

國立清華大學

碩士論文

在國中以坐標幾何求算三角形面積之  
教學實驗初探

An Exploration of Teaching Experiment on the  
Area of Triangles Situated on the Coordinate Plane  
for Junior-High Students

系 別：數學系應用數學組

學 號：107021506

研 究 生：葉繼聰 (Ye, Ji-Cong)

指 導 教 授：單維彰 (Shann, Wei-Chang)

邱鴻麟 (Chiu, Hung-Lin)

中 華 民 國 一 〇 九 年 七 月

# 國立清華大學

## 博碩士紙本論文著作權授權書

(提供授權人裝訂於全文電子檔授權書之次頁用)

本授權書所授權之學位論文，為本人於國立清華大學數學系  
應用數學組，108學年度第二學期取得碩士學位之論文。

論文題目：在國中以坐標幾何求算三角形面積之教學實驗初探  
指導教授：單維彰, 邱鴻麟

### ■ 同意

本人茲將本著作，以非專屬、無償授權國立清華大學，基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，與回饋社會與學術研究之目的，國立清華大學圖書館得以紙本收錄、重製與利用；於著作權法合理使用範圍內，讀者得進行閱覽或重製。

■ 本人確認繳交的紙本論文與系統審核通過的電子檔論文內容相符。

授權人：葉繼聰

親筆簽名：葉繼聰

中華民國 109 年 7 月 21 日

國立清華大學碩士學位論文  
指導教授推薦書

National Tsing Hua University Master Thesis  
Advisor Approval Form

數學系應用數學組

葉繼聰 君 (學號107021506) 所提之論文

在國中以坐標幾何求算三角形面積之教學實驗初探

經由本人指導撰述，同意提付審查。

Department of Mathematics

葉繼聰 君 (Student ID: 107021506) who has submitted the  
thesis

An Exploration of teaching experiment on the area of  
triangles situated on the coordinate plane for  
junior-high students

under my guidance, I approve for its submission to the  
oral defense committee.

指導教授  
(Advisor)

單維毅 邱鴻麟  
(簽章)  
(Signature)

中華民國 109 年 7 月 1 日

國立清華大學碩士學位論文  
考試委員審定書

National Tsing Hua University Master Thesis  
Oral Defense Form

數學系應用數學組 葉繼聰 君 (學號107021506) 所  
提之論文

在國中以坐標幾何求算三角形面積之教學實驗初探

經本委員會審查，符合碩士資格標準。

Department of Mathematics 葉繼聰 君 (Student ID:  
107021506) who has submitted the thesis

An Exploration of teaching experiment on the area of  
triangles situated on the coordinate plane for  
junior-high students

has passed the oral defense and has met the  
qualifications to be awarded the degree of Master of  
Science.

學位考試委員會  
(Oral defense Committee)

主持人  
(Chair)

謝豐瑞 (簽章)  
(Signature)

委員  
(Members)

邱鴻麟

林煥培  
單維彰

中華民國 109 年 7 月 1 日

## 摘要

本研究旨為研究者認為國中平面幾何的課程內容比重過多，可以適時加入現行高中課程內容中有關坐標幾何的課程，因此與指導教授研擬出國三學習坐標幾何—「三角形面積坐標算法」之教案、學習單、測驗卷等研究工具，實地教學於桃園市某國中三年級之學生，根據研究結果探討其可行性。

坐標幾何—「三角形面積坐標算法」的教學實驗結果顯示：多數國三學生對於此教案之內容能完全學會；有少部分同學尚能接受；有極少數的同學學習成效較差。本研究的學習成效評估為後測與延後測之測驗卷，經過 McNemar's test 之檢定後得到兩次測驗結果並沒有退步的情況，可以顯示學習結果沒有隨著時間而退步。

最後研究者根據研究結果，對於未來新課綱的課程內容以及相關研究提出建議。

**【關鍵詞】：**坐標幾何(解析幾何)、McNemar's test

# Abstract

The researcher of this study maintained that the junior high school curriculum emphasized too much on plane geometry and should incorporate existing high school curriculum on coordinate geometry when appropriate. Therefore, the researcher discussed with the researcher's advisor and proposed a lesson plan "Using Coordinates to Calculate the Area of a Triangle" for 9<sup>th</sup> graders to learn coordinate geometry. The researcher also developed research tools such as learning sheets and tests. This lesson plan was implemented on 9<sup>th</sup> graders in a junior high school in Taoyuan City, Taiwan. The feasibility of this lesson plan was evaluated according to the research results.

The teaching experiment results of coordinate geometry—Using Coordinates to Calculate the Area of a Triangle—showed that most 9<sup>th</sup> graders could fully comprehend the content of this lesson plan. Few students found it somehow acceptable, while extremely few students exhibited poor learning results. The methods of evaluating the learning results adopted by this study were posttest and delayed posttest. The McNemar's test was used and revealed that the two test results did not show a regression. Therefore, the learning results did not regress over time.

Finally, based on research results, the researcher proposed suggestions for the content of the future curriculum and relevant research.

Key words : coordinate geometry , McNemar's test

## 致 謝

論文的結束代表新的旅程的開始，在清大碩班的這兩年既短暫卻又漫長。從碩一不適應清大數學所的課程難度，到碩二修完課程、完成論文，是段難忘的旅途。

首先，先感謝我的媽媽以及哥哥，在我碩一上瀕臨崩潰的時候，一直在我身旁當我的依靠，最終我也不負你們的期望，順利取得碩士學位。

再來，我要感謝我的指導教授單維彰教授，在念大學的時候便是教授的學生，因為未來想要成為一名中學教師因而拜託教授當我的指導教授，跨校的指導非常麻煩，但教授仍對我的指導不遺餘力。從您身上學習到的非常多知識，從論文撰寫到數學教育等都讓我受益良多。在口試前仔細幫我修訂論文並叮嚀我許多事項，口試後也在清大與我一同逐一修訂論文，真的非常謝謝您。接著感謝口試委員，師大的謝豐瑞教授與清大的林碧珍教授，給予我論文非常深入且實用的建議，以及感謝清大的指導教授邱鴻麟教授，在我清大兩年擔任我的導師關心我的課業情況。

最後，謝謝幫忙我完成此教學實驗的國中校長、主任、老師等，從教學實驗的過程中真的學習到很多，我也會帶著這樣的經驗及自己對教學的熱忱，往成為一位好老師的目標邁進。

繼聰 謹誌

109 年 7 月

# 目錄

<b>第一章 緒論</b> .....	1
第一節 研究動機與背景 .....	1
第二節 研究目的 .....	2
第三節 研究問題 .....	2
第四節 研究範圍與限制 .....	3
<b>第二章 文獻探討</b> .....	4
第一節 108 課綱關於幾何的相關資料 .....	4
第二節 台灣、日本有關幾何的教科書內容比較 .....	5
第三節 國中教育會考介紹 .....	9
第四節 行列式 .....	10
第五節 相關研究探索 .....	10
<b>第三章 研究方法</b> .....	14
第一節 研究設計與流程 .....	14
第二節 實驗研究對象 .....	17
第三節 教學實驗處理 .....	18
第四節 資料分析方法 .....	28
<b>第四章 研究結果</b> .....	32
第一節 上課狀況 .....	32
第二節 學習單狀況 .....	33
第三節 測驗卷狀況 .....	38
<b>第五章 結論與建議</b> .....	48
第一節 結論 .....	48
第二節 討論與建議 .....	49
<b>參考文獻</b> .....	52
附錄一、教學實驗教案 .....	54
附錄二、教學實驗學習單 .....	59



附錄三、教學實驗測驗卷 .....	62
附錄四、延後測之測驗卷 .....	63
附錄五、計算 mid-p-value 之程式碼 (R 語言) .....	64
附錄六、回饋問卷及其資料處理 .....	65

## 表目錄

表 2.2.1 康軒、南一、翰林在九年級上學期數學課本章節之比較 .....	5
表 2.2.2 康軒、南一、翰林在九年級上學期數學課本的章節頁數比較 .....	6
表 2.5.1 搜尋「平面幾何」出現之論文名稱 .....	11
表 2.5.2 搜尋「國中幾何」出現之論文名稱 .....	12
表 3.2.1 兩班三次段考數學成績平均及標準差 .....	18
表 3.2.2 兩班會考數學成績分布 .....	18
表 3.3.1 教學目標與教學內容對照表 .....	22
表 3.4.1 $2 \times 2$ 列聯表 .....	29
表 4.2.1 學習單完成程度統計表 .....	37
表 4.3.1 後測測驗卷題目答對人數統計表(1) .....	41
表 4.3.2 後測測驗卷題目答對人數統計表(2) .....	42
表 4.3.3 延後測測驗卷題目答對人數統計表(1) .....	44
表 4.3.4 延後測測驗卷題目答對人數統計表(2) .....	44
表 4.3.5 後測與延後測之數據變化 .....	45
表 4.3.6 第一題後測與延後測之 $2 \times 2$ 列聯表 .....	46
表 4.3.7 第二題後測與延後測之 $2 \times 2$ 列聯表 .....	46

# 圖目錄

圖 2.2.1 日本課本之平行線截比例線段之題目 .....	7
圖 2.2.2 日本課本強調用坐標方式理解函數圖形變化 .....	8
圖 3.1.1 研究架構圖 .....	14
圖 3.1.2 引起學習動機之會考試題(106 國中教育會考)—利用坐標方式解題.....	16
圖 3.3.1 作 $OQ$ 之平行線交 $x$ 軸於 $A$ 點 .....	20
圖 3.3.2 當 $d < 0$ 時，作 $OQ$ 之平行線交 $x$ 軸於 $A$ 點 .....	21
圖 3.3.3 學習單的引導 1 .....	23
圖 3.3.4 學習單的例題 1 .....	23
圖 3.3.5 學習單的練習 1 .....	24
圖 3.3.6 學習單的任務 1 .....	24
圖 3.3.7 學習單的任務 2 .....	24
圖 3.3.8 學習單的引導 2 .....	25
圖 3.3.9 學習單的例題 2 .....	25
圖 3.3.10 學習單的練習 2 .....	25
圖 3.3.11 學習單的任務 3 .....	26
圖 3.3.12 學習單的練習 3 .....	26
圖 3.3.13 測驗卷(後測)的題目 1 .....	26
圖 3.3.14 測驗卷(後測)的題目 2 .....	27
圖 3.3.15 測驗卷(延後測)的題目 1 .....	27
圖 3.3.16 測驗卷(延後測)的題目 2 .....	27
圖 3.4.1 「皆能完成」之範例 .....	30
圖 3.4.2 「部分完成」之範例 .....	31
圖 3.4.3 「未完成」之範例 .....	31
圖 4.2.1 甲班 A 學生之學習單 .....	33
圖 4.2.2 甲班 A 學生之學習單 .....	34
圖 4.2.3 甲班 B 學生之學習單 .....	34

圖 4.2.4 甲班 C 學生之學習單 .....	35
圖 4.2.5 乙班 D 學生之學習單 .....	35
圖 4.2.6 乙班 E 學生之學習單 .....	36
圖 4.2.7 乙班 F 學生之學習單 .....	36
圖 4.2.8 乙班 G 學生之學習單 .....	37
圖 4.3.1 甲班 H 學生之後測測驗卷 .....	38
圖 4.3.2 甲班 I 學生之後測測驗卷 .....	39
圖 4.3.3 甲班 J 學生之後測測驗卷 .....	39
圖 4.3.4 乙班 K 學生之後測測驗卷 .....	40
圖 4.3.5 乙班 L 學生之後測測驗卷 .....	41
圖 4.3.6 甲班學生 M 學生之後測測驗卷 .....	43
圖 4.3.7 乙班學生 N 學生之後測測驗卷 .....	43
圖 4.3.8 甲班 O 學生之後測測驗卷 .....	44
圖 4.3.9 第一題後測與延後測之比較 .....	45
圖 4.3.10 第二題後測與延後測之比較 .....	45

# 第一章 緒論

## 第一節 研究動機與背景

臺灣近年 108 課綱正式上路，新課綱帶來不一樣的課程內容以及多元的學習方式，觀察民國 100 年起實施的 97 九年一貫課綱以及現今的 108 課綱的數學課程內容。研究者認為在 6~9 年級的幾何課程內容差異不大，但其餘數學領域方面皆有一些變革，因此想要探討國高中幾何課程有無可修正之處。

綜觀國內國中與高中數學之幾何課程，與國外之幾何課程相比，我們發現國中數學在於「平面幾何」的課程上顯得較深較難，反而忽略「坐標幾何」(coordinate geometry)是能廣泛用於數學問題上，並且「威力」十足。舉例而言，我們在國小、國中階段要計算三角形面積，我們需要知道底邊長以及高，方能求出三角形面積。而往往這些資訊並不是容易能夠求得；若是將其放入坐標幾何，若已知三頂點坐標，我們就可以迅速求得三角形面積。

在上述研究者提出「坐標幾何」可以嘗試提早引入國中教學現場的論證點之一，在於研究者進入國中教學現場時發現，許多困難的國中幾何問題，利用「坐標化」的觀念時就可以迎刃而解。因此研究者試想能否在國中時期就將坐標幾何介紹給學生，所以設計出有關於坐標幾何的教學實驗，並進入國中教學現場做實驗，以期望能透過該實驗讓學生領略到坐標幾何之用處。

論證點之二在於香港學者黃毅英等對於平面幾何以及坐標幾何之想法：在數學課程中要刪除的是「繁、難、多、舊」，平面幾何恐怕被認為「難」與

「舊」一類，因此需要刪減修正。而學習幾何的主要作用在於(一)認識和運用一些幾何的規律；(二)做邏輯推理的訓練(張家麟、黃毅英、林智中，2010)。對於作用(一)而言，學習坐標幾何是同樣有效的，但坐標幾何對於高中幾何乃至於微積分是更直接有關的。因此平面幾何的刪減以及坐標幾何的盡早引入是值得嘗試的，這樣方能更有機融合(歐氏)平面幾何與坐標幾何(單維彰，2018)。

綜合上述兩點論證，平面幾何與坐標幾何的改革即成為本研究的動機。研究者期盼藉由此坐標幾何的教學活動讓學生能領略，當幾何有了坐標之後，就變得有用許多，並在教學活動中，讓學生體驗數學公式演繹的過程。

## 第二節 研究目的

由於國中數學題目常會求三角形的面積，但若是不知道三角形的底跟高就十分難計算其面積。因此本研究希望透過坐標幾何「三角形面積坐標算法」的教學實驗，提早讓學生見識到當三角形有頂點坐標之後，不用知道底跟高，我們也可以輕鬆得知三角形面積。本研究實驗課程，便是希望讓學生了解坐標幾何的實用之處，也藉此說明國中的幾何課程可以提早進入坐標幾何的世界。

## 第三節 研究問題

根據上述研究目的，探究以下問題：

在國中部分能否編入坐標幾何—三角形面積坐標算法之內容，

九年級學生之學習成效是否良好？

## 第四節 研究範圍與限制

### 一、研究範圍

本研究為進行「三角形面積坐標算法」之教學實驗，讓國三學生能藉由教學活動領略坐標幾何的威力，從國中三年級上學期第一章相似形做延伸。故將研究範圍界定如下：

#### 1. 研究對象

本研究從桃園市某公立國中三年級選取兩班，程度分別為中上以及中下。

#### 2. 研究工具

【附錄一】之教案、【附錄二】之學習單、【附錄三】之教學後測驗卷以及【附錄四】之延後測測驗卷，對上述研究對象做實地教學與研究。

### 二、研究限制

此次教學實驗必須在國三學生學習完相似形後方能實施，而相似形課程在國三上學期，正逢準備國中教育會考階段，並沒有許多學校與班級願意給予時間借課，無法對更多不同學生實施教學實驗。

## 第二章 文獻探討

本章重點在於探討坐標幾何的相關文獻探討，首先必須先了解台灣現行課綱關於坐標幾何的課程內容以及學習時程安排，因此在第一節的內容為 108 課綱有關於幾何的相關內容。第二節探討台灣的課本對於平面幾何以及坐標幾何的相關資料，並比較日本的幾何課程內容的差異。第三節為國中教育會考的相關資料。第四節為行列式之教學文獻。第五節為本研究之相關研究探索。

### 第一節 108 課綱關於幾何的相關資料

在 108 課綱數學領域綱要中，關於學習重點的呈現，分國民小學、國民中學、普通型高級中等學校必修課程（11 年級分 A、B 兩類）、普通型高級中等學校加深加廣選修課程（12 年級分甲、乙兩類）等類編寫，係依據下述五個學習階段的教學目標發展而成。其中我們觀察第四學習階段（國民中學 7-9 年級）以及第五學習階段（普通型高級中等學校 10-12 年級）有關於幾何內容之描述。

第四學習階段（國民中學 7-9 年級）：在平面幾何方面，各年級分別學習直觀幾何（直觀、辨識與描述）、測量幾何、推理幾何；空間幾何略晚學習。

有關於幾何的內容為直觀幾何、測量幾何、推理幾何等，但在第四學習階段並沒有提到坐標幾何，因此可以得知在國中階段，學生是沒有強調坐標幾何的課程內容。

第五學習階段（普通型高級中等學校 10-12 年級）：在幾何方面，全體學生都有學習基本空間概念的機遇，透過坐標而連結幾何與代數，並認識基本的線性代數；數學 A 的學生還要熟悉空間向量的操作，用來進一步發展坐標幾何與線性代數。

從第五階段的內容來看，在幾何方面強調透過坐標連結幾何與代數，從 108 課綱的學習重點來看，幾何方面以坐標連結幾何是高中學習的一大重點。

從 108 課綱在國中階段(第四學習階段)有關於平面幾何的學習內容有 16 項，然而關於坐標幾何的內容卻只有兩項；在高中階段(第五學習階段)平面幾何部分卻僅有 2 項，在坐標幾何反而有 5 項之多。在第四學習階段與第五學習階段關於幾何內容，在此發生落差。在 108 課綱的學習表現 g-V-5 的內容：**理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。**更能呼應本研究：國中階段在純平面幾何方面著墨的過深過難，在坐標幾何上卻沒有相對應的比重，因為在高中階段在幾何方面強調坐標幾何。顯示了國高中在幾何內容的著墨上有落差之處，因此可以有改良的地方。

## 第二節 台灣、日本有關幾何的教科書內容比較

由於 108 課綱課本都還沒有出版，因此下述內容為 99 課綱的課本教科書內容解析。研究者根據目前台灣國中教科書三大版本：康軒版(洪有情，2019)、南一版(左台益，2019)、翰林版(張幼賢，2016)。做整理分析發現，三大版本的章節順序、章節名稱、章節內容近乎完全相同，舉例而言在國三上學期(第五冊)的三大版本課本，章節名稱及順序比較表如表 2.2.1。

表 2.2.1 康軒、南一、翰林在九年級上學期數學課本之章節名稱比較

	康軒	南一	翰林
第一章	第一章：相似形 1-1 比例線段與縮放圖形 1-2 相似與相似三角形 1-3 相似三角形的應用	第一章：相似形 1-1 比例線段與圖形縮放 1-2 相似形	第一章：相似形 1-1 比例線段 1-2 縮放與相似 1-3 相似三角形的應用



第二章	第二章：圓 2-1 點、直線、圓之間的位置關係 2-2 圓心角、圓周角及弦切角	第二章：圓形 2-1 點、直線、圓 2-2 圓心角、圓周角與弦切角	第二章：圓 2-1 點、直線、圓之間的位置與關係 2-2 圓心角、圓周角及弦切角
第三章	第三章：幾何與證明 3-1 證明與推理 3-2 外心、內心、重心	第三章：外心、內心與重心 3-1 推理證明 3-2 三角形的外心、內心與重心	第三章：幾何與證明 3-1 證明與推理 3-2 外心、內心與重心

從表 2.2.1 的章節名稱及順序，三大版本近乎完全相同，有些許差異僅在南一版時將相似形的應用合併在 1-2 的部分，而康軒及翰林版則放入 1-3 裡。且三大版本在內容頁數上也大同小異，如表 2.2.2 所示。

表 2.2.2 康軒、南一、翰林在九年級上學期數學課本的章節頁數比較

	康軒	南一	翰林
第一章頁數	共 60 頁	共 52 頁	共 64 頁
第二章頁數	共 66 頁	共 56 頁	共 58 頁
第三章頁數	共 47 頁	共 49 頁	共 55 頁

從表 2.2.2 編排順序、章節內容來看，三版本皆依據課綱所編制，因此皆大同小異。研究者在此選定用翰林版的教科書作為研究參考依據。

坐標幾何在國中教科書的坐標幾何部分，僅有在八年級的部分介紹到二元一次方程式，在直角坐標系之作圖，以及在九年級介紹二次函數圖形，其餘沒有相關的課程章節內容。由此可見，在國中幾何課程內容對於坐標幾何的著墨甚少。

為了思考台灣的幾何課程有那些值得探討之處，研究者採取跨國比較的策略，因此到教科書圖書館翻閱日本的數學教科書。比較日本在國小五、六年級、國中教科書之幾何內容與台灣的教科書內容，發現的不同之如下。

台灣在平行線截比例線段等課程內容著墨很多，平行線截比例線段之相關內容佔據國三教科書的 $\frac{1}{9}$ 以上，約有 20 多頁。日本教科書中也是在九年級課本第五章第三節有提到平行線截比例線段性質，但是內容僅佔據國三教科書 $\frac{1}{15}$ ，僅有 10 頁的內容，內容著重於基礎的平行線截比例線段性質。如圖 2.2.1。就題數而言，台灣課本有關平行線截比例線段的題數包含例題 8 題、類題+課後練習有 15 題；而日本課本有關平行線截比例線段的題數包含例題 3 題、類題+課後練習有 9 題，顯現出日本和台灣在平行線截比例線段的內容比重有差異。

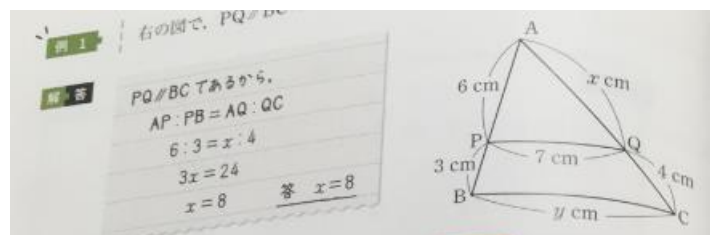


圖 2.2.1 日本課本之平行線截比例線段之題目

研究者另外對於二次函數教學印象深刻，簡介如下。

日本介紹  $y = ax^2$  之圖形時強調坐標的方式呈現伸縮的概念，從課本內容得知藉由坐標的方式，讓學生知道函數圖形的變化量以及圖形之間的差異，且利用坐標的方式表示二次函數的遞增遞減，如圖 2.2.2。

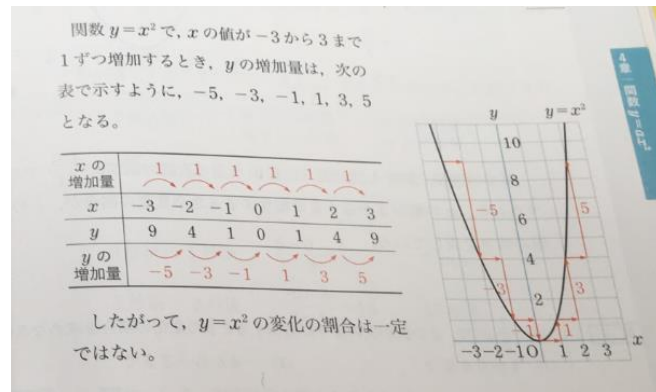


圖 2.2.2 日本課本強調用坐標方式理解函數圖形變化量

### 第三節 國中教育會考介紹

研究者為了在教學實驗課程能有引起動機的題目，因此尋找國中教育會考有關平行線、相似形、坐標幾何的歷屆試題。在此節介紹國中教育會考的相關資料。

國中教育會考：

- 法源依據：國民小學及國民中學學生成績評量準則
- 辦理時間：自民國 103 年起每年 5 月舉辦 1 次
- 施測對象：全體國三學生
- 命題依據：國民中小學九年一貫課程綱要能力指標
- 計分方式：標準參照
- 結果呈現方式：國文、數學、社會及自然評量結果分為精熟、基礎及待加強 3 個等級；寫作測驗分為一至六級分。英語科包含聽力及閱讀兩項語言技能，成績通知單除了分別呈現此 2 項技能的能力表現等級，其中聽力分為「基礎」及「待加強」2 個能力等級，而閱讀分為「精熟」、「基礎」及「待加強」3 個能力等級，另外也會呈現英語科整體（閱讀加聽力）的能力等級。

其中國中教育會考數學科的考試時間為 80 分鐘，題目為選擇題與非選擇題混合題型之數學科題本，測驗題數不一定相同，以 102 年試辦國中教育會考為例：選擇題為 25 題，非選擇題為 2 題（得分範圍為 0 至 6 分），由於考後的能力等級切點題數與得分設定結果，將由當年標準設定計分會議決定，並不會每年一樣。

## 第四節 行列式

本研究之教學實驗—三角形面積坐標算法為高中數學內容的行列式，選擇「行列式」的原因是此觀念是國中的相似形、平行線截比例線段在坐標平面上的直接應用，並且在遇到國中幾何難題時，用此方法則可以解決許多國中幾何難題。本節為行列式的相關研究文獻探討。

在尋找有關行列式的教學研究文獻時，研究者僅發現呂坤明(2015)從 HPM 觀點看 99 課綱高中數學行列式值教材，在此論文中提到在高中數學介紹行列式值教材時，皆用面積做為開頭來介紹行列式，從中得知行列式的核心精神便是面積，本研究雖然並沒有直接介紹行列式的定義，但也是用面積方式來說明並推導三角形面積。

## 第五節 相關研究探索

研究者研究此題目時，為避免有重複題目的產生，因此利用「台灣博碩士論文知識加值系統」中搜尋論文關鍵字「坐標幾何」，沒有產生相關論文；搜尋關鍵字「解析幾何」，出現三篇論文分別是(1)高中解析幾何量表影響之研究(莊銘景，2018)、(2)使用解析幾何模型及數位影像處理技術研究 Ball Grid Array 電子構裝的自動封裝檢查(許世明，2010)、(3)電腦輔助教學改善學習態度與成效之研究—以 GeoGebra 動態解析幾何及國二數學為例(張義松，2009)。此三篇論文與本研究皆沒有重複。搜尋關鍵字「平面幾何」出現 31 筆資料，如表 2.5.1 所示。

表 2.5.1 搜尋「平面幾何」出現之論文名稱

搜尋關鍵字：平面幾何 出現之論文名稱
黃思遠(2018)。平面幾何圖形之方向性認知研究。
歐瑞榮(2018)。銑削高硬度鋼之最佳化刀具小平面幾何參數研究。
陳俊霖(2017)。應用於 TDOA 聲源定位之多平面幾何定位法。
林岳軒(2017)。由微振量測進行平面幾何與邊界條件對建築物振動特性之影響探討。
蔡元勛(2016)。模矩化單元於平面幾何中的應用及探討。
黃輝燦(2015)。以簡單平面幾何解析與 追蹤高爾夫揮桿軌跡。
林欣宜(2015)。應用 van Hiele 幾何思考層次理論於國小平面幾何教材開發之研究。
翁聖閔(2013)。在平面幾何證明題中使用輔助線的策略。
蔡佳玲(2013)。應用 van Hiele 幾何思考層次理論於國小平面幾何圖形概念桌上遊戲開發之研究。
楊承鑫(2012)。一～九年級數學平面幾何教材內容之分析研究。
高明揚(2010)。圖形對高中生解題的影響—以學測平面幾何單元試題為例。
黃亞妮(2010)。古地圖平面幾何精確性之研究：以淡新檔案地圖為例。
許家揚(2009)。電子方塊智慧拼圖：應用於學習平面幾何圖形概念之探討。
李梓楠(2007)。國小高年級學童平面幾何論證之試驗性教學研究。
陳心怡(2006)。資訊融入教學以探究國小五年級學童平面幾何學習之研究-以「多邊形與內角和」為例。
黃佩芬(2005)。以 LOGO 程式語言探討國小聽障兒童平面幾何解題歷程的改變。
林妙齡(2005)。國小六年級學童平面幾何臆測產生之探究。
徐于婷(2004)。國小六年級學童平面幾何屬性知覺之探討。
戴瑋伶(2003)。建置一個結合七巧板與平面幾何之學習網站。

李俊儀(2003)。資訊科技融入數學教學模組之開發與研究---以國中平面幾何基礎課程教學為例。
潘宏明(2002)。國小五年級排灣族學童平面幾何圖形概念之詮釋研究---以屏東縣某國小為例。
沈佩芳(2001)。國小高年級學童的平面幾何圖形概念之探究。
謝貞秀(2001)。國小中年級學童平面幾何圖形概念之探究。
高耀琮(2001)。兒童平面幾何圖形概念之探討。
呂季霏(2000)。花蓮縣國小低年級泰雅族學生平面幾何概念之詮釋性研究。
林素珍(1999)。在可重組式的網狀平行架構上解決一些平面幾何的問題。
王維俊(1996)。R.M.Schindler 與 F.L.Wright 住宅平面幾何結構之比較。
鄧敦建(1994)。平面幾何的分解在網格衍生之應用。
翁召名(1992)。彎道平面幾何特性對床形與床質粒徑級配影響之研究。
鄭思堂(1991)。平面幾何最佳值之研究與應用。
何耀東(1985)。構件平面幾何形狀對 R 抗裂曲線之影響。

另外搜尋關鍵字「國中幾何」出現 13 筆資料，如表 2.5.2 所示。

表 2.5.2 搜尋「國中幾何」出現之論文名稱

搜尋關鍵字：國中幾何 出現之論文名稱
戴湘芬(2018)。區分性 ABC 教學法融入國中幾何教學設計之探討。
李昶慶(2017)。GeoGebra 融入國中幾何「三角形三心」單元學習成效之探討—以宜蘭縣某國中為例。
林鴻哲(2012)。台灣、中國上海、新加坡國中幾何教材內容之比較。
黃玫琪(2011)。運用口語引導於國中幾何推理教學之研究。
阮子恆(2010)。海洋生物素材融入國中幾何課程之教學成效分析。
許志箏(2010)。GeoGebra 對國中幾何教學成效之研究—以「圓」為例。

陳昭如(2007)。學習環應用於國中幾何教學之研究~以三角形三心單元為例。
曾喬志(2007)。從實物操作、尺規作圖到 GSP 進行國中幾何推理課題的教學實驗研究。
李樺瑾(2006)。數位教學輔助系統設計—以國中幾何教學為例。
吳文堆(2005)。多媒體電腦補助教學應用於國中幾何學。
林順隆(2004)。電腦軟體 GSP 輔助國中幾何單元教學之學習成效研究。
曾尹姿(2004)。電腦媒體運用於國中幾何學習成效之研究-以三角形基本性質為例。
江明達(2003)。國中幾何教學模組發展研究-以圓、正逆敘述為例。

根據搜尋結果，研究者探討其論文內容，皆與本研究—「國中平面幾何課程內容的刪修及引入坐標幾何的課程」此觀點無關。因此本研究並沒有與其他文獻有相似或重疊之處。



# 第三章 研究方法

本章為探討如何設計一份完整的教學實驗，對於剛學完「相似形」的國三學生進行實地教學，並藉由研究結果回應研究問題。針對本研究之研究設計與流程、實驗研究對象等部分，詳細說明如下。

## 第一節 研究設計與流程

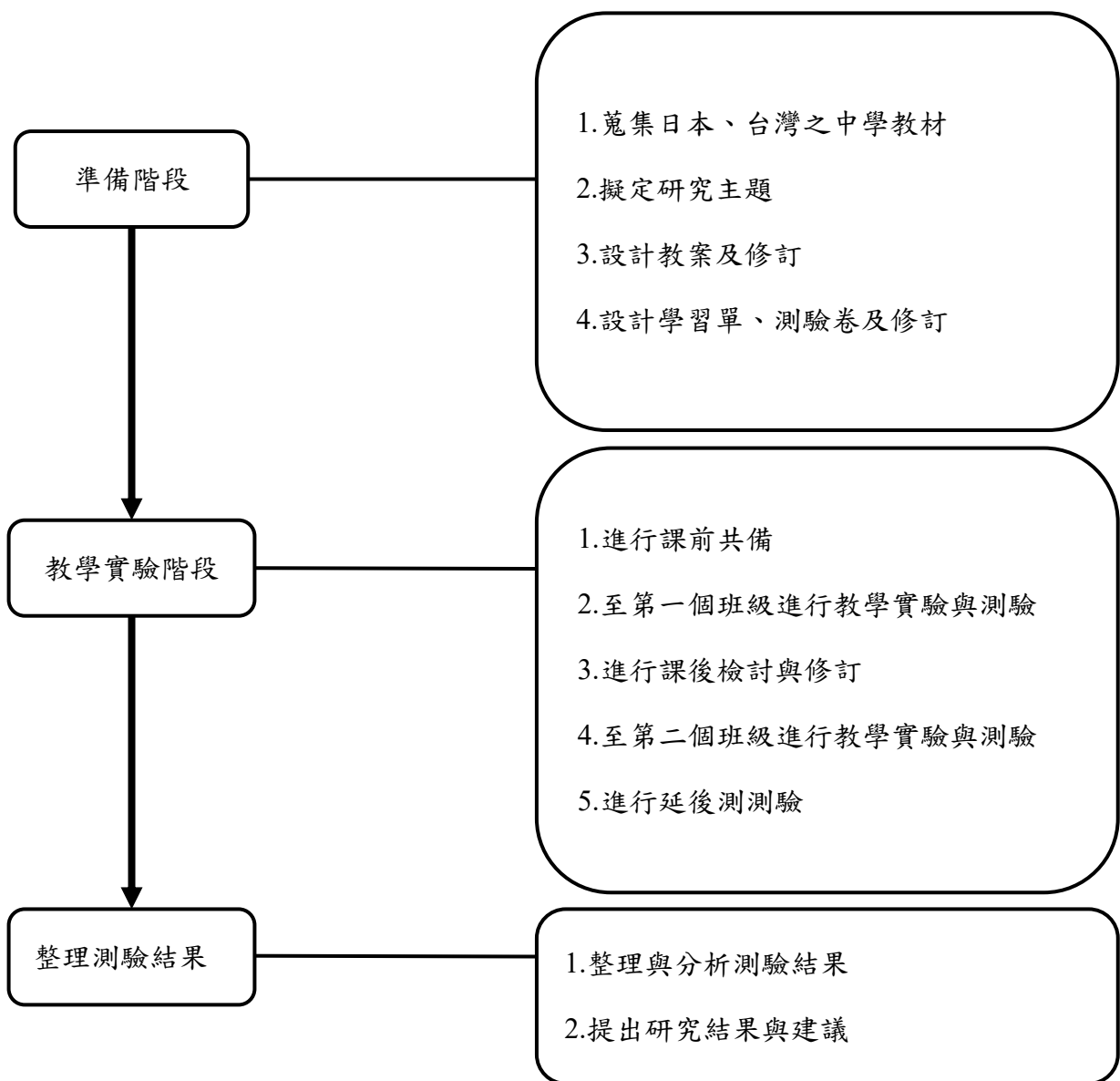


圖 3.1.1 研究架構圖

## 第一階段——準備階段(民國 107 年 11 月~108 年 9 月)

### (一)蒐集日本、台灣之中學教材

在初期找尋研究主題時，指導教授指導我去尋找外國之教科書，比較各國中學教材之差異處，以他國教材為借鏡，反思台灣教材有哪裡需要改進之處。

### (二)擬定研究主題

在參考各國教科書後，與指導教授擬定好研究主題。

### (三)設計教案及修訂

為了讓此觀點「坐標幾何的提早引入」能夠有明確的教學實驗為佐證，研究者與桃園公立某國中取得聯繫，決定在兩個班級(稱甲、乙兩班)進行教學實驗。在教學實驗前必須先完成教案(附錄一)，並與指導教授討論後，決定於證明三角形面積時採用代數式證明，並改善了教學時間之分配。

教案的修訂包含與指導教授探討三角形面積公式要加絕對值的部分要如何讓學生理解，一開始設計是讓學生藉由兩種情況推得不同結果(也就是  $\frac{1}{2}(ad-bc)$ 、 $\frac{1}{2}(bc-ad)$ )來統整必須加絕對值，修正後，只強調因為面積是正的，由題目的經驗法則得知必須加絕對值即可，對於證明部分並沒有多做強調。

### (五)設計學習單、測驗卷及修訂

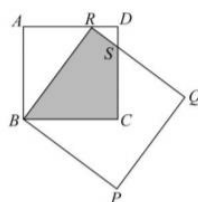
設計好教案後，便開始準備學習單(附錄二)以及測驗卷(附錄三、四)，並依據指導教授在某公立高中的教學，修改學習單內容以及測驗題目。

## 第二階段——教學實驗階段(民國 108 年 9 月~109 年 1 月)

### (一)進行課前共備

與國中校長、國中部主任、數學任課老師等數學老師進行課前共備，模擬了教案之內容，並做適度的增修，包含如何引起學生學習動機、板書的排版、教學的次序等。校長建議引起學生學習動機的部分，可以從會考的題目或是日常生活情境下手。由於學生正值國三準備會考階段，研究者便選了國中會考的試題，如圖 3.1.2，嘗試用坐標的方式解題，讓學生知道坐標的好用之處，進而引發其學習動機。

圖(十四)為兩正方形  $ABCD$ 、 $BPQR$  重疊的情形，其中  $R$  點在  $\overline{AD}$  上， $\overline{CD}$  與  $\overline{QR}$  相交於  $S$  點。若兩正方形  $ABCD$ 、 $BPQR$  的面積分別為 16、25，則四邊形  $RBCS$  的面積為何？



圖(十四)

- (A) 8                      (B)  $\frac{17}{2}$   
(C)  $\frac{28}{3}$                     (D)  $\frac{77}{8}$

圖 3.1.2 引起學習動機之會考試題(106 國中教育會考)—利用坐標方式解題

### (二)至第一個班級進行教學實驗與測驗

在第一個班級進行教學實驗，本研究的教學時間為兩節課，共 90 分鐘，並在課程結束後實施後測及教學回饋問卷，以檢視學習成效。

### (三)進行課後檢討與修訂

在第一個班級教學實驗結束後進行課後檢討，檢討內容詳列於下：

1. 板書的空間配置可以分成兩塊，並於證明時，與實際數字互相比對。
2. 在證明結束後，必須將三角形面積公式標註於黑板明顯處且不能擦掉。

3. 學生在寫類題演練時，教師應於整理黑板後，巡視班級情況。

#### (四)至第二個班級進行教學實驗與測驗

在第二個班級進行教學實驗，教學時間為兩節課，共 90 分鐘，並在課程結束後當下實施後測及教學回饋問卷，考試時間為 10 分鐘，以檢視學習成效。

#### (五)至兩個班級進行延後測測驗

在後測測驗結束後，經過一個月的時間，在課堂內進行延後測，考試時間為 10 分鐘，用以檢視學生經過一段時間後是否有退步。

### 第三階段——整理測驗結果(民國 109 年 1 月~109 年 6 月)

整理測驗結果並完成論文。

## 第二節 實驗研究對象

本研究之教學實驗施測對象選定於桃園市某公立國中三年級的兩個班級的學生為研究對象，該國中位於桃園市郊區之公立國中，研究者於國三上學期中實施教學實驗與測驗。學生之先備知識為具備相似形的概念，包含如何判定為相似性質、相似形角度會一樣、邊長成比例之性質。教學實驗時間由先至後簡稱為甲班級、乙班級。表 3.2.1 為甲、乙班級國三上學期的三次段考成績平均及標準差，全校共 10 個班級，甲乙兩班分別為全校數學成績第一名及第二名之班級，在本此研究結束後，該兩班參加 109 學年度國中教育會考，因此獲得了兩班之國中教育會考數學成績之分布，如表 3.2.2。根據國中教育會考的成績，甲乙兩班在全國而言都是屬於普通程度的學生。依據段考成績與國中教育會考成績而言，研究者認為甲班為數學程度中上的班級，乙班為數學程度中下的班級。

表 3.2.1 兩班三次段考數學成績平均及標準差

	甲班	乙班
國三上第一次段考平均/ 標準差	75.12 / 19.99	69.56 / 25.41
國三上第二次段考平均/ 標準差	76.39 / 17.55	73.77 / 21.62
國三上第三次段考平均/ 標準差	77.35 / 18.58	74.69 / 23.33

表 3.2.2 兩班會考數學成績分布

	等級 A 人數	等級 B 人數	等級 C 人數
甲班	7	18	5
乙班	3	19	7

### 第三節 教學實驗處理

此部分為指導教授和研究者共同設計「三角形面積坐標算法」的學習單及測驗卷並擬定一套教學方法。探討國三學生對於坐標幾何是否能夠理解，並依據各堂課所設立之教學目標對應教學內容，來檢視教學及學習成效。研究的工具分述如下。

#### (1) 教學實驗施行者

兩個班級的教學實驗施行者皆為研究者本身的學生，研究者在該國中之教學期間於班級內上課時間實施。

## (2) 教學活動

指導教授與研究者設計了「三角形面積坐標算法」的教案及學習單、測驗卷(後測與延後測)、回饋問卷，作為此次研究之研究工具。完整教案詳見【附錄一】，學習單詳見【附錄二】，後測測驗卷詳見【附錄三】，延後測測驗卷詳見【附錄四】。

### 一、教案設計理念

研究者從高中課程內容中發現在高二時學生學習三角形面積時，運用三角形的頂點坐標，即可用二階行列式值求解。在國中沒有這樣的坐標幾何內容，但國中卻有許多難題是可以利用坐標化的方式求出三角形面積，因此設計此教案，其所需的數學恰為國中平面幾何知識的綜合應用，可用來置換平行線截比例線段的學習內容，且讓學生體悟到坐標幾何的實用之處。

**教案分析：**根據教案之核心理念、教學目標與教學內容簡述如下：

- (1) 核心理念：讓學生理解坐標幾何的好用之處及其威力。
- (2) 教學目標：利用實例、數學式推導讓學生在有三角形三頂點坐標時，能夠迅速的計算出三角形面積(詳述請參照附錄一)
- (3) 教學內容：分成第一堂教學實驗以及第二堂教學實驗，詳述如下。

### 二、第一堂教學實驗

本節課的主要教學目標為讓學生在三角形已知三頂點坐標且其中一頂點為原點時，能夠計算出三角形之面積，並由老師推導證明一般式。第一堂課主要分成兩部分：第一部分為引起學生動機、以及學習單的範例解說、類題練習。第二部分為三角形面積的公式推導，此部分強調在三角形已知三頂點坐標且其中一點坐標為原點時，學生能夠順利推導出三角形面積之公式。

第一部分：教師引起學生動機的方法為利用會考的題目，讓學生以既有之相似形及國中知識解題。適逢學生為國三，對於會考的題目格外有感，因此可以提升學生之學習動機。接著告知學生可以利用接下來所教導之方法解題，並先實際出題給學生，利用畫輔助線以及幾何原理：兩平行線間的距離是定值，

因此若固定三角形的底邊，令其頂點在平行於底邊的直線上任意移動，產生的任意三角形之高皆為定值之概念，算出該三角形的面積。

第二部分：確定學生對於已知三角形三頂點坐標且其中一頂點為原點時能夠利用畫輔助線、製造相似三角形的方法計算出三角形面積後，教師接著將其推導為通式，也就是將三頂點中，一頂點為原點，另外兩頂點為未知數時，推導出三角形面積公式。此段教學與指導教授討論過後決定用代數式的方法作為推導，此段證明出現非常多未知數，是課程中較難的部分，教師在證明過程中和有實際數字的題目做對比，方能讓學生理解並能夠自行證明出來。證明方法及教學策略簡述如下。

**命題：**假設點  $P(a,b)$ 、 $Q(c,d)$  其中  $d > 0$  且點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊，求  $\Delta OPQ$  的面積公式。

**證明過程：**做  $OQ$  之平行線交  $x$  軸於  $A(a',0)$  點，如圖 3.3.1。已知  $\Delta OPQ$  之面積為  $\frac{1}{2}a' \times d$ ，所以須算出  $a'$ ，利用上述所說之相似形概念，得到  $a - a' : b = c : d$ ；  
 $bc = ad - a'd = d(a - a') \Rightarrow a - a' = \frac{bc}{d} \Rightarrow a' = a - \frac{bc}{d}$ ， $\therefore \Delta OPQ$  面積為  $\frac{1}{2}(ad - bc)$

**教學策略：**先以  $d > 0$  的情況作推導，輔以剛剛的題目作對比，使學生能夠接受未知數較多的情況。

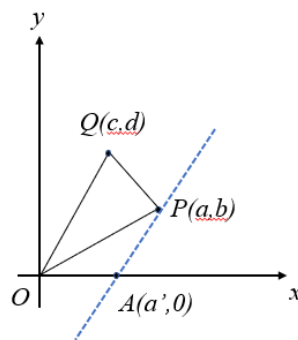


圖 3.3.1 作  $OQ$  之平行線交  $x$  軸於  $A$  點

教師證明完  $d > 0$  的情況後，讓學生自己證明當  $d < 0$  時公式會是如何，學生依照上述的方法做一次證明，證明過程如圖 3.4.2，當  $P$  在  $OQ$  直線的右邊，意味著過  $P$  平行於  $OQ$  的直線交  $x$  軸於  $A(a', 0)$ ， $a' > 0$ ，所以如果  $d < 0$ ，則

$\Delta OAQ = \frac{1}{2}a'(-d)$ 。而  $P$  在  $OQ$  直線的左邊，則意味著  $a' < 0$  所以

$\Delta OAQ = \frac{1}{2}|a'd| = \frac{1}{2}(-a')|d|$ 。總之，最後的結果不是  $\frac{1}{2}(ad - bc)$  就是  $\frac{1}{2}(bc - ad)$ 。在學生證明期間，教師在課堂內巡視學生的證明情況並適時給予指點。

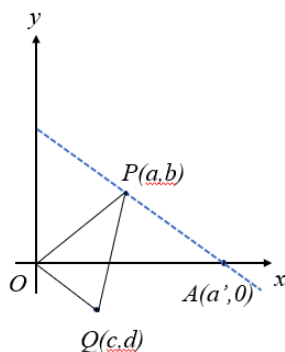


圖 3.3.2 當  $d < 0$  時，作  $OQ$  之平行線交  $x$  軸於  $A$  點

教師請有做出來證明的同學發表於黑板上，以教師幫忙作圖，學生發表的方式進行，並由教師最後導出結論：因為  $\frac{1}{2}(ad - bc)$ 、 $\frac{1}{2}(bc - ad)$  僅相差一負號，所以算出來若是為負，則直接加絕對值讓他變正即可(因為面積恆正)。

### 三、第二堂教學實驗

本節課的主要教學目標為：讓學生能夠在知道三角形三頂點坐標，而且不受限在有一頂點在原點的情況下，能夠計算出三角形面積並證明通式。第二堂課主要分為兩個部分：第一部分為範例解說、類題練習，第二部分為三角形面積公式的推導。此部分強調在平面上知道任意三角形之三頂點坐標，能夠推導出三角形面積的公式。

第一部份：問學生若是頂點不在原點要如何計算出三角形面積，並強調我們現在僅會計算有一頂點為原點之三角形面積，藉此引導出平移的概念。強調三角形面積經過平移後面積不變，接著帶入實際的例題講解，利用實際的數字讓學生能夠清楚的了解，為之後的推導證明奠定基石。

第二部分：確定學生對於平移過後的三角形面積能夠計算正確之後，接著便是三角形公式之推導，證明方法及教學策略簡述如下：



**命題：**給定平面上三點  $P_0(a_0, b_0)$ 、 $P_1(a_1, b_1)$ 、 $P_2(a_2, b_2)$ ，試找出計算  $\Delta P_0P_1P_2$  面積的公式。

**證明過程：**我們選擇其中一點  $P_0(a_0, b_0)$ ，將其平移到原點  $O$ ，則就是將每個  $x$  座標減掉  $a_0$ ，每個  $y$  座標減掉  $b_0$ ，則  $P_1'(a_1 - a_0, b_1 - b_0)$ 、 $P_2'(a_2 - a_0, b_2 - b_0)$ ，再利用第一堂課所教導之三角形公式求解。

**教學策略：**此部分並沒有要引出行列式值之公式，僅強調學生會使用平移並套用第一堂課所學之三角形面積公式  $\frac{1}{2}|ad - bc|$  即可。

教師在證明完三角形已知三頂點坐標可直接求得三角形面積公式後，讓學生自行演練一題，並在學生運用該公式計算題目時進行巡堂，並適時給予學生指點。

表 3.3.1 教學目標與教學內容對照表

	教學目標	教學內容
第一堂課	<ol style="list-style-type: none"> <li>能計算出在已知三角形三頂點坐標且一頂點在原點的情況下的三角形面積。</li> <li>能推導出已知三角形三頂點坐標，其中兩頂點坐標為未知數且一頂點在原點的情況下的三角形面積公式。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教師利用畫輔助線、幾何原理的概念製造相似形，藉此計算出三角形面積。</li> <li>教師運用相似形的邊長成比例之觀念，並運用比例式推導出三角形面積。</li> </ol>
第二堂課	<ol style="list-style-type: none"> <li>能計算出在已知三角形三頂點坐標，能利用平移的觀念求得三角形面積。</li> <li>能推導出已知三角形三頂點的坐標，其中三頂點坐標皆為未</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教師利用畫圖的方法，讓學生了解平移並不會影響三角形之面積，再利用上一節課的觀念求得三角形面積。</li> </ol>

	知數的情況下推得三角形的面積公式。	2. 教師運用平移、上一節課所教導之三角形面積推得已知三頂點坐標之三角形面積公式。
--	-------------------	---

#### 四、學習單分析

本研究設計之學習單(附錄二)的主要目的是為了能符合上述之教學目標，並使學生能跟上教師之教學步驟。

學習單編制方式採用先引進學生的先備知識，用學生熟悉的三角形面積公式為背景融合國中所學的平面坐標系統，再用實例講解，最後推導到證明的方式進行。採用此編制方式的目的，是因為三角形面積公式的推導需要過多的符號，一般國三學生無法接受超過兩個符號做運算。因此學習單的編制是先從例題的講解，再讓學生有類題的練習，確認沒有問題最後才推導到證明。

引導 1：

在國小數學課程中，我們知道三角形的面積是底 $\times$ 高 $\div 2$ ；在國中時我們學習到了平面坐標，讓我們在平面坐標上任意創造出一個三角形，我們要如何算出此三角形的面積呢？

圖 3.3.3 學習單的引導 1

在喚起學生的先備知識的過程中，融合國小學習到三角形的面積是底 $\times$ 高 $\div 2$ ，以及在國二時學習到的平面坐標系，讓學生將其學習歷程中毫無關係的兩個知識合在一起，使學生思考如果在平面坐標系放入一個三角形，給定三角形的三頂點坐標，能夠如何算出三角形的面積。在喚起學生的先備知識當中，也激起學生的學習動機。

例題 1 老師講解：

[例 1]  
給定兩點  $P(2, 1)$  和  $Q(1, 3)$ ，求  $\Delta OPQ$  的面積，其中  $O$  表示原點。

圖 3.3.4 學習單的例題 1

給定三角形三頂點，其中一頂點為頂點，另外兩點為第一象限點，設計此題目作為三角形面積的開頭的目的是先讓其中一個頂點在原點，另外兩頂點皆在第一象限，學生對於第一象限(坐標皆正)的數字比較可以接受。

類題 1 學生練習：

[練習 1]

在坐標平面上，畫出以下兩點， $P(2, -1)$ ，點  $Q(1, 3)$ ，並畫出  $\triangle OPQ$ ，其中  $O$  表示原點。求  $\triangle OPQ$  的面積。

圖 3.3.5 學習單的練習 1

有了上述例題 1 的講解後，讓學生練習一題類題，設計此題目只將  $P$  點從第一象限改成第四象限，將例題 1 做了微小的變化，主要目的是測試學生是否理解例題 1。

任務 1 老師講解：

[任務 1]

我們將情況推廣到一般情形，假設點  $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$  其中  $d > 0$  且點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊 (請畫草圖)。求  $\triangle OPQ$  的面積公式。

圖 3.3.6 學習單的任務 1

任務 1 的目的在確認學生了解如何操作畫輔助線、製造相似三角形後，正式帶學生進入證明的世界，在此教學教師仍將圖形畫在第一象限，讓學生省去正負號的問題。

任務 2 學生練習：

[任務 2]

這次我們試試另一種情況，假設點  $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$ ，點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊但是  $d < 0$ ，怎麼求  $\triangle OPQ$  的面積？而如果點  $P$  在直線  $OQ$  的左邊，算法又會有什麼改變呢？

圖 3.3.7 學習單的任務 2

任務 2 在任務 1 講解完之後，讓學生練習證明。將原本 P 點在第一象限改成第四象限後，讓學生試著證明三角形面積公式。在此階段須注意由於  $d < 0$ ，學生容易在變換成邊長時發生錯誤，需要額外教師提醒。

引導 2：

剛剛的活動中我們知道已知原點  $O$  以及其他兩點  $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$ ，我們就可以求出  $\Delta OPQ$  之面積，但這樣很像不夠有用。因為並不是所有在坐標平面上的三角形都恰有一個頂點在原點！那如果三角形三個頂點都不在原點又該怎麼辦呢？

圖 3.3.8 學習單的引導 2

在任務 2 後，要讓學生進入真正的三角形面積，也就是不設限有一頂點在原點的三角形，為了達到此教學目標，研究者做了證明前的引導，為了是讓學生了解接下來的教學目標的目的是推廣到已知任意三頂點點坐標的三角形皆可以用公式算出三角形面積。

例題 2 老師講解：

[例 2]

給定  $\Delta ABC$  其中  $A(2, 1)$ 、 $B(1, 3)$ 、 $C(-1, -1)$ ，求  $\Delta ABC$  的面積。

圖 3.3.9 學習單的例題 2

例題 2 的設計主要是利用實際的數字，由教師講解如何利用平移解出此題，先讓學生理解觀念，為接下來的證明鋪路。

類題 2 學生練習：

[練習 2]

在坐標平面上，畫出以下三點，並畫出  $\Delta ABC$ ，  
求  $\Delta ABC$  的面積：點  $A(2, -1)$ ，點  $B(1, 3)$ ，點  $C(-1, 1)$ 。

圖 3.3.10 學習單的練習 2

在例題 2 講解完後，讓學生寫練習 2，確認學生是否有真正了解平移的觀念，並能否運用第一堂課推論出的三角形面積公式。

任務 3 老師講解：

[任務 3]

我們推廣到一般情形，給定平面上三點  $P_0(a_0, b_0)$ 、 $P_1(a_1, b_1)$ 、 $P_2(a_2, b_2)$ ，請推導出計算  $\Delta P_0P_1P_2$  面積的公式。

圖 3.3.11 學習單的任務 3

在確認學生能真正運用平移、有一頂點在原點的三角形面積公式後，我們要推廣到一般的情況，也就是任意給定三角形三頂點的點坐標，能算出三角形面積的公式。

[練習 3]

點  $A(2, 1)$ ，點  $B(1, -3)$ ，點  $C(-1, 1)$ ，利用[任務 3]的公式求  $\Delta ABC$  的面積。

圖 3.3.12 學習單的練習 3

練習 3 的目的是確認學生是否能運用證明 3 的公式，因此指定學生用證明 3 的公式答題。

## 五、測驗卷(後測)分析

測驗卷(後測)是在教學實驗結束時測驗，檢驗學生對上課內容是否能夠理解。在課程結束後馬上進行測驗，測驗時間為 10 分鐘。

題目 1：

已知坐標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2, -5)$ ，點  $Q(4, 3)$ ，試求  $\Delta OPQ$  的面積

圖 3.3.13 測驗卷(後測)的題目 1

第一題是給定三角形三頂點點坐標，且其中一頂點為原點，試求三角形之面積，是證明 1 與證明 2 的應用，檢驗學生對於第一堂課的內容是否理解並能運用。

題目 2：

已知坐標平面上有三點：點 $A(1, 6)$ 、點 $B(2, 5)$ ，點 $C(-1, -4)$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積

圖 3.3.14 測驗卷(後測)的題目 2

第二題主要是檢驗學生第二堂課的內容是否能理解運用，題目內容是給定三角形三頂點點坐標，試求三角形的面積，是證明 3 的應用。

測驗卷的兩題分別檢驗學生在第一堂課以及第二堂課是否能理解與運用公式，學生亦可以用畫圖的方式做解題，在此並沒有設限方式。

#### 六、測驗卷(延後測)分析

延後測測驗卷的目的是探討學生經過一段長時間之後，學生有沒有對於課程內容是否仍有記憶，目的是檢驗教學實驗之成效。測驗時間是後測測驗後的 1 個月，考試時間為 10 分鐘，若學生經過 1 個月的時間仍可以做答得出來，代表此教學成效十分卓越。延後測測驗卷的設計方式以及題目類型必須與後測測驗卷的類型一模一樣，才可以互相比較分析。

題目 1：

已知坐標平面上有三點：原點  $O$ 、點 $P(2, 5)$ ，點 $Q(4, 7)$ ，試求 $\triangle OPQ$ 的面積

圖 3.3.15 測驗卷(延後測)的題目 1

第一題的題目與後測測驗卷的第一題類似，給定三角形三頂點點坐標，其中一頂點為原點，試求三角形之面積。檢驗學生在教學實驗第一堂課的學習成效，在經過一個多月是否還能回答正確。

題目 2：

已知坐標平面上有三點：點 $A(3, 6)$ 、點 $B(2, 5)$ ，點 $C(-1, -3)$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積

圖 3.3.16 測驗卷(延後測)的題目 2

第二題題目與後測測驗卷第二題類似，給定三角形三頂點點坐標，試求三角形之面積，檢驗學生在教學實驗的第二堂課之學習成效，在經過一個多月後是否還能回答正確。

後測與延後測的結果是否一致(即經過一段時間後學生的答題情形是否有退步)，在此採用 mid-P McNemar's test 來檢定，如下節。

## 第四節 資料分析方法

此節為本研究之資料分析方法，分兩部分，第一部分為 McNemar's test 之統計檢定介紹，第二部分為學習單之資料編碼處理。

### 一、McNemar's test 統計檢定

此次教學實驗在後測及延後測的考卷中，由於是檢定在一段時間過後學生是否還能答對，題型只有答對與答錯兩種，屬於二項分布。利用統計的方式來檢定後測與延後測學生是否因為時間關係而退步。在此研究中採用 McNemar's test 作為檢定是否兩次考試結果是否一致的方法。在此節探討 McNemar's test 之資料分析方法。

可以用  $2 \times 2$  列聯表來呈現之資料(二元配對資料)，在中小樣本中 McNemar 檢定為最常使用之方法，McNemar 正確檢定是由正確條件方法推導而得。正確條件方法是使用給定干擾參數之充分統計量的方式來消除干擾參數。但是，正確條件方法會提高檢定統計量其分配的離散性，進而使得 McNemar 正確 p-值 (McNemar's exact p-value) 相當保守，而中間 p-值 (mid p-value) 則是最常被使用來降低 McNemar 正確 p 值其高度離散性之一個改良 p-值。(林哲揚，2009)

對於二維列聯表相關模式下，配對資料之邊際比例同質性的檢定，在大樣本中，最常使用為卡方檢定，但大樣本的近似檢定結果在小樣本已經被證實表現不佳，卡方檢定太容易拒絕虛無假設，導致型一誤差機率太大，因此引導出多種使用正確分布進行檢定的方法。

將測驗應用於列聯表上，該表列出對於  $n$  個受試者的樣本進行兩次測試結果，如下表所示：

表 3.4.1 2 × 2 列聯表

	Test 2 positive	Test 2 negative	Row total
Test 1 positive	a	b	a + b
Test 1 negative	c	d	c + d
Column total	a + c	b + d	n

下方為 McNemar's exact p-value 之計算公式：

$$\text{exact-P-value} = 2 \sum_{i=b}^n \binom{n}{i} 0.5^i (1 - 0.5)^{n-i}$$

然而正確條件檢定方法會提高資料分布之離散性，使得做決策時會過於保護虛無假設，即 McNemar 正確 p-值(McNemar's exact p-value)會有太過保守的缺點。由 Lancaster (1961) 首先提出之中間 p-值(mid p-value)為正確條件檢定方法中最常被用以解決一般正確條件 p-值太過保守的改進方法。下方為 mid-P McNemar's test (mid-p binomial test)之計算公式：

$$\text{mid-p-value} = 2 \left( \sum_{i=b}^n \binom{n}{i} 0.5^i (1 - 0.5)^{n-i} - 0.5 \binom{n}{b} 0.5^b (1 - 0.5)^{n-b} \right)$$

亦即

$$\text{mid-p-value} = \text{exact-p-value} - \binom{n}{b} 0.5^b (1 - 0.5)^{n-b}$$

此次研究採用 mid-p-value 之值為判定學生經過一段時間後是否有退步之研究依據。

## 二、學習單之資料編碼處理

學習單之完成情況反映學生在此教學實驗之學習認真程度以及學習成效，因此此部分將學生學習單的情況做編碼處理。對於學生學習單的完成程度分作三個層次，第一為皆能完成，代表完全照上課老師之筆記做抄寫；第二為部分完成，代表學生有部分學習單內容填寫錯誤或是缺漏；第三為未完成，代表學



生沒有填寫學習單或是近乎全錯。舉例如下，圖 3.4.1 為第一個層次—皆能完成的例子，學生在例題及證明部分完全抄寫教師之黑板內容，且在練習部分皆能自行完成或是訂正完成；圖 3.4.2 為第二個層次—部分完成，學生在例題及證明部分沒有完全照教師之黑板內容，有自行刪減一些部份，如學生在例題 1 並沒有填寫完成答案、且沒有照教師的黑板內容畫兩個圖(如圖 3.4.1)，但在學生自行練習部分仍有填寫成功；圖 3.4.3 為第三個層次—未完成，學生在學習單之內容皆為亂抄，且圖形也是隨意亂畫，在答案部分也沒有寫答案為何。

【三角形面積】學習單

在國小數學課程中，我們知道三角形的面積是底 $\times$ 高 $\div 2$ ；在國中時我們學習到了平面座標，讓我們在平面座標上任意創造出一個三角形，我們要如何算出此三角形的面積呢？

[例 1]  
給定兩點  $P(2,1)$  和  $Q(1,3)$ ，求  $\triangle OPQ$  的面積，其中  $O$  表示原點。

面積移轉  
(作平行線)

$\triangle$ 面積：  
 $\frac{1}{2}k \cdot 3$

製造相似(作垂線)

$1 \cdot 3 = (2-k) \cdot 1$   
 $\Rightarrow 3(2-k) = 1$   
 $k = \frac{5}{3}$   
 $\triangle$ 面積  
 $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 3$   
 $= \frac{5}{2}$

公式： $\frac{1}{2}(ad-bc)$   
 $= \frac{1}{2}(2 \times 3 - 1 \times 1)$   
 $= \frac{5}{2}$

[練習 1]  $\frac{1}{2}k \cdot 3$

在坐標平面上，畫出以下兩點， $P(2,-1)$ ，點  $Q(1,3)$ ，並畫出  $\triangle OPQ$ ，其中  $O$  表示原點。求  $\triangle OPQ$  的面積。

$\triangle$ 面積  $\frac{1}{2}k \cdot 3$

$1 \cdot 3 = k - 2 \cdot 1$   
 $k = \frac{7}{3}$   
 $\triangle$ 面積  $\frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times 3$   
 $= \frac{7}{2}$

公式： $\frac{1}{2}|ad-bc|$   
 $= \frac{1}{2}|2 \times 3 - (-1) \cdot 1| = \frac{7}{2}$

[任務 1]

我們將情況推廣到一般情形，假設點  $P(a,b)$ 、 $Q(c,d)$  其中  $d > 0$  且點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊 (請畫草圖)。求  $\triangle OPQ$  的面積公式。

$\triangle$ 面積  $\frac{1}{2}k \cdot d$

$c \cdot d = a - k + b$   
 $\Rightarrow bc = d(a - k)$   
 $\Rightarrow bc = ad - dk$   
 $\Rightarrow dk = ad - bc$   
 $k = \frac{ad - bc}{d}$   
 $\triangle$ 面積  $= \frac{1}{2} \times \frac{(ad - bc)}{d} \cdot d$   
 $= \frac{1}{2}(ad - bc)$

圖 3.4.1 「皆能完成」之範例

**【三角形面積】學習單**

在國小數學課程中，我們知道三角形的面積是底 $\times$ 高 $\div 2$ ；在國中時我們學習到了平面座標，讓我們在平面座標上任意創造出一個三角形，我們要如何算出此三角形的面積呢？

**[例 1]**  
 給定兩點  $P(2,1)$  和  $Q(1,3)$ ，求  $\triangle OPQ$  的面積，其中  $O$  表示原點。

面積移動(平行線)

$\triangle$  面積  $= \frac{1}{2} \times 3$

**[練習 1]**  
 在坐標平面上，畫出以下兩點， $P(2,-1)$ ，點  $Q(1,3)$ ，並畫出  $\triangle OPQ$ ，其中  $O$  表示原點。求  $\triangle OPQ$  的面積。

(AA相似)  
 $1:3 = k:2 \cdot 1$   
 $k = \frac{3}{2}$   
 代入  
 $\triangle$  面積  $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{4}$

**[任務 1]**  
 我們將情況推廣到一般情形，假設點  $P(a,b)$ 、 $Q(c,d)$  其中  $d > 0$  且點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊 (請畫草圖)，求  $\triangle OPQ$  的面積公式。

$c:d = a-k:b$   
 $\Rightarrow bc = (a-k)d$   
 $\Rightarrow kc = ad - kd$   
 $\Rightarrow kd = ad - bc$   
 $\Rightarrow k = \frac{ad-bc}{d}$

面積  $= \frac{1}{2} k \cdot d$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{ad-bc}{d} \right) \cdot d$   
 $= \frac{1}{2} (ad-bc)$

圖 3.4.2 「部分完成」之範例

**【三角形面積】學習單**

在國小數學課程中，我們知道三角形的面積是底 $\times$ 高 $\div 2$ ；在國中時我們學習到了平面座標，讓我們在平面座標上任意創造出一個三角形，我們要如何算出此三角形的面積呢？

**[例 1]**  
 給定兩點  $P(2,1)$  和  $Q(1,3)$ ，求  $\triangle OPQ$  的面積，其中  $O$  表示原點。

$l: y = 2k$   
 $\Rightarrow 3(2-k) = 1$   
 $\Rightarrow 6 - 3k = 1$   
 $\Rightarrow -3k = -5$   
 $\Rightarrow k = \frac{5}{3}$   
 $\therefore$  面積  $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 3 = \frac{5}{2}$

**[練習 1]**  
 在坐標平面上，畫出以下兩點， $P(2,-1)$ ，點  $Q(1,3)$ ，並畫出  $\triangle OPQ$ ，其中  $O$  表示原點。求  $\triangle OPQ$  的面積。

面積  $= \frac{1}{2} k \cdot 3$   
 $k = \frac{3}{2}$   
 $\therefore$  面積  $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{4}$

**[任務 1]**  
 我們將情況推廣到一般情形，假設點  $P(a,b)$ 、 $Q(c,d)$  其中  $d > 0$  且點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊 (請畫草圖)，求  $\triangle OPQ$  的面積公式。

$ad = a \cdot k - b$   
 $\Rightarrow bc = d(a-k)$   
 $\Rightarrow bc = ad - dk$   
 $\Rightarrow dk = ad - bc$   
 $\Rightarrow k = \frac{ad-bc}{d}$

圖 3.4.3 「未完成」之範例

## 第四章 研究結果

本章為欲探討學生在「三角形面積坐標算法的教學實驗」之學習成效為何？從上課狀況、學習單情況、測驗卷(包含後測測驗卷、延後測測驗卷)結果結果來進行分析。

### 第一節 上課狀況

本節探討研究者在桃園市某公立國中的教學實驗之上課狀況，分成甲乙兩班分別論述。甲班(程度中上)的學生上課情況非常良好，第一節課與第二節課皆沒有學生打瞌睡，教師藉由抽籤問答的互動也十分良好。原因除了班級本身學習氣氛良好之外，也有部分原因是在教室後面有校長、主任、老師觀課，讓學生繃緊神經格外認真。在教師巡班觀看學生練習狀況的時候，幾乎所有學生都有嘗試練習。在第一堂課與第二堂課的中堂下課時，也有看到部分學生成群的討論如何證明三角形面積公式，顯現學生不僅僅是在上課時間認真，在下課時間也願意和同學一起討論上課的內容，顯現該班部分同學對於教學內容是具有極大的興趣。

乙班(程度中下)的學生上課狀況較差，根據研究者代此班數學課的經驗，已經有部分學生對於數學呈現放棄狀態。在第一節課的時候有大約 9 成的學生有認真上課，在第二節課時只剩  $\frac{3}{4}$  的學生有認真聽課，其餘同學出現恍神以及打瞌睡的情況。在教師巡班觀看學生練習狀況時，有部分學生已經不練習題目了，但仍有多數學生是願意練習，顯示此班對於該教學實驗有部分學生不能接受，但仍有多數學生是願意聽課且練習題目。

## 第二節 學習單狀況

學習單的狀況檢視分做老師講解以及學生練習兩部分，老師講解部分係指教師上課時的筆記(包含例題講解、證明、口訣等等)，檢驗學生是否有抄寫且完整度為何；學生練習部分係指學生練習類題的情況為何。

甲班級(程度中上)的學生學習單的作答情形大致良好，關於老師講解的部分幾乎都有抄寫且非常完整，在學生練習上幾乎都有嘗試練習，且若練習錯誤皆有訂正。顯示此班級對於此堂教學實驗有一定的熱忱，圖 4.2.1 為甲班 A 學生之學習單的例題 1、練習 1，該位學生對於老師講解以及學生練習部分的完整度高。圖 4.2.2 為同一學生在任務 1 的寫法，對於證明的部分，在代數式推導上完整度高。

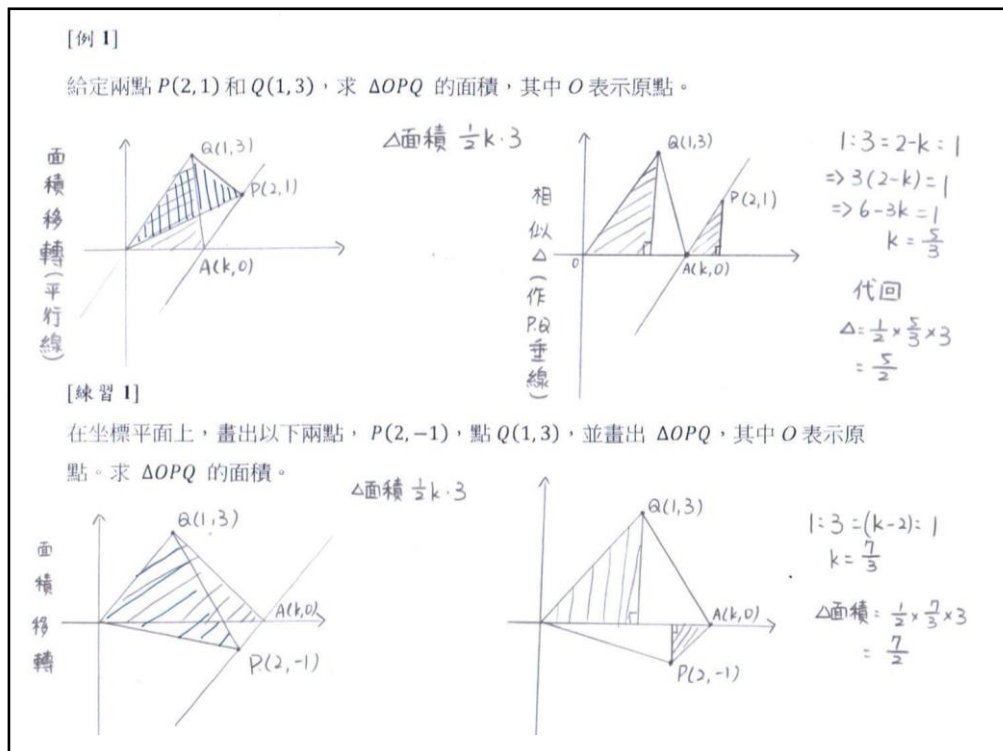
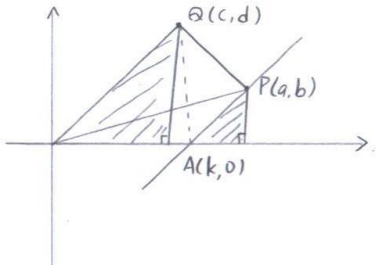


圖 4.2.1 甲班 A 學生之學習單

[任務 1]

我們將情況推廣到一般情形，假設點  $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$  其中  $d > 0$  且點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊 (請畫草圖)。求  $\triangle OPQ$  的面積公式。



$$c \cdot d = a - k = b$$

$$\Rightarrow bc = (a - k)d$$

$$\Rightarrow bc = ad - kd$$

$$\Rightarrow kd = ad - bc$$

$$\Rightarrow k = \frac{ad - bc}{d}$$

-1-

$\triangle$ 面積：  
 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{ad - bc}{d}\right) \cdot d$   
 $= \frac{1}{2}(ad - bc)$

圖 4.2.2 甲班 A 學生之學習單

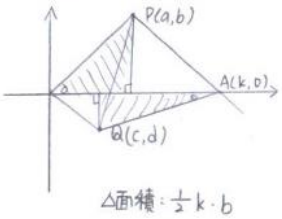
在任務 1 結束後，學生需要練習任務 2，在此階段的甲班學生的練習狀況大部分皆能藉由任務 1 的方式推論出任務 2。圖 4.2.3 為甲班 B 同學的任務 2 過程，對於任務 2 能舉一反三，參照任務 1 的方法成功證明。

$\frac{1}{2}(ad - bc)$  v.s.  $\frac{1}{2}(bc - ad)$   
 僅差正負

$\triangle OPQ$ 面積： $\frac{1}{2}|ad - bc|$

[任務 2]

這次我們試試另一種情況，假設點  $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$ ，點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊但是  $d < 0$ ，怎麼求  $\triangle OPQ$  的面積？而如果點  $P$  在直線  $OQ$  的左邊，算法又會有什麼改變呢？



$a \cdot b = (k - c) \cdot (-d)$  代回  $\triangle$ 面積  
 $\Rightarrow b(k - c) = a(-d)$   $= \frac{1}{2} \left(\frac{bc - ad}{b}\right) \cdot b$   
 $\Rightarrow bk = bc - ad$   $= \frac{1}{2}(bc - ad)$   
 $\Rightarrow k = \frac{bc - ad}{b}$

$\triangle$ 面積： $\frac{1}{2}k \cdot b$

圖 4.2.3 甲班 B 學生之學習單

再來探討甲班學生對於例題 2 以及練習 2 的情況，此部分檢驗甲班學生對於平移不影響三角形面積的觀念是否理解，甲班學生在此方面大部分能夠清楚理解，並運用上一堂課的公式，如圖 4.2.4，此學生對於平移觀念能夠運用自如。

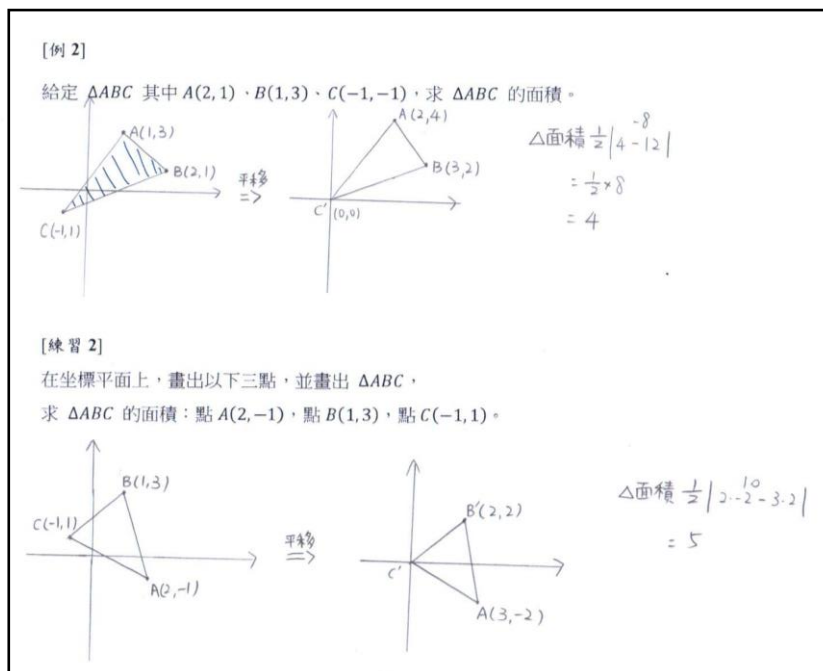


圖 4.2.4 甲班 C 學生之學習單

乙班級(程度中下)的學生學習單狀況尚可，大多數同學仍願意完成學習單。但有部分學生只是亂抄黑板上的內容，因此有些許錯誤。但大部分都可以順利完成學習單的內容。顯示該班級數學成績雖然沒有甲班級好，但對於此教學內容仍具有一定興趣，圖 4.2.5 為乙班 D 學生在例題 1 以及練習 1 的填寫情況，此學生並沒有認真寫學習單。

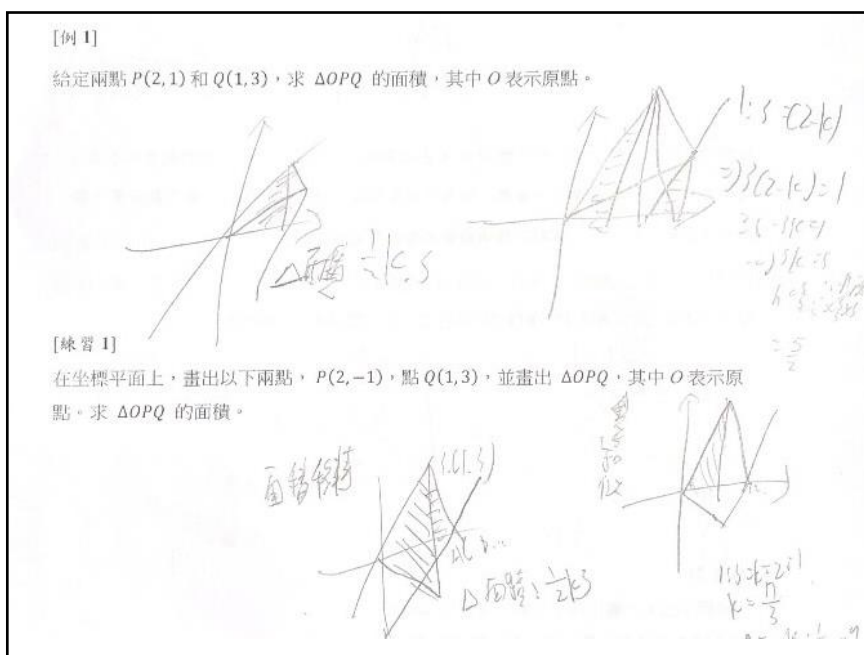


圖 4.2.5 乙班 D 學生之學習單

圖 4.2.6 為乙班 E 學生之學習單，此學生對於練習 1 的作答用了兩個方法，一種為畫圖、一種為帶公式。圖 4.2.7 乙班 F 學生之學習單，此學生對於代數式證明仍可以完成，對於平移的觀念，乙班 F 學生在學習單上也可以畫出平移後的坐標變換，並能藉由任務 1 的公式計算出三角形面積。圖 4.2.8 乙班 G 學生之學習單，學生完成平移後的坐標轉換。

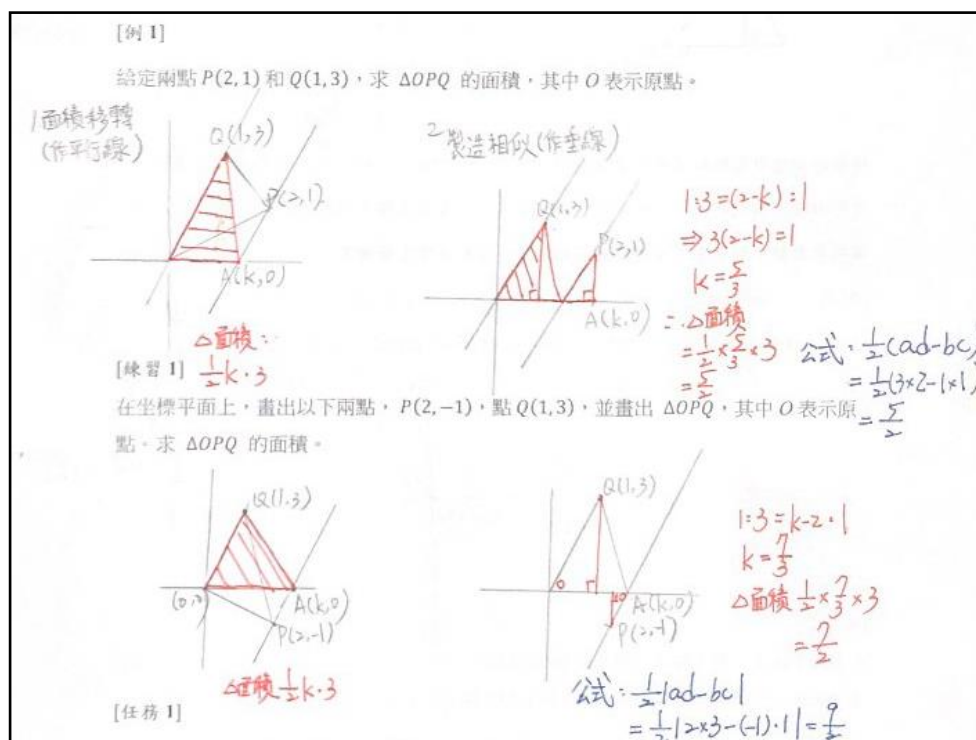


圖 4.2.6 乙班 E 學生之學習單

乙班學生關於證明的部分，與上述例題 1、練習 1 的作答情況類似，對於代數證明並沒有感到特別繁雜，所以大部分皆能完成學習單。

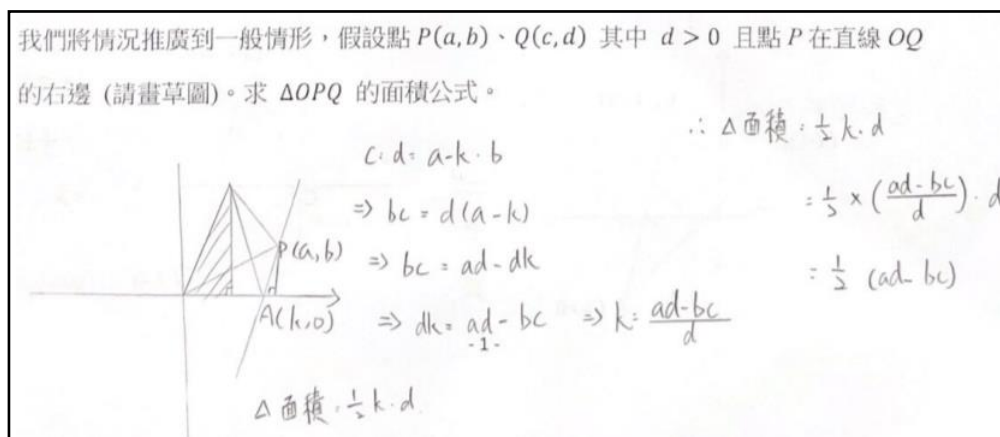


圖 4.2.7 乙班 F 學生之學習單

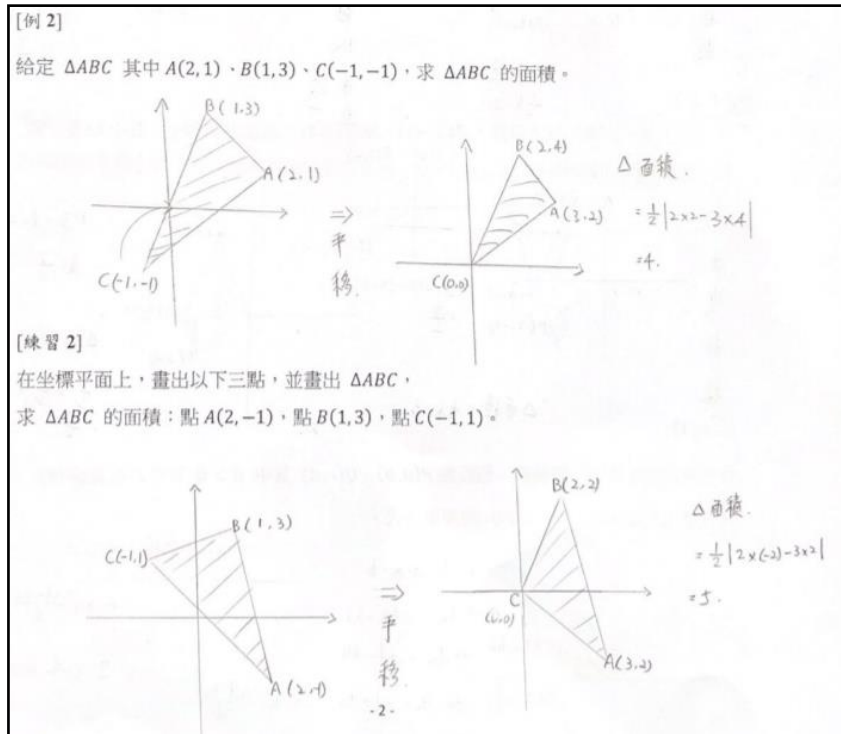


圖 4.2.8 乙班 G 學生之學習單

對於學生學習單的完成程度分作三個層次(如第三章第四節資料分析所述)，下列為甲班(程度中上)、乙班(程度中下)學習單完成程度的統計表：

表 4.2.1 學習單完成程度統計表

	皆能完成(百分比)	部分完成(百分比)	未完成(百分比)
甲班級	18 (60%)	12 (40%)	0 (0%)
乙班級	15 (51.72%)	13 (44.83%)	1 (3.45%)

學生學習單的完成程度代表學生是否有認真上課的一種參考指標，雖然並不是完成學習單就是理解該次課程，但仍是學生是否認真參與課堂的參考之一，也是該次教學實驗是否吸引學生的指標。由統計表可得知，此教學實驗甲班(程度中上)的學生半數以上有達到「皆能完成」，而未完成的比例為 0，乙班(程度中



下)多數同學也能完成學習單，代表學生上課認真程度高，原因可能是研究者為兩班級的代課老師，對班級已經有一定程度的掌握，且教學內容對於學生來說算是新奇的方法，並且在教學實驗時有校長主任在課堂後面觀看，因此多數學生願意認真上課。

### 第三節 測驗卷狀況

此測驗卷狀況分成後測測驗卷以及延後測測驗卷，本節旨在分別探討後測及延後測測驗卷之學生答題策略、答題情況，並將兩次測驗作分析比對，以檢視此次教學實驗之成效。

#### 一、後測測驗卷

甲班學生的答題情況中上，多數同學有回答出第一題，且第二題的答對率與第一題也相似，代表學生若能了解第一題的三角形公式，便能利用平移求得第二題之答案。以下列舉甲班學生的題目回答情形，圖 4.3.1 為甲班 H 學生之後測測驗卷，學生能夠應用公式去解第一題，也能利用平移的概念解出第二題。圖 4.3.2 甲班 I 學生兩題皆答錯，公式背錯。圖 4.3.3 甲班 J 學生第一題答對第二題答錯，平移後不知道如何計算三角形面積。

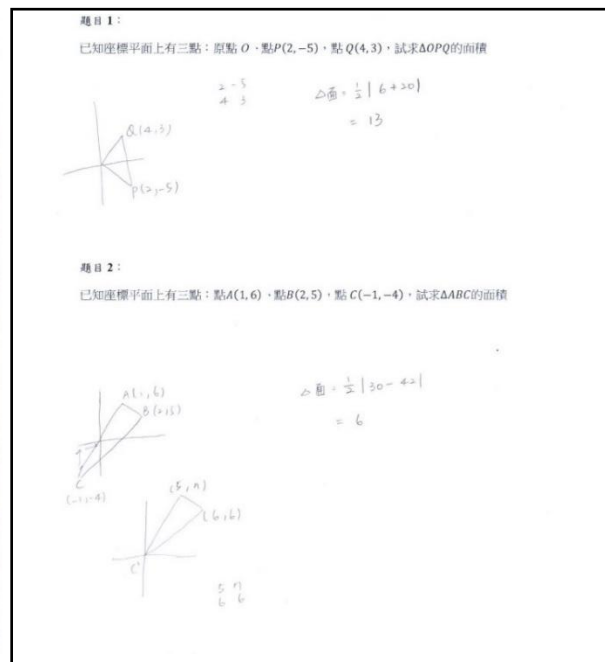


圖 4.3.1 甲班 H 學生之後測測驗卷

已知座標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2, -5)$ 、點  $Q(4, 3)$ ，試求  $\triangle OPQ$  的面積

$$\begin{aligned} \triangle OPQ \text{ 面積} &= \frac{1}{2} |(2 \cdot 3 - (-5 \cdot 4))| \\ &= \frac{1}{2} | -1 \oplus 9 | \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

題目 2：

已知座標平面上有三點：點  $A(1, 6)$ 、點  $B(2, 5)$ 、點  $C(-1, -4)$ ，試求  $\triangle ABC$  的面積

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 面積} &= \frac{1}{2} | 2 \cdot 9 - 10 \cdot 3 | \\ &= \frac{1}{2} | -7 - 7 | \\ &= \frac{14}{2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

圖 4.3.2 甲班 I 學生之後測測驗卷

題目 1：

已知座標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2, -5)$ 、點  $Q(4, 3)$ ，試求  $\triangle OPQ$  的面積

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{1}{2} | 2 \cdot 3 - (-5) \cdot 4 | \\ &= 13 \end{aligned}$$

題目 2：

已知座標平面上有三點：點  $A(1, 6)$ 、點  $B(2, 5)$ 、點  $C(-1, -4)$ ，試求  $\triangle ABC$  的面積

$$\begin{aligned} C(-1, -4) &\rightarrow C(0, 0) & \triangle \text{面積} &= \frac{1}{2} | 1 \cdot 5 - 2 \cdot 6 | \\ B(2, 5) &\rightarrow B(3, 7) & &= \frac{9}{2} \\ A(1, 6) &\rightarrow A(2, 10) & & \end{aligned}$$

圖 4.3.3 甲班 J 學生之後測測驗卷

乙班在後測測驗卷的表現尚可，一半以上學生皆可以答對兩題，但也有些許學生兩題皆沒有回答出來，以下列舉乙班學生後測測驗卷之回答情況，圖 4.3.4 乙班 K 學生兩題皆答對，有嘗試使用畫圖解題，也有利用公式解題。圖 4.3.5 乙班 L 學生兩題皆答對，第一題利用公式解出題目，第二題配合圖形平移後解出題目。

題目 1:

已知座標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2, -5)$ 、點  $Q(4, 3)$ ，試求  $\triangle OPQ$  的面積

1. 面積法 (作平行線)

2. 割補法 (作垂線)

(AA相似)

$$\Delta \text{面積} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{8}{2} \times 3 = \frac{6}{2} \times 3 = 9 \#$$

題目 2:

已知座標平面上有三點：點  $A(1, 6)$ 、點  $B(2, 5)$ 、點  $C(-1, -4)$ ，試求  $\triangle ABC$  的面積

$A(1, 6) \Rightarrow (0, 6)$

$B(2, 5) \Rightarrow (1, -1)$

$C(-1, -4) \Rightarrow (-2, -10)$

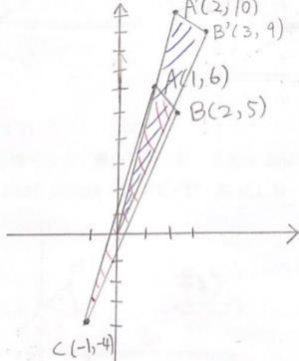
$$\frac{1}{2} |-10 - 2| = 6 \#$$

圖 4.3.4 乙班 K 學生之後測測驗卷

題目 1：  
已知座標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2, -5)$ 、點  $Q(4, 3)$ ，試求  $\triangle OPQ$  的面積

$$\begin{aligned} \triangle OPQ \text{ 面積} &= \frac{1}{2} |(-5) \times 4 - 2 \times 3| \\ &= \frac{1}{2} |-20 - 6| \\ &= 13 \end{aligned}$$

題目 2：  
已知座標平面上有三點：點  $A(1, 6)$ 、點  $B(2, 5)$ 、點  $C(-1, -4)$ ，試求  $\triangle ABC$  的面積



$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} |3 \times 10 - 9 \times 2| \\ &= \frac{1}{2} |30 - 18| \\ &= 6 \end{aligned}$$

圖 4.3.5 乙班 L 學生之後測測驗卷

從甲、乙兩班的測驗卷結果可以得知學生對於公式大部分學生是可以接受的，而第二題考到平移的概念，在高中階段雖然用向量的方法解題，但學生縱使沒學過向量的概念，依然可以用坐標的平移變換解出題目。下列統計甲、乙兩班後測測驗卷的回答情況。

表 4.3.1 後測測驗卷題目答對人數統計表(1)

	第一題答對人數(百分比)	第二題答對人數(百分比)
甲班級	24(80%)	20(66.67%)
乙班級	20(68.97%)	14(48.28%)

表 4.3.2 後測測驗卷題目答對人數統計表(2)

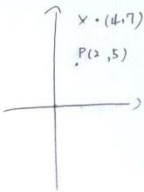
	兩題皆答對(百分比)	僅答對一題(百分比)	兩題皆錯(百分比)
甲班級	20(66.67%)	4(13.3%)	6(20%)
乙班級	14(48.28%)	6(20.69%)	9(31.03%)

能答對第二題的學生皆能答對第一題，因此「僅答對一題」的同學代表僅達對第一題。甲班級學生在後測測驗卷有 8 成可以回答出第一題，有 66.67% 的學生兩題皆能答對；乙班級學生在後測測驗卷有 68.97% 可以回答出第一題，有 48.28% 的學生兩題皆能答對。在公式部分由於教師有給口訣，因此學生大部分皆能回答出第一題，第二題加了平移的概念，僅有少數學生不能理解。

## 二、延後測測驗卷

延後測測驗卷的目的主要是測驗學生是否有將知識轉換成長期記憶，與後測測驗卷之結果作分析比對，發現學生的回答情況並沒有差太多。以下列舉學生延後測測驗卷之答題情況，圖 4.3.6 甲班學生 M 學生在後測測驗卷時兩題皆對，但在延後測測驗卷時忘記乘以  $\frac{1}{2}$ ，導致兩題皆錯。圖 4.3.7 乙班學生 N 學生在後測測驗卷時兩題皆對，但在延後測測驗卷時背錯公式，將減號記成加號，導致兩題皆錯。圖 4.3.8 甲班 O 學生在後測測驗卷兩題皆對，在延後測測驗卷兩題也皆對。

題目 1：  
已知座標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2,5)$ 、點  $Q(4,7)$ ，試求  $\triangle OPQ$  的面積



$$\begin{aligned}
 & |4 \times 5 - 2 \times 7| \\
 & = |20 - 14| \\
 & = 6 \#
 \end{aligned}$$

題目 2：  
已知座標平面上有三點：點  $A(3,6)$ 、點  $B(2,5)$ 、點  $C(-1,-3)$ ，試求  $\triangle ABC$  的面積

$$\begin{aligned}
 & C \text{ 平移} \\
 & \begin{matrix} +1 \\ +3 \end{matrix} \\
 & \Rightarrow C(0,0) \\
 & A(4,9) \\
 & B(3,8) \\
 & |4 \times 8 - 9 \times 3| \\
 & = |32 - 27| \\
 & = 5 \#
 \end{aligned}$$

圖 4.3.6 甲班學生 M 學生之後測測驗卷

題目 1：  
已知座標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2,5)$ 、點  $Q(4,7)$ ，試求  $\triangle OPQ$  的面積

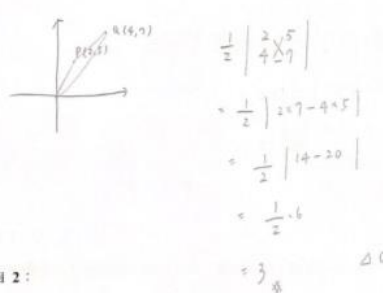
$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} 2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \end{matrix} \quad |14 + 20| \times \frac{1}{2} \\
 & = \frac{34}{2} \\
 & \triangle OPQ \text{ 面} = \frac{34}{2} \\
 & = 17 \#
 \end{aligned}$$

題目 2：  
已知座標平面上有三點：點  $A(3,6)$ 、點  $B(2,5)$ 、點  $C(-1,-3)$ ，試求  $\triangle ABC$  的面積

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} +1 \\ +3 \end{matrix} \\
 & C(-1,-3) \Rightarrow (0,0) \\
 & B(2,5) \Rightarrow (3,8) \\
 & A(3,6) \Rightarrow (4,9) \\
 & \begin{matrix} 3 \cdot 8 \\ 4 \cdot 9 \end{matrix} \Rightarrow 24, 32 \\
 & |24 + 32| \times \frac{1}{2} \\
 & = \frac{56}{2} \\
 & \triangle ABC \text{ 面} = \frac{56}{2} \\
 & = 28 \#
 \end{aligned}$$

圖 4.3.7 乙班學生 N 學生之後測測驗卷

題目 1：  
已知座標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2,5)$ 、點  $Q(4,7)$ ，試求  $\triangle OPQ$  的面積



題目 2：  
已知座標平面上有三點：點  $A(3,6)$ 、點  $B(2,5)$ 、點  $C(-1,-3)$ ，試求  $\triangle ABC$  的面積

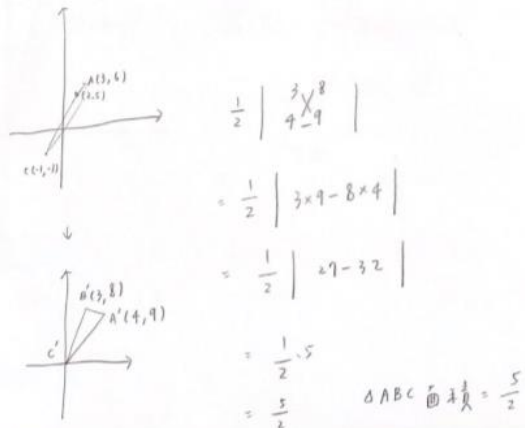


圖 4.3.8 甲班 O 學生之後測測驗卷

下列統計兩班學生在延後測測驗卷的回答情況。

表 4.3.3 延後測測驗卷題目答對人數統計表(1)

	第一題答對人數(百分比)	第二題答對人數(百分比)
甲班級	20 (66.67%)	13 (43.33%)
乙班級	15 (51.72%)	11 (37.93%)

表 4.3.4 延後測測驗卷題目答對人數統計表(2)

	兩題皆答對(百分比)	僅答對一題(百分比)	兩題皆錯(百分比)
甲班級	13 (43.33%)	7 (23.33%)	10 (33.33%)
乙班級	11 (37.93%)	4 (13.79%)	14 (48.28%)

在此統計表中的「僅答對一題」的所有學生都是僅答對第一題。在延後測驗卷的統計資料可以得知有些許學生的確因為經過一個多月的時間而忘記公式或背錯公式而答錯題目，比較後測與延後測的數據如下。

表 4.3.5 後測與延後測之數據變化

	「兩題皆對」人數變化 (後測→延後測)	「僅一題對」人數變化 (後測→延後測)	「兩題皆錯」人數變化 (後測→延後測)
甲班	20(66.67%)→13(43.33%)	4(13.3%)→7(23.33%)	6(20%)→10(33.33%)
乙班	14(48.28%)→11(37.93%)	6(20.69%)→4(13.79%)	9(31.03%)→14(48.28%)

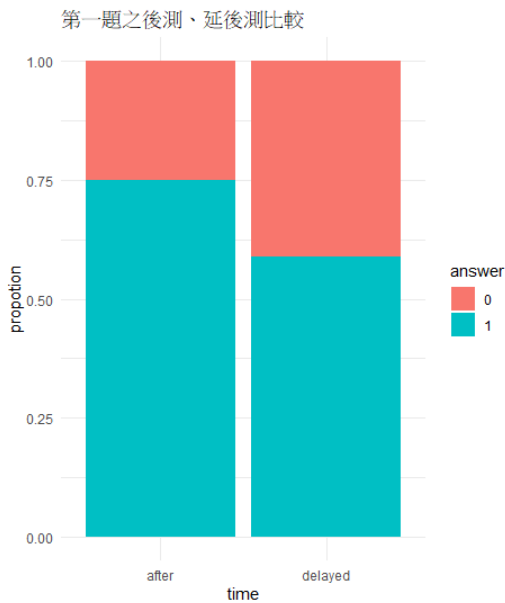


圖 4.3.9 第一題後測與延後測之比較

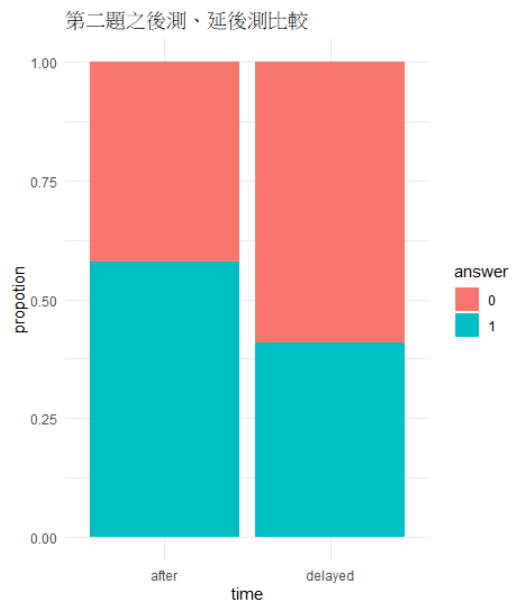


圖 4.3.10 第二題後測與延後測之比較

根據第二章文獻資料中提到，小樣本的二元配對資料，在此採用 mid-P McNemar's test。下方為第一題後測與延後測之  $2 \times 2$  列聯表(合併甲乙兩班級)：



表 4.3.6 第一題後測與延後測之 2 × 2 列聯表

	延後測第一題答對	延後測第一題答錯	列總和
後測第一題答對	35	9	44
後測第一題答錯	0	15	15
行總和	35	24	59

$H_0: p_b = p_c$  (時間不會影響成績)

$H_1: p_b \neq p_c$  (時間會影響成績)

計算 mid-p-value(程式碼詳見附錄五)，計算得到第一題之 mid-p-value 為 1.998047，大於 0.05，所以不拒絕虛無假設，亦即時間不會影響成績結果。

表 4.3.7 第二題後測與延後測之 2 × 2 列聯表

	延後測第二題答對	延後測第二題答錯	列總和
後測第二題答對	24	10	34
後測第二題答錯	0	25	25
行總和	24	35	59

$H_0: p_b = p_c$  (時間不會影響成績)

$H_1: p_b \neq p_c$  (時間會影響成績)

計算 mid-p-value(程式碼詳見附錄五)，計算得到第一題之 mid-p-value 為 1.999023，大於 0.05，所以不拒絕虛無假設，亦即時間不會影響成績結果。

根據 mid-P McNemar test，可得知經過一個月的時間，學生的測驗成績並沒有退步。

兩次測驗並沒有任何「特殊」數據，也就是說並沒有在後測測驗卷答錯的學生，在延後測測驗卷卻答對了，原因可能為在相隔一個月內，學生無從得到

相關幾何課程內容，故無新增的學習機會，也顯示幾何知識難以自然地內化，也不容易發生自發性的概念。僅有在後測測驗卷答對的學生因為時間拉長的關係而在延後測測驗卷答錯。甲班級在第二題的回答表現在延後測的時候有明顯下降，顯示部分學生在經過一個多月的時間後，僅記得三角形面積公式，忘記將三頂點沒有一個頂點在原點的三角形平移到原點。乙班級則是平均下滑，沒有特別明顯哪一個觀念遺忘較多。從後測及延後測測驗卷結果相互比較，一個多月的時間雖有些許下滑，但大致上來說並沒有下滑的十分嚴重，第一題仍有半數學生是依然記得怎麼算的，第二題由於多加了一個平移的觀念，因此下滑比例比第一題高，但仍有近 4 成學生答對，顯示此觀念已經成為學生之長期記憶。

## 第五章 結論與建議

本章分為兩節，第一節根據研究工具、研究方法、研究結果提出結論。第二節為討論與建議，根據本研究的發現與反省，對未來相關研究以及新課綱之討論提出建議。

### 第一節 結論

根據文獻探討與教學理念的思考，研究者與指導教授可以為「三角形面積坐標算法」之教學目標，設計出教案、學習單、測驗卷。根據研究者以這些教材實際在國中三年級（九年級）班級進行的教學實驗，並在教學實驗後進行後測與延後測所獲得的數據資料，而得到本研究的結論如下。

國中階段可以設計坐標幾何內容，其中一例為「三角形面積的坐標算法」。以此單元為例，九年級學生之學習成效堪稱良好，並且可以保留其學習經驗。

支持結論的佐證資料之一，來自表 4.3.5、圖 4.3.9、圖 4.3.10 所呈現的後測、延後測表現。延後測是為了檢驗學生經過一段時間後，是否仍保留所學？雖然在答對的人數上，學生呈現些許退步情況，如表 4.3.5。但在統計分析上，藉由表 4.3.6、表 4.3.7 進行 mid-P McNemar test 所算出的 mid-p-value 值，顯示學生的答題表現並未因為時間而退步。因此推論國中三年級可習得坐標幾何的課程，至少可習得「三角形面積的坐標算法」。

## 第二節 討論與建議

本節針對本研究的研究過程中的缺失提出改善建議，並藉由此次研究的結果，在未來新課綱或相關研究上，提出參考。

### 一、對於未來相關研究時

#### (1)借用班級做教學實驗的時間應更加提早

由於此次教學實驗—三角形面積的教學內容，必須在學生學習相似形之觀念之後方能實施，時間非常逼近國中教育會考，許多教師要總複習國中課程而不願意出借班級，應更提早與國中教師洽談，使國中數學教師能預先準備其複習課程進度，才能有時間讓研究者進行教學實驗。

#### (2)後測、延後測題目數量應增加

此次教學實驗之後測、延後測的題目僅有兩題，因此無法蒐集到更多的資料以便做分析，之後若有相關研究，可以在題目的數量上可以增加。

#### (3)測驗的評定標準應更多元

此次教學實驗的資料處理方式是將一個題目分為答對與答錯兩種，而沒有實際分析學生在答題過程中的錯誤方式為何，如圖 4.3.6。學生僅是忘記乘以  $\frac{1}{2}$ ，在本研究即判定為答錯，應可以採取更多元的評定標準。

#### (4)缺乏質性資料

此研究缺乏質性資料，僅有後測測驗卷、延後測測驗卷的數據結果以及統計分析，可以加入質性資料，如問卷、課程錄影、訪談等。研究者起初也有設計回饋問卷以及回饋問卷之資料分析，如附錄六。設計的理由是想藉由回饋問

卷的資料來分析學生的學習情況，期望能藉由資料分析來讓之後的教學更加完善。但是由於問卷在學生上完課程後才填寫，且問卷題目設計不良，口試委員認為證據不足，無法獲得實徵的結論，因此研究者將此部分在本文中刪除，放入附錄六供讀者參考。

## 二、對於未來數學新課綱的建議及參考

108 課綱帶來許多改革，在數學上使得學生的學習內容與以前大不相同，但研究者根據 108 課綱數學領域綱要的內容以及國外的教科書資料，提出下列幾點建議及參考：

### (1) 國中平面幾何可以適度的刪修

根據 108 課綱的學習表現，國中階段(第四學習階段)在平面幾何部分有 16 項之多，反觀坐標幾何部分卻只有 2 項；但高中階段(第五學習階段)在平面幾何部分只有 2 項，而在坐標幾何上增加為 5 項。根據課綱中學習表現 g-V-5：**理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。**更是說明坐標幾何可以為幾何問題提供更便捷之算法，顯示坐標幾何之重要性。但根據課綱以及國中教科書上並沒有將坐標幾何視為重要的課程內容。

根據臺灣國高中數學教科書以及歷屆國中教育會考、學測、指考的考題之資料顯示，國中會考在平行線截比例線段性質上年年必考，在數學教科書上佔據第五冊的  $\frac{1}{9}$  之多(約 20 多頁)，顯示出國中端認為此概念是重要的，教師會強調因此學生也會精熟此概念，但高中的數學教科書從課綱目標到課程內容強調坐標幾何的觀念。在此出現國高中學習上的落差。因此研究者認為國中平面幾何的內容過多過難，可以適度的將國中平面幾何的內容比重做刪減，例如：平行線截比例線段，將課程時間留給需要的課程內容。

## (2) 國中可以增加坐標幾何的課程內容，讓學生進入坐標幾何的世界

根據研究者在國中三年級的班級實地做教學實驗，得知學生對於坐標幾何的想法為：十分有用且快速，且根據課綱也提到坐標幾何可以為幾何問題提供簡潔的算法。並根據此次實驗結果知道國三學生學習坐標幾何並沒有太大的學習問題，顯現坐標幾何的內容是可以在國中部分放入課程內容，研究者建議可以將平面幾何的內容適度刪修，並加入些許坐標幾何的課程內容。

## 參考文獻

- 黃毅英、林智中(2010)。學校幾何課程的重整—為何教和如何教演繹幾何？*數學傳播*，34(3)，13-33。
- 單維彰(2018)。118 數學課程的展望。2018 國家教育研究院「21 世紀人才培育」國際學術研討會。
- 教育部(2018)。國民中小學暨普通型高級中等學校十二年國民基本教育課程綱要數學領域。台北市：教育部。
- 單維彰(2018)。論知行識作為素養培育的課程架構—以數學為例。《台灣教育評論月刊》，2018，7(2)，頁 101-106
- 林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究」整合型研究子計畫三：十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究研究報告。(科技部編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12)
- 洪雅齡(2005)。「台灣與日本之十二年數學課程比較日本數學」，國立中央大學，碩士論文。
- 徐恩泰(2002)。2 × 2 列聯表多項分布獨立性檢定之研究，國立中央大學，碩士論文。
- 林哲揚(2009)。2 × 2 列聯表邊際比例同質性檢定之改良雙尾貝氏 p-值研究成果報告。(科技部編號：NSC 97-2118-M-264-001)
- 呂坤明(2015)。從 HPM 觀點看 99 課綱高中數學行列式教材，國立臺灣師範大學，碩士論文。

張幼賢、李明芳、李信仲等編著(2016)。翰林版國民中學數學課本第一冊 一年級上學期。台北市：翰林。

張幼賢、李明芳、李信仲等編著(2016)。翰林版國民中學數學課本第二冊 一年級下學期。台北市：翰林。

張幼賢、李明芳、李信仲等編著(2016)。國民中學數學課本第三冊 二年級上學期。台北市：翰林。

張幼賢、李明芳、李信仲等編著(2016)。國民中學數學課本第四冊 二年級下學期。台北市：翰林。

張幼賢、李明芳、李信仲等編著(2016)。國民中學數學課本第五冊 三年級上學期。台北市：翰林。

張幼賢、李明芳、李信仲等編著(2016)。國民中學數學課本第六冊 三年級下學期。台北市：翰林。

Berger, R. L. and Sidik, K. (2003). Exact unconditional tests for a  $2 \times 2$  matched-pairs design. *Statistical Methods in Medical Research* 12, 91-108。

Lancaster, H. O. (1961). Significance tests in discrete distributions. *Journal of the American Statistical Association* 56, 223-234。

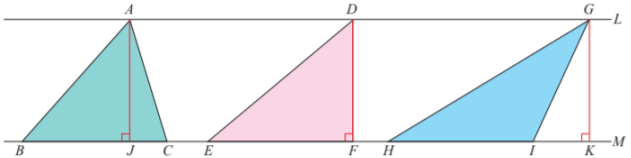
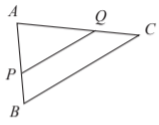


## 附錄一、教學實驗教案

### 數學科〈三角形面積〉教案

單元名稱	三角形面積	教學時間	90 分鐘(2 堂課)
演示教師	葉繼聰	教學對象	國三上
指導教師	單維彰	教學人數	30 人
教材來源	自編(學習單)		
教學方法	講述法		
教學資源	黑板		
先備知識 起點行為	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 理解相似形之觀念</li> <li>2. 理解平行線截比例線段之觀念</li> <li>3. 知道兩平行線間的距離為定值</li> <li>4. 能運用相似形及平行線截比例線段之概念解題</li> </ol>		
教學目標	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 知：知道點的平移</li> <li>2. 知：知道三角形之面積公式</li> <li>3. 行：給定任意不共線三點座標，能計算出三角形面積</li> <li>4. 行：能畫出輔助線，製造出相似形進而推導出三角形面積公式</li> <li>5. 識：能感受到坐標幾何的實用之處</li> </ol>		

## 教學活動計畫表

項目	教師活動	時間	註記
<p style="text-align: center;">複習</p>	<p>複習相似形、平行線截比例線段、幾何原理之觀念</p> <p>幾何原理：兩平行線間的距離是定值，因此，若固定三角形的底邊，令其頂點在平行於底邊的直線上任意移動，產生的任意三角形之高皆為定值，亦即兩平行線的距離，因此下列三種三角形之面積相等</p> <p>以 <math>\overline{BC}</math>、<math>\overline{EF}</math>、<math>\overline{HI}</math> 為這三個三角形的底邊，因為 <math>L \parallel M</math>，所以其對應的高 <math>\overline{AJ} = \overline{DF} = \overline{GK}</math>，又因為 <math>\overline{BC} = \overline{EF} = \overline{HI}</math>，所以 <math>\triangle ABC</math>、<math>\triangle DEF</math> 與 <math>\triangle GHI</math> 的面積皆相等。</p>  <p>相似型與平行線截比例線段：</p> <p>1. 如圖，<math>\triangle ABC</math> 中，<math>P</math>、<math>Q</math> 兩點分別在 <math>\overline{AB}</math>、<math>\overline{AC}</math> 上，若 <math>\overline{PQ} \parallel \overline{BC}</math>，<math>\overline{AP} = 12</math>，<math>\overline{PB} = 7</math>，<math>\overline{AQ} = 18</math>，求 <math>\overline{QC}</math>。</p> <p>在 <math>\triangle ABC</math> 中，<math>\because \overline{PQ} \parallel \overline{BC}</math>，  <math>\therefore \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}</math>  <math>12 : 7 = 18 : \overline{QC}</math>  <math>\overline{QC} = \frac{21}{2}</math>。</p>  <p>(此題雖然僅為平行線截比例線段之題目，但考量時間關係，用此題一同複習同位角相等→AA相似)</p>	<p>5min (5min)</p>	<p>1. 確定學生是否完全理解相似形、幾何原理、平行線截比例線段之觀念</p>
<p style="text-align: center;">例題 1</p>	<p>給定兩點 <math>P(2,1)</math> 和 <math>Q(1,3)</math>，求 <math>\triangle OPQ</math> 的面積，其中 <math>O</math> 表示原點。</p> <p>講解過程—</p> <p>(1) 導入預備：我們從國小開始便得知三角形面積為底 <math>\times</math> 高 <math>\div 2</math>，所以若已知底與高我們便可以算出三角形之面積，但若現在在平面座標裡面，已知三點座標，能否得知三角形之面積呢？</p> <p>(2) 例題導入：從剛剛所說，我們只知道三角形面積為底 <math>\times</math> 高 <math>\div 2</math>，所以在此題中我們要創造出底與高</p> <p>(3) 例題講解：我們過點 <math>P</math> 做 <math>OQ</math> 的平行線 <math>L</math>，</p>	<p>10min (15min)</p>	<p>1. 學生一開始接觸此項訓練(化平行線、利用相似求底邊)，所以須慢慢說明，確保學生能夠理解</p>

	<p>而點 A 是 L 與 x 軸的交點。則 <math>\Delta OPQ</math> 的面積等於 <math>\Delta OAQ</math> 的面積，簡記為 <math>\Delta OPQ = \Delta OAQ</math>。假設 <math>A(a, 0)</math> 則 <math>\Delta OAQ</math> 的底邊長是 a 而它的高是 3，從圖中看得出來 <math>a &gt; 0</math>；因此 <math>\Delta OAQ = \frac{1}{2}(a \times 3) = \frac{3}{2}a</math>。</p> <p>令 <math>P_0</math> 是 P 在 x 軸的垂足，<math>Q_0</math> 是 Q 在 x 軸的垂足，則因為平行線的同位角相等，所以 <math>\angle QOQ_0 = \angle PAP_0</math>，又因為 <math>\angle Q_0 = \angle P_0 = 90^\circ</math>，所以兩直角三角形相似，簡記為 <math>\Delta QOQ_0 \sim \Delta PAP_0</math>。從對應邊的比例關係，得到</p> $1 : (2 - a) = 3 : 1$ <p>也就是 <math>6 - 3a = 1</math>，得到 <math>a = \frac{5}{3}</math>。所以</p> $\Delta OAQ = \frac{5}{2}，\text{也就是 } \Delta OPQ = \frac{5}{2}。$		
<p>練習 1</p>	<p>給定兩點 <math>P(2, -1)</math>，點 <math>Q(1, 3)</math>，求 <math>\Delta OPQ</math> 的面積，其中 O 表示原點。</p>	<p>10min (25min)</p>	<p>1. 讓學生練習 5 分鐘後，剩餘 5 分鐘可讓厲害的學生上台講解(教師輔助學生作圖，以避免學生之作圖底下同學看不懂)</p>
<p>理論推導 1</p>	<p>一般情形，假設點 <math>P(a, b)</math>、<math>Q(c, d)</math> 其中 <math>d &gt; 0</math> 且點 P 在直線 OQ 的右邊 (請畫草圖)。求 <math>\Delta OPQ</math> 的面積公式。</p> <p>講解過程—</p> <p>(1) 畫出草圖：做 OQ 知平行線交 x 軸於 <math>A(a', 0)</math> 點</p> <p>(2) 代數式推導：已知 <math>\Delta OPQ</math> 之面積為 <math>\frac{1}{2}a \times d</math>，所以須算出 <math>a'</math>，利用上述所說之相似形概念，得到 <math>a - a' : b = c : d</math>；<math>bc = ad - a'd = d(a - a')</math></p> $\Rightarrow a - a' = \frac{bc}{d} \Rightarrow a' = a - \frac{bc}{d}$ <p><math>\therefore \Delta OPQ</math> 面積為 <math>\frac{1}{2}(ad - bc)</math></p>	<p>10min (35min)</p>	<p>1. 此部分有許多未知數，做推導時須注意學生是否能跟上</p>

<p>理論推 導 2</p>	<p>如果點 <math>P</math> 在直線 <math>OQ</math> 的右邊但是 <math>d &lt; 0</math>，怎麼求 <math>\Delta OPQ</math> 的面積？再想一想，如果點 <math>P</math> 在直線 <math>OQ</math> 的左邊</p> <p>講解過程—</p> <p>當 <math>P</math> 在 <math>OQ</math> 直線的右邊，意味著過 <math>P</math> 平行於 <math>OQ</math> 的直線交 <math>x</math> 軸於 <math>A(a', 0)</math>，<math>a' &gt; 0</math>，所以</p> <p>如果 <math>d &lt; 0</math>，則 <math>\Delta OAQ = \frac{1}{2}a'(-d)</math>。而 <math>P</math> 在 <math>OQ</math> 直線的左邊，則意味著 <math>a' &lt; 0</math> 所以</p> <p><math>\Delta OAQ = \frac{1}{2} a'd  = \frac{1}{2}(-a') d </math>。總之，最後的結果不是 <math>\frac{1}{2}(ad - bc)</math> 就是 <math>\frac{1}{2}(bc - ad)</math>。</p> <p>導出結論：因為 <math>\frac{1}{2}(ad - bc)</math>、<math>\frac{1}{2}(bc - ad)</math> 僅相差一負號，所以算出來若是為負，則直接加絕對值讓他變正即可(面積恆正)</p>	<p>10min (45min)</p>	<p>1. 給學生足夠時間思考後，教師再講解</p>
<p>例題 2</p>	<p>給定 <math>\Delta ABC</math> 中 <math>A(2, 1)</math>、<math>B(1, 3)</math>、<math>C(-1, -1)</math>，求 <math>\Delta ABC</math> 的面積。</p> <p>講解過程—</p> <p>(1)例題引導：我們剛剛都有一個點在原點 <math>O</math>，但不是所有三角形的頂點都有一個點在原點 <math>O</math>，現在此題的三角形三點並沒有在 <math>O</math> 點，要如何利用剛剛所學的公式作運用呢？</p> <p>(2)例題講解：我們將 <math>\Delta ABC</math> 的頂點 <math>C</math> 平移到原點，使得 <math>A</math> 跟著平移到 <math>A'</math>、<math>B</math> 跟著平移到 <math>B'</math>，而保持 <math>\Delta ABC \equiv \Delta A'B'O</math> 平移的動作，是向右 1 單位、向上 1 單位。平移的動作對應坐標的操作，就是 <math>x</math> 坐標和 <math>y</math> 坐標各加 1。所以，<math>A'(3, 2)</math>、<math>B'(2, 4)</math>。平移之後的三角形面積就能使用前面的公式了：<math>\Delta A'B'O = 4</math>。</p>	<p>5min (50min)</p>	<p>1. 利用點的平移，再利用上述所說之三角形公式求解</p>
<p>練習 2</p>	<p>在坐標平面上，畫出以下三點，並畫出 <math>\Delta ABC</math>，求 <math>\Delta ABC</math> 的面積：點 <math>A(2, -1)</math>，點 <math>B(1, 3)</math>，點 <math>C(-1, 1)</math>。</p>	<p>10min (60min)</p>	<p>1. 讓學生練習 5 分鐘後，剩餘 5 分鐘可讓厲害的學生上台講解(教師輔助學生作圖，以避免學生之作圖底下同學看不懂)</p> <p>2. 同學可自由選擇一頂點平移</p>

			至原點，並沒有固定作法
理論推 導 3	<p>一般而言，給定平面上三點 <math>P_0(a_0, b_0)</math>、<math>P_1(a_1, b_1)</math>、<math>P_2(a_2, b_2)</math>，找出計算 <math>\Delta P_0P_1P_2</math> 面積的公式。</p> <p>講解過程—</p> <p>我們選擇其中一點 <math>P_0(a_0, b_0)</math>，將其平移到原點 <math>O</math>，則就是將每個 <math>x</math> 座標減掉 <math>a_0</math>，每個 <math>y</math> 座標減掉 <math>b_0</math>，則 <math>P_1'(a_1 - a_0, b_1 - b_0)</math>、<math>P_2'(a_2 - a_0, b_2 - b_0)</math>，再利用上述之三角形公式求解</p>	5min (65min)	
理論推 導 4	<p>如果無法是先檢查哪個點在哪條邊的右邊，可以如何修改 <math>\Delta P_0P_1P_2</math> 的面積公式，使它一定正確呢？(加絕對值即可)</p>	5min (70min)	此為數學公式的完善性，讓學生知道若出現負號則加絕對值即可
練習 3	<p>點 <math>A(2, 1)</math>，點 <math>B(1, -3)</math>，點 <math>C(-1, 1)</math>，求 <math>\Delta ABC</math> 的面積</p>	5min (75min)	
統整	<p>從利用相似形觀念推導出若三角形有一頂點在原點 <math>O</math>，則三角形面積即為 <math>\frac{1}{2} ad - bc </math></p> <p>若遇到頂點沒有在原點的三角形，則利用點的平移到原點後，即可求解</p>	5min (80min)	
測驗	<p>發下考卷請同學作答</p>	10min (90min)	

## 附錄二、教學實驗學習單

### 【三角形面積】學習單

在國小數學課程中，我們知道三角形的面積是底 $\times$ 高 $\div 2$ ；在國中時我們學習到了平面座標，讓我們在平面坐標上任意創造出一個三角形，我們要如何算出此三角形的面積呢？

#### [例 1]

給定兩點  $P(2, 1)$  和  $Q(1, 3)$ ，求  $\triangle OPQ$  的面積，其中  $O$  表示原點。

#### [練習 1]

在坐標平面上，畫出以下兩點， $P(2, -1)$ ，點  $Q(1, 3)$ ，並畫出  $\triangle OPQ$ ，其中  $O$  表示原點。求  $\triangle OPQ$  的面積。

#### [任務 1]

我們將情況推廣到一般情形，假設點  $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$  其中  $d > 0$  且點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊 (請畫草圖)。求  $\triangle OPQ$  的面積公式。

[任務 2]

這次我們試試另一種情況，假設點  $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$ ，點  $P$  在直線  $OQ$  的右邊但是  $d < 0$ ，怎麼求  $\Delta OPQ$  的面積？而如果點  $P$  在直線  $OQ$  的左邊，算法又會有什麼改變呢？

剛剛的訓練中我們知道已知原點  $O$  以及其他兩點  $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$ ，我們就可以求出三角形面積，但這樣很像不夠有用。因為並不是所有在座標平面上的三角形都恰有一個頂點在原點！那如果三角形三個頂點都不在原點又該怎麼辦呢？

[例 2]

給定  $\Delta ABC$  其中  $A(2, 1)$ 、 $B(1, 3)$ 、 $C(-1, -1)$ ，求  $\Delta ABC$  的面積。

[練習 2]

在坐標平面上，畫出以下三點，並畫出  $\Delta ABC$ ，

求  $\Delta ABC$  的面積：點  $A(2, -1)$ ，點  $B(1, 3)$ ，點  $C(-1, 1)$ 。

[任務 3]

我們推廣到一般情形，給定平面上三點  $P_0(a_0, b_0)$ 、 $P_1(a_1, b_1)$ 、 $P_2(a_2, b_2)$ ，請推導出計算  $\Delta P_0P_1P_2$  面積的公式。

[練習 3]

點  $A(2, 1)$ ，點  $B(1, -3)$ ，點  $C(-1, 1)$ ，利用[任務 3]的公式求  $\Delta ABC$  的面積。



### 附錄三、教學實驗測驗卷

【三角形面積】隨堂測驗卷			
班級：	座號：	姓名：	得分：

題目 1：

已知坐標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2, -5)$ ，點  $Q(4, 3)$ ，試求  $\Delta OPQ$  的面積

題目 2：

已知坐標平面上有三點：點  $A(1, 6)$ 、點  $B(2, 5)$ ，點  $C(-1, -4)$ ，試求  $\Delta ABC$  的面積

## 附錄四、延後測之測驗卷

### 【三角形面積】測驗

<b>【三角形面積】測驗</b>			
班級：	座號：	姓名：	得分：

題目 1：

已知座標平面上有三點：原點  $O$ 、點  $P(2, 5)$ ，點  $Q(4, 7)$ ，試求  $\triangle OPQ$  的面積

題目 2：

已知座標平面上有三點：點  $A(3, 6)$ 、點  $B(2, 5)$ ，點  $C(-1, -3)$ ，試求  $\triangle ABC$  的面積

## 附錄五、計算 mid-p-value 之程式碼 (R 語言)

```
data <- read.csv("paperdata.csv")
colnames(data) <- c("before","after")
data1 = data[c(1:30,61:89),]
data2 = data[-c(1:30,61:89),]
mid_p_value <- function(b,c){
  n = b + c
  p = 0.5
  exact = 0
  for (i in b:n) {
    exact <- exact + dbinom(i,n,0.5)
  }
  p_value = 2*exact - dbinom(b,n,0.5)
  return(p_value)
}
b1 <- table(data1)[1,2]
c1 <- table(data1)[2,1]
b2 <- table(data2)[1,2]
c2 <- table(data2)[2,1]
mid_p_value(b1, c1)
mid_p_value(b2, c2)
```

## 附錄六、回饋問卷及其資料處理

### 【三角形面積】教學演示回饋卷調查

三角形如果沒有給定底邊以及高的話我們其實很難求出三角形的面積，可是在課堂上我們經過一系列的推導，得知如果三角形有了座標之後，我們就可以輕鬆算出三角形的面積並推導出了公式。以下為【三角形面積】課堂之回饋卷：

課程內容			
01. 在一開始計算三角形面積時，我能了解作平行線可以讓三角形面積變得容易計算	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
02. 在計算三角形面積時，我能看懂老師畫出輔助線並證明出三角形相似	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
03. 我能聽懂老師利用三角形相似的比例性質計算出三角形面積	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
04. 已知三角形三頂點座標且有一點在原點(0,0)，我能聽懂老師推導出三角形面積公式	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
05. 我能聽懂老師利用「平移」的觀念將三角形的其中一個頂點平移到原點，另外兩點也隨著改變	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
06. 我能了解經過平移過後的三角形面積不變。	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
07. 我能聽懂老師利用「平移」的觀念推導出最後三角形的面積公式	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
自行操作			
08. 在計算三角形面積時，我能順利畫出輔助線以用來證明出三角形相似	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
09. 我能順利證明畫出的兩個三角形是相似三角形	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
10. 我能利用三角形相似的比例性質計算出三角形底邊進而算出面積	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
11. 如果知道三角形的三個頂點座標，且有一個頂點是原點的話，我能利用公式算出三角形面積	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
12. 我能利用「平移」將其中一個頂點平移到原點，藉此算出三角形面積	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
13. 如果知道三角形的三個頂點，我能利用公式算出三角形面積	① ( ) 同意	② ( ) 部分同意	③ ( ) 不同意
課堂反饋			
你覺得你在【三角形面積】這堂課裡面，學習到了什麼？(寫出你覺得最震撼的地方)			
有什麼想對這堂課的課程內容的想法或是對上課老師說的話嗎？			

此回饋問卷的資料蒐集主要針對每一題作數據統計並剔除無效樣本，剔除無效樣本的方式為前後題目回答不連貫。由於回饋問卷事前沒有做「預試」，因此許多學生無法將課堂內容對應到問卷之問題上，教師有講解每題之題目，這個部分需要改進。回饋問卷分成「課程內容」、「自行操作」以及「課程反饋」三部分(在第三章第三節研究工具時有詳列回饋問卷之題目)，在回饋問卷部分蒐集樣本為 59 份，甲班為 30 份，乙班為 29 份，剔除有無效樣本甲班 1 份，乙班 3 份。共蒐集有效樣本 55 份，分別為甲班 29 份，乙班 26 份。下列針對回饋問卷回答的內容分成「課程內容」、「自行操作」以及「課程反饋」這三部分依序做分析：

### 1. 課程內容

課程內容指的是教師上課的內容學生是否了解，在此強調學生「知」的向度。將課程內容部分分做五個部分。一為針對畫輔助線(做平行線)，二為相似三角形的邊長比例性質，三為一頂點在原點的三角形面積公式，四為平移的概念，五為計算三角形面積。下列針對這五部分依序做分析：

#### (1) 畫輔助線(做平行線製造相似三角形)

對應回饋問卷之問題 1 和問題 2。

問題 1：在一開始計算三角形面積時，我能了解作平行線可以讓三角形面積變得容易計算。

回饋問卷第一題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	27(93.1%)	2(6.9%)	0(0%)
乙班	23(88.46%)	3(11.54%)	0(0%)

在問題 1 部分，蒐集有效樣本 55 份，共有 50 份(90.9%)的學生對於畫輔助線製造相似三角形的動作是可以理解的，其中甲班有 27 位學生可以理

解，乙班有 23 為學生可以理解。有 5 位學生對於此部分僅部分同意，分別為甲班 2 位學生，乙班 3 位學生。從數據中顯示對於此部分學生大多數都是可以完全理解的，原因可能是學生剛開始上課會較為專心，且教師在黑板上的作圖有使用不同顏色的粉筆，使學生能一目瞭然。

問題 2：在計算三角形面積時，我能看懂老師畫出輔助線並證明出三角形相似。

回饋問卷第二題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	27(93.1%)	2(6.9%)	0(0%)
乙班	22(84.62%)	4(15.38%)	0(0%)

在問題 2 數據統計部分與問題 1 相似，僅有乙班一位同學從同意變成部分同意，顯示第一題與第二題所需要之觀念類似，兩班在證明相似三角形皆有良好的理解程度，原因可能是因為兩班教完相似形不久後又遇到國三上學期第三章的幾何證明，兩單元的證明讓學生已有良好的基礎。

(2) 相似三角形的邊長比例性質

對應回饋問卷之問題 3。

問題 3：我能聽懂老師利用三角形相似的比例性質計算出三角形面積。

回饋問卷第三題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	26(89.66%)	3(11.54%)	0(0%)
乙班	22(84.62%)	4(15.38%)	0(0%)

此題與問題 2 的回答情形類似，代表學生能夠理解相似三角形的證明，也能了解相似三角形具有邊長成比例之性質。

(3) 一頂點在原點的三角形面積公式

對應回饋問卷之問題 4。

問題 4：已知三角形三頂點坐標且有一點在原點(0,0)，我能聽懂老師推導出三角形面積公式。

回饋問卷第四題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	20(68.97%)	6(20.69%)	3(10.34%)
乙班	15(57.69%)	6(23.08%)	5(19.23%)

在問題 4 的部分同意人數有明顯的下滑，問題 4 主要是學生能否知道教師在三角形面積代數式證明的部分是否理解，仍有半數以上的學生對於此套三角形面積公式的證明可以理解，從問題 3 與問題 4 之同意率相比，發現雖然學生「懂」證明的比例略低，但「能用」的比例比較高。

(4) 平移的概念

對應回饋問卷之問題 5、6。

問題 5：我能聽懂老師利用「平移」的觀念將三角形的其中一個頂點平移到原點，另外兩點也隨著改變。

回饋問卷第五題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	25(86.21%)	3(10.34%)	1(3.45%)
乙班	21(80.77%)	3(11.54%)	2(7.69%)

在問題 5 部分關於平移的概念學生的理解程度良好，研究者認為藉由在黑板上畫圖，可以讓學生清楚知道三個點都往同個方向作移動，而且坐標變換是一樣的。

問題 6：我能了解經過平移過後的三角形面積不變。

回饋問卷第六題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	25(86.21%)	4(13.79%)	0(0%)
乙班	22(84.62%)	3(11.54%)	1(3.85%)

在問題 6 的部分與第五題回應情況近乎相同，學生對於平移三角形面積不變的概念是可以理解的。

(5) 計算三角形面積

對應回饋問卷之問題 7。

問題 7：我能聽懂老師利用「平移」的觀念推導出最後三角形的面積公式。

回饋問卷第七題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	22(75.86%)	5(17.24%)	2(6.9%)
乙班	18(69.23%)	4(15.38%)	4(15.38%)

在此部分研究者將三角形面積公式改成步驟式的教學，不強調學生能夠寫成完整的三角形面積公式。而是採用步驟 1：平移到原點、步驟 2：套用一頂點在原點的三角形面積公式，所以在此的三角形面積公式指的就是上述的兩步驟。強調讓學生能夠算出來答案為主，而不是數學的完備性。在數據上可以知道學生對於兩步驟的教學方式接受度高，相較於問題 4 的三角形面積公式推導，同意人數有所上升。

2. 自行操作

自行操作指的是學生對於教師上課的內容，遇到題目的時候能否自行將寫出來，在此強調學生「行」的向度。將自行操作的部分分作四部分。一為畫輔助線(製造相似三角形)，二為相似三角形的邊長比例性質，三為利用



公式算出三角形面積(一頂點在原點)，四為計算三角形面積，下列依序作分析：

(1) 畫輔助線(製造相似三角形)

對應回饋問卷之問題 8。

問題 8：在計算三角形面積時，我能順利畫出輔助線以用來證明出三角形相似。

回饋問卷第八題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	25(86.21%)	4(13.79%)	0(0%)
乙班	22(84.62%)	4(15.38%)	0(0%)

從數據上可以知道學生對於畫平行線的操作是沒問題的，與問題 1 的回答情形近乎相同，學生知道畫平行線的功用，並且能夠自行畫出平行線來製造相似三角形。

(2) 相似三角形的邊長比例性質

對應回饋問卷之問題 9、10。

問題 9：我能順利證明畫出的兩個三角形是相似三角形。

回饋問卷第九題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	25(86.21%)	4(13.79%)	1(3.45%)
乙班	20(76.92%)	4(15.38%)	2(7.69%)

從數據上可以得知學生在證明相似三角形大多數沒有問題。原因在上述有提到學生才剛上完相似三角形不久而且也正在上國三第三章第一單元的幾何證明，對於此教學實驗有很大的幫助。此題數據與問題 2、問題 3 的結果類似，顯示學生在知與行上能有高度一致性。

問題 10：我能利用三角形相似的比例性質計算出三角形底邊進而算出面積。

回饋問卷第十題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	21(72.41%)	3(10.34%)	5(17.24%)
乙班	16(61.54%)	4(15.38%)	6(23.08%)

此題強調的是利用相似性質算出面積(不是用公式)，並沒有強調在三頂點為未知數時的證明，研究者認為要學生從頭到尾自行推導證明對於國三學生並不是件容易的事，所以在教學時才採用對照的方式讓學生能依據上一題的方式一步一步的證明。因此在此題僅問學生能否藉由相似三角形的方式算出三角形面積。在數據上半數以上可以藉由相似三角形的觀念算出三角形面積。

(3) 利用公式算出三角形面積(一頂點在原點)

對應回饋問卷之問題 11。

問題 11：如果知道三角形的三個頂點座標，且有一個頂點是原點的話，我能利用公式算出三角形面積。

回饋問卷第十一題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	25(86.21%)	3(10.34%)	1(3.45%)
乙班	20(76.92%)	3(11.54%)	3(11.54%)

此題為第一堂課之關鍵重點，在教師一直強調且附有口訣的情況下，學生大多數皆可以接受此公式並且運用。

(4) 計算三角形面積：對應回饋問卷之問題 12、13。

問題 12：我能利用「平移」將其中一個頂點平移到原點，藉此算出三角形面積。此題為此次教學實驗的最終教學目標，從數據上來看有半數以上學生自己認為可以成功算出三角形面積。

回饋問卷第十二題人數統計表

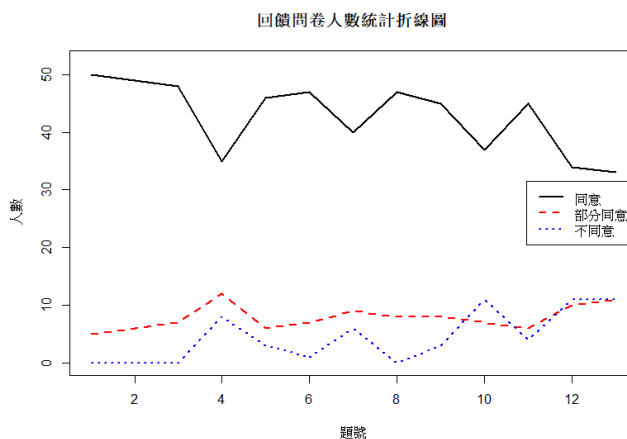
	同意	部分同意	不同意
甲班	19(65.52%)	6(20.69%)	4(13.79%)
乙班	15(57.69%)	4(15.38%)	7(24.14%)

問題 13：如果知道三角形的三個頂點，我能利用公式算出三角形面積。

回饋問卷第十三題人數統計表

	同意	部分同意	不同意
甲班	18(62.07%)	6(20.69%)	5(17.24%)
乙班	15(57.69%)	5(19.23%)	6(23.08%)

在此「公式」的意思指的是藉由平移再套入公式解決問題(上述問題七之說明)。此題設計的並不好，與問題 12 近乎一樣，應稍作更改，從數據上來看與第十二題之數據近乎相同。下圖為此回饋問卷的折線統計圖。



回饋問卷人數統計折線圖

### 3. 課程反饋

課程反饋指的是學生對於整個教學實驗後的感想，強調的是學生是否有領略課堂上所教的知識的用處，在此強調學生「識」的向度。在課程反饋分作兩部分，一為學生認為自己學習到了什麼，二為對於課程內容的任何想法。

#### (1) 學生認為自己學習到了什麼

部分學生沒有填寫此部分，有填寫的學生分作兩類型，一種是覺得公式很實用，一種是將看起來很難的題目(浮在空中的三角形)變簡單。下列列舉數位學生之回饋單：

<b>課堂反饋</b>
你覺得你在【三角形面積】這堂課裡面，學習到了什麼？(寫出你覺得最震撼的地方)
困難的題目在經過老師的講解後，變得有點簡單，而且老師很有趣。

學生課堂反饋問題 1(1)

<b>課堂反饋</b>
你覺得你在【三角形面積】這堂課裡面，學習到了什麼？(寫出你覺得最震撼的地方)
學到)如今教的，卻可合成往昔教的，讓圖形更精進，也順便複習。最震撼： $\triangle$ 與 $\square$ 浮往日不太會算，現卻有公式可套用。

學生課堂反饋問題 1(2)

<b>課堂反饋</b>
你覺得你在【三角形面積】這堂課裡面，學習到了什麼？(寫出你覺得最震撼的地方)
面積轉移後看 $\square$ 形更方便!!

學生課堂反饋問題 1(3)

(2) 課程內容的任何想法

此題的回答包羅萬象，在此僅列出幾個回應。

有什麼想對這堂課的課程內容的想法或是上課老師說的話嗎？
覺得神奇！竟然有一個那麼不一樣的方法，很實用！ 希望下次也可以有這種實用的公式。

學生課堂反饋問題 2(1)

有什麼想對這堂課的課程內容的想法或是上課老師說的話嗎？
可以學到新的公式，並且應用在考試上，十分實用

學生課堂反饋問題 2(2)

有什麼想對這堂課的課程內容的想法或是上課老師說的話嗎？
很棒啊，看不出來是某斤老師ㄟ

學生課堂反饋問題 2(3)

對於回饋問卷的填寫時，由於學生會忘記或無法理解回饋問卷的問題是對應在課堂上的哪個步驟，因此教師在學生填寫問卷時，有一題一題的講解對應在課堂上的哪個內容。這是此次研究的一個需要修正之處，設計回饋問卷時，應事前給學生試答。此次回饋問卷的作答時間為 10 分鐘，為課程結束當下與後測測驗卷一起作答，從回饋問卷的情況來看，學生認為教師的教學成效以及自己的學習成效皆不差。但從測驗卷結果來看沒有那麼高的答對率，以回饋問卷和測驗卷結果作比對，可以發現學生自認為自己學會和實際上真正答對仍有一些落差。