的特性。
- 未習教材能力指標
- S-4-1 能根據給定的性質作局部推理。
- S-4-4 能根據性質瞭解某些圖形間的包含關係。
- S-4-5 能瞭解垂直、平行的定義。
- S-4-9 能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。

第二冊 幾何量的變動教材地位分析圖



● 已習教材能力指標

- S-3-5 能利用形體的性質解決幾何問題。
- S-2-6 能瞭解張開程度、旋轉程度和角的關係。
- S-3-7 能瞭解平面上兩直線互相平行、垂直的概念。
- A-3-6 能瞭解幾何量的各種表徵模式。
- S-3-9 能辨識基本圖形間對應邊長成比例時的形狀關係。
- N-3-19 能察覺梯形、三角形、長方形、平行四邊形等面積公式之間的關係。

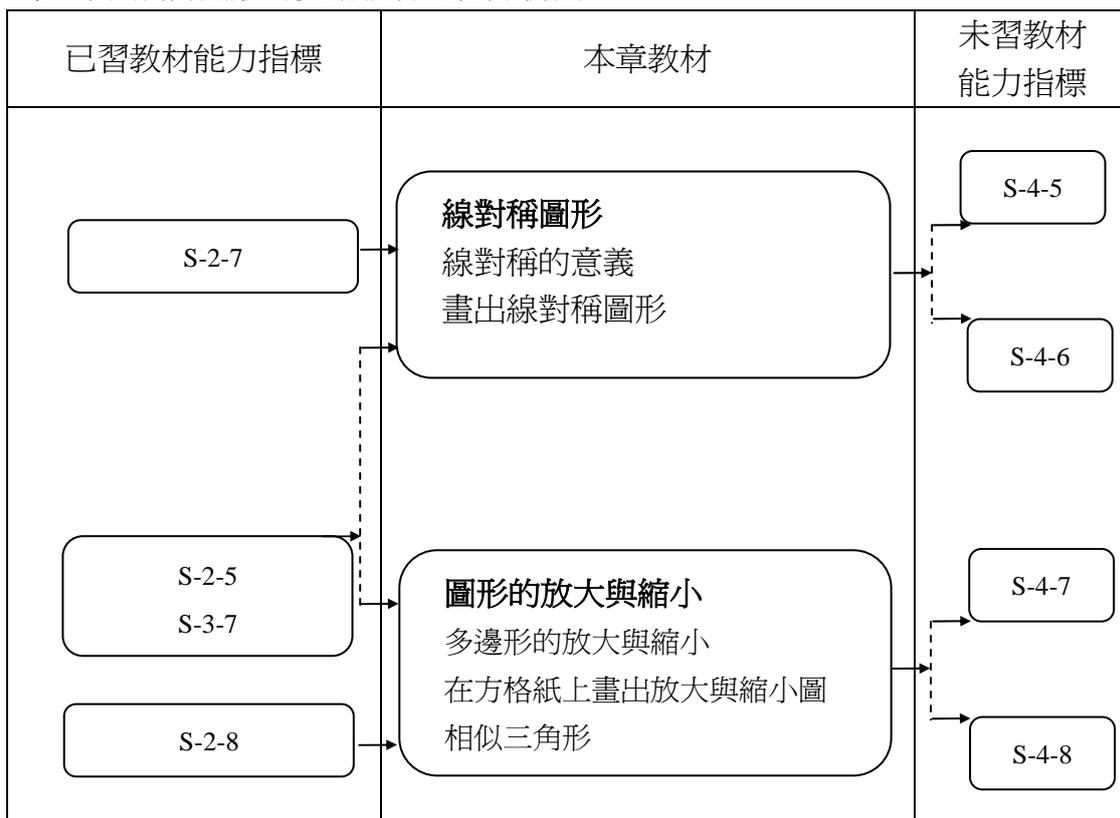
● 本章教材能力指標

- A-3-9 能瞭解幾何量不同表徵樣式之間的關係。
- A-3-11 能以「正、負」表徵生活中相對的量，並能操作負整數的合成分解。
- S-3-11 能操作圖形之間的轉換組合。

● 未習教材能力指標

- D-4-2 能將資料整理成圓形百分圖，並抽取圓形百分圖中有意義的資訊，加以解讀。
- A-4-10 能認識、欣賞生活中或其他學科領域常用的公式。
- A-4-12 觀察生活週遭或其他學科領域中的數學，認識數學的用途與數學思維的特性。

第二冊 幾何圖形的變動教材地位分析圖



• 已習教材能力指標

S-2-7 能辨認平面圖形上的線對稱關係。

S-2-5 能瞭解兩鉛垂直線及兩水平直線互相平行。

S-3-7 能瞭解平面上兩直線互相平行、垂直的概念。

S-2-8 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

• 本章教材

S-3-8 能瞭解平面圖形線對稱的意義。

S-3-9 能辨識基本圖形間對應邊長成比例時的形狀關係。

• 未習教材能力指標

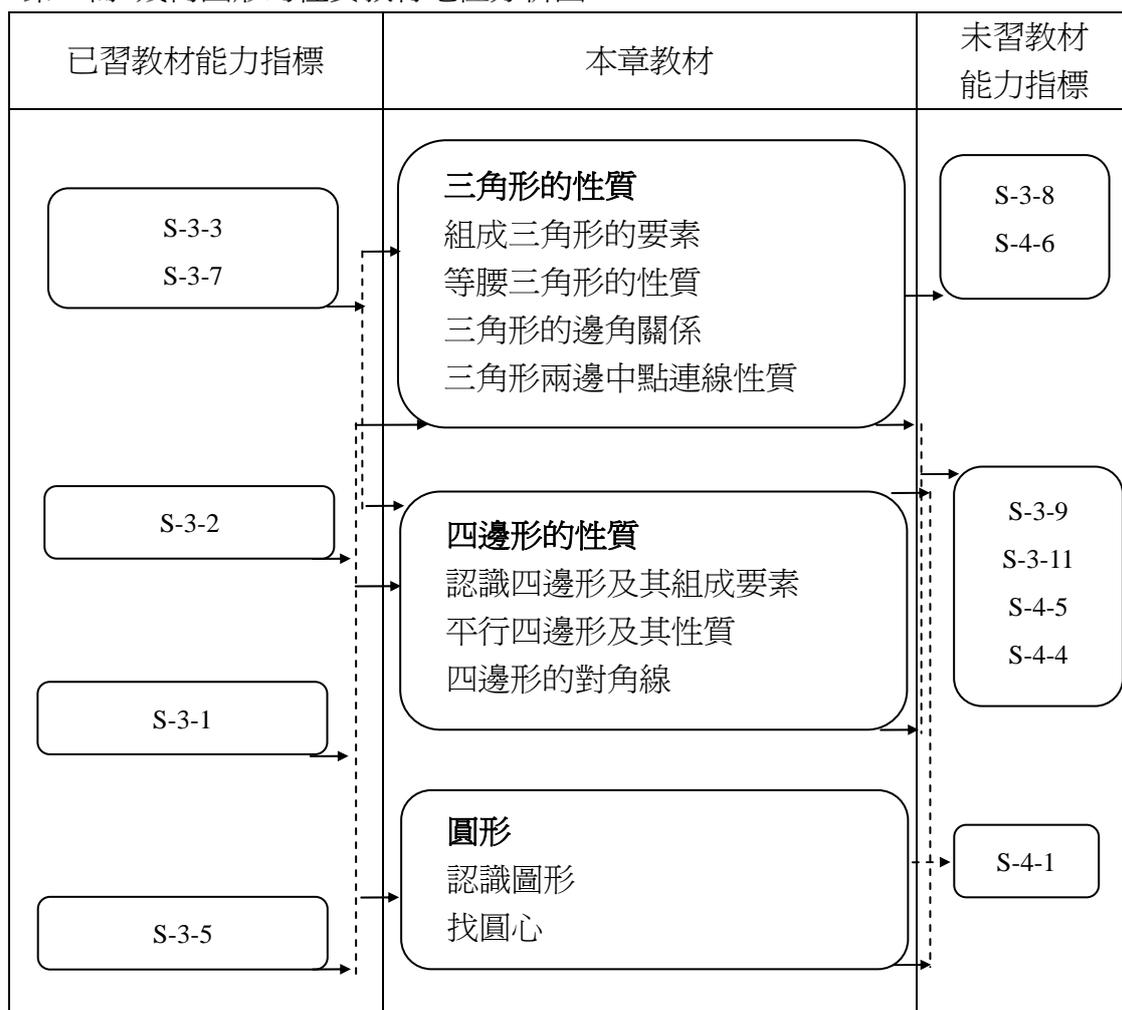
S-4-5 能瞭解垂直、平行的定義。

S-4-6 能利用垂直平分的概念檢驗對稱軸。

S-4-7 能辨別檢驗兩圖形是否相似

S-4-8 能運用相似三角形的性質進行簡易測量

第二冊 幾何圖形的性質教材地位分析圖



● 已習教材能力指標

- S-3-3 從一類形體的特性中，指出那些性質也適用於另一類形體。
- S-3-7 能瞭解平面上兩直線互相平行、垂直的概念。
- S-3-2 能指出合於所予性質的形體。
- S-3-1 能使用形體的性質描述某一類形體。
- S-3-5 能利用形體的性質解決幾何問題。

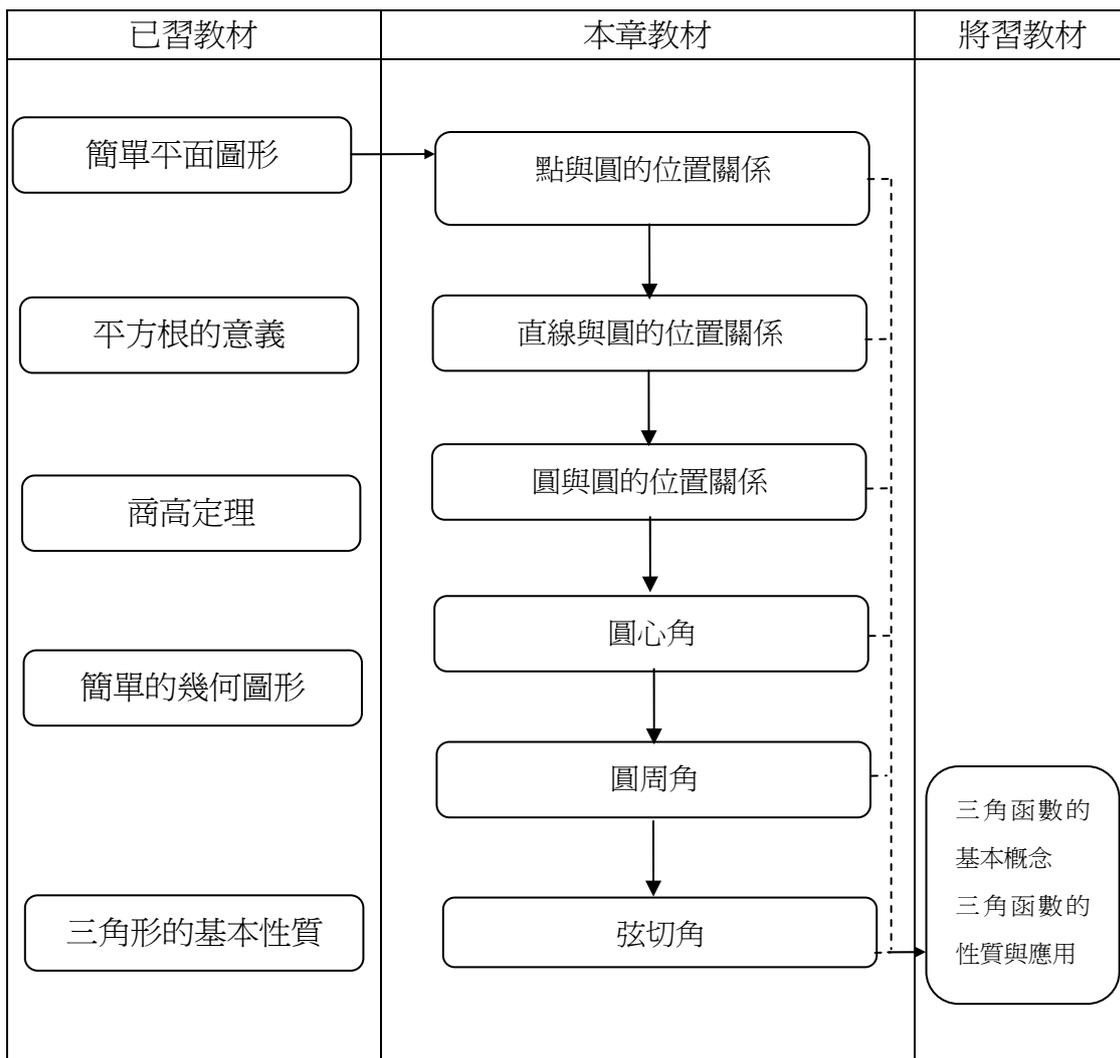
● 本章教材

- S-3-10 能透過實測辨識三角形、四邊形、圓的性質。

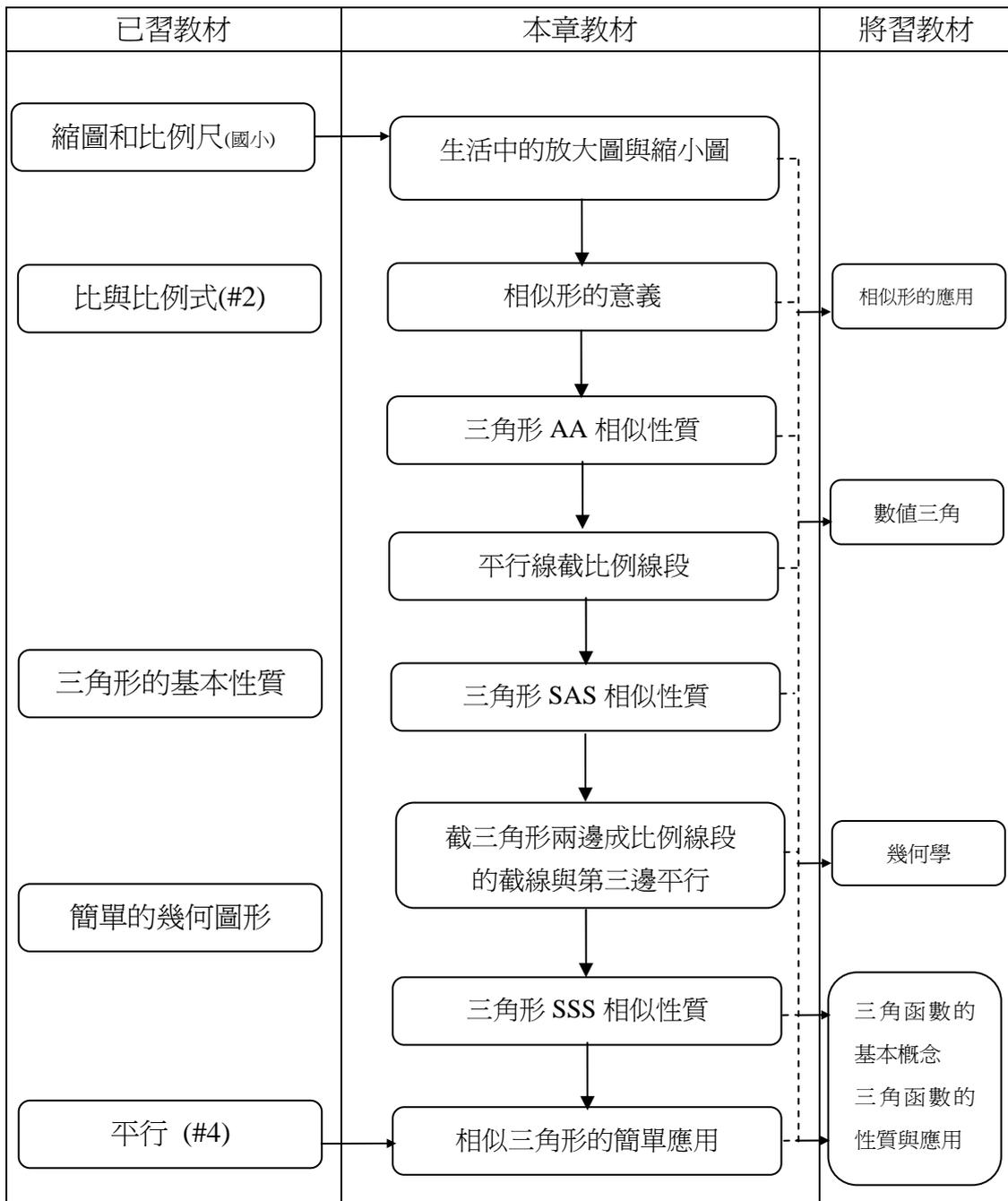
● 未習教材能力指標

- S-3-8 能瞭解平面圖形線對稱的意義。
- S-4-6 能利用垂直平分的概念檢驗對稱軸。
- S-3-9 能辨識基本圖形間對應邊長成比例時的形狀關係。
- S-3-11 能操作圖形之間的轉換組合。
- S-4-4 能根據性質瞭解某些圖形間的包含關係。
- S-4-5 能瞭解垂直、平行的定義。
- S-4-1 能根據給定的性質作局部推理。

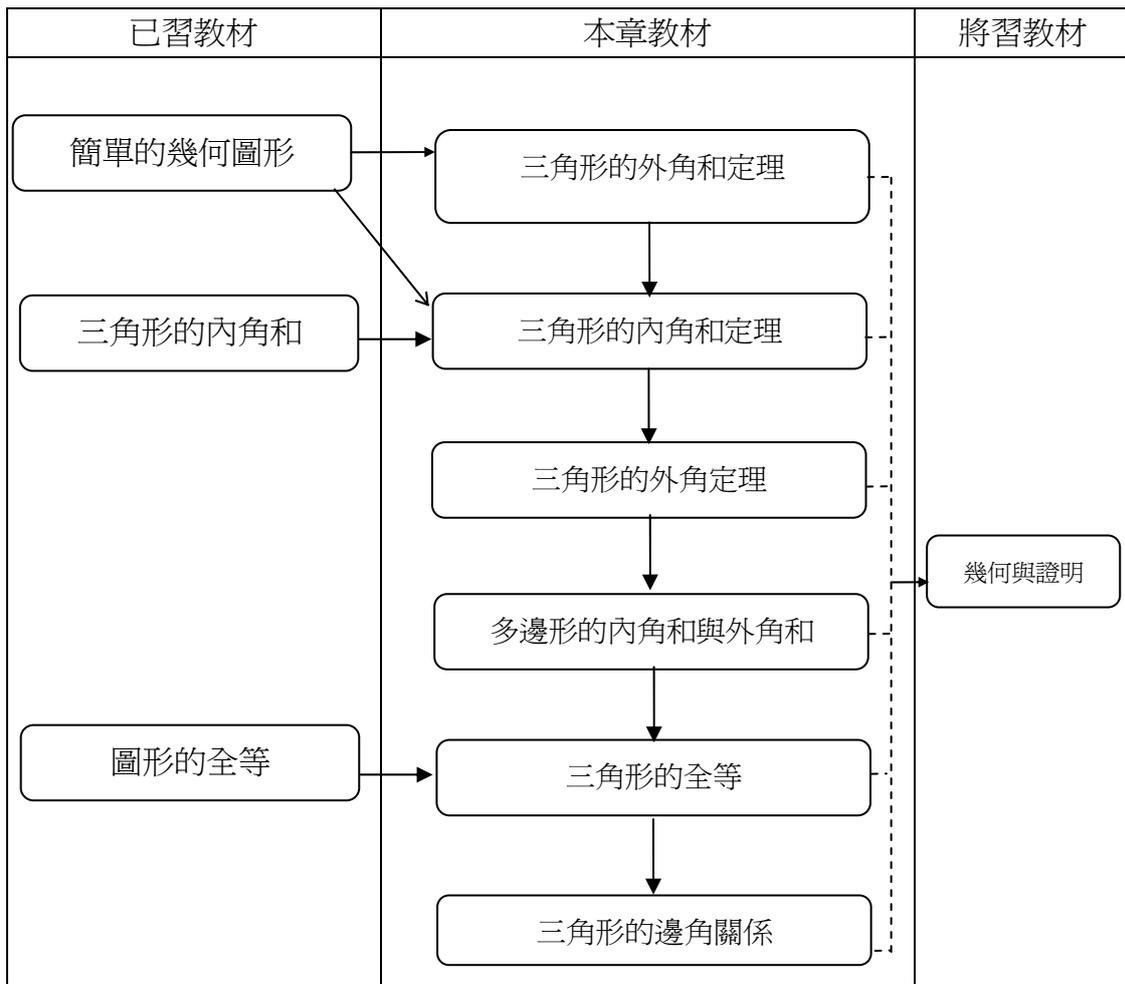




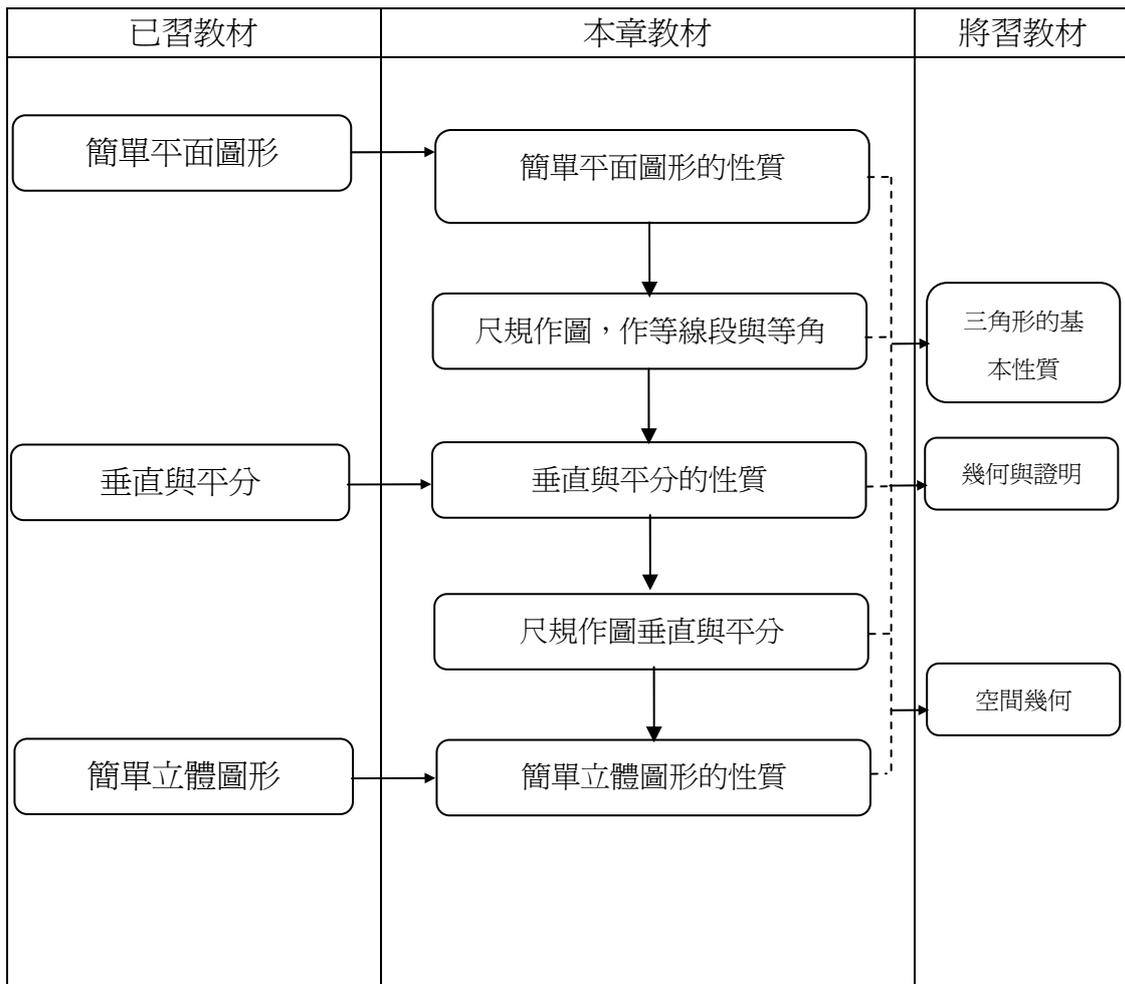
(引自 民國 87 年部編版第五冊教師手冊第 46 頁)



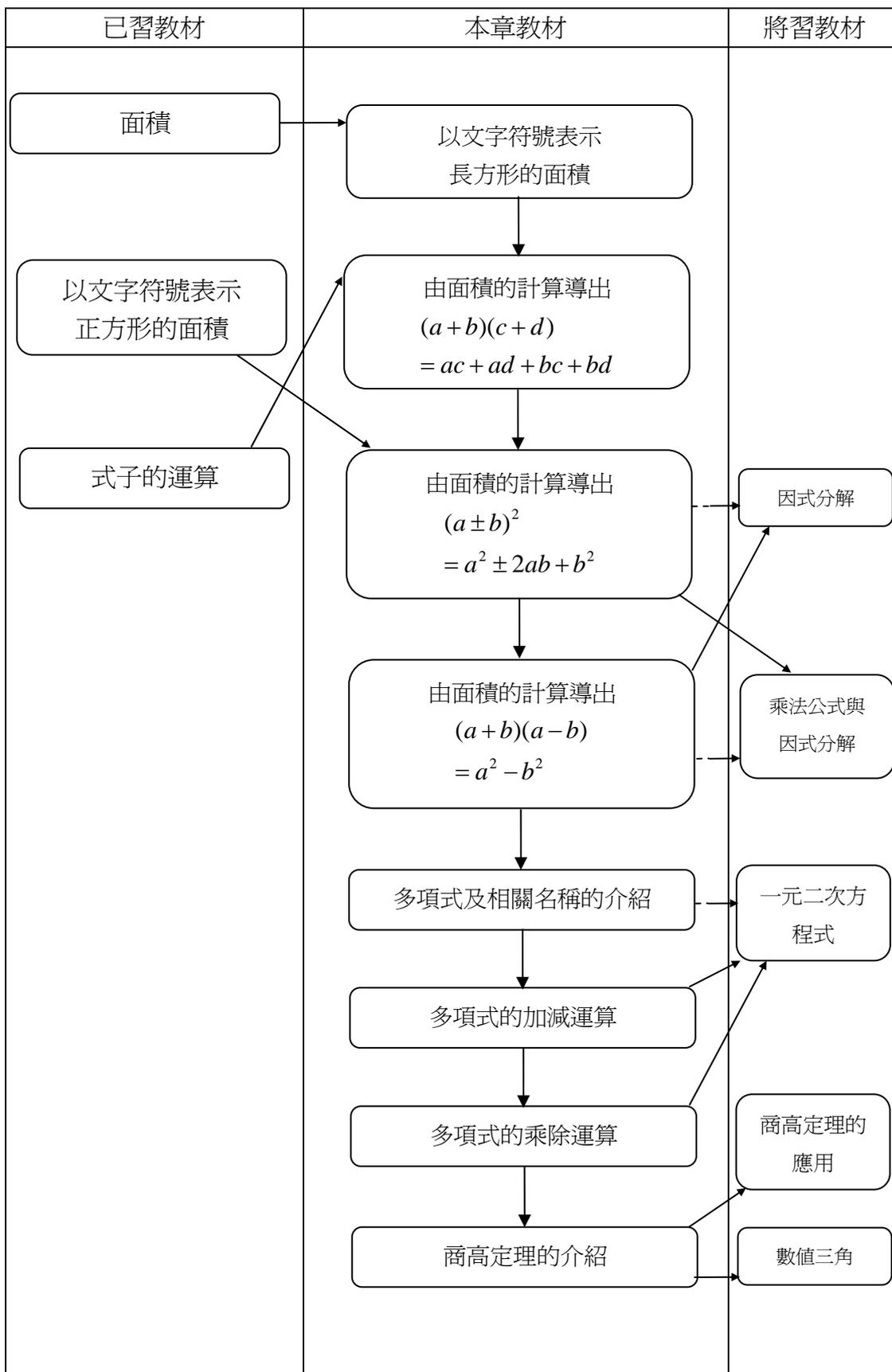
(引自 民國 87 年部編版第五冊教師手冊第 17 頁)



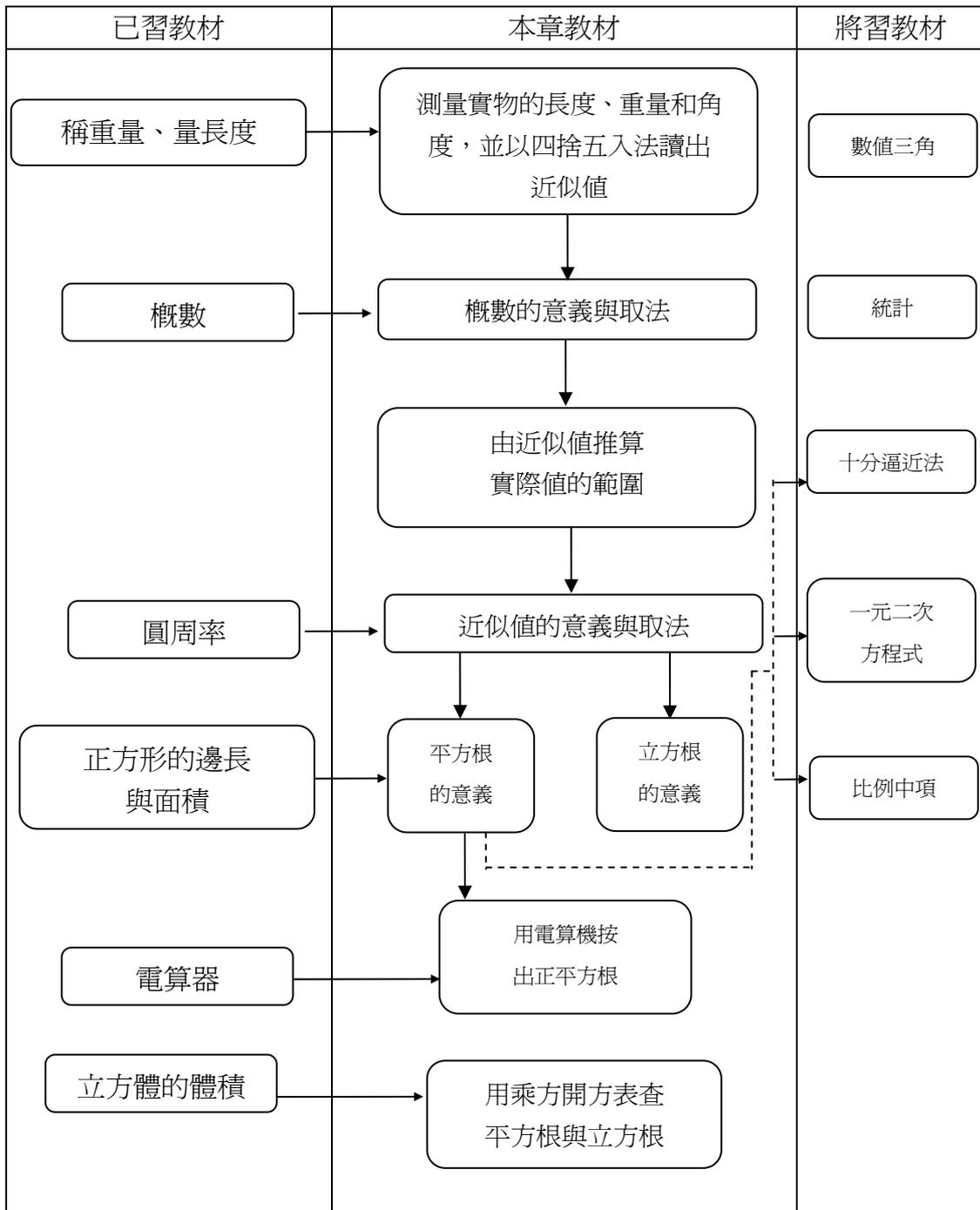
(引自 民國 87 年部編版第四冊教師手冊第 88 頁)



(引自 民國 87 年部編版第四冊教師手冊第 46 頁)



(引自 民國 87 年部編版第三冊教師手冊第 17 頁)



(引自 民國 87 年部編版第二冊教師手冊第 110 頁)