

微積分了沒？

微積分教材的反思以及 對高中和大一課程的啟示

單維彰

國立中央大學師資培育中心與數學系

中華民國數學會 2018 年會

民國107年12月8日

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

2

一 微積分 in 高中數學

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

4

「微積分」的教學標準

- ◆ 高三（12年級）下，數甲 Only。
- ◆ 多項式函數 Only。
- ◆ 應用：面積、體積。

許多學生認為比前面的數學都簡單。

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

3

「微積分」之前課題舉隅

- ◆ 多項式：方程求根、不等式解區間。
- ◆ 機率之貝氏定理。
- ◆ 推論統計之信賴區間。
- ◆ 弧度量與三角函數。
- ◆ 平面上的線性變換。
- ◆ 空間向量：直線、平面、外積。

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

4

商權一：為了什麼？

- ◆ 多項式：方程求根、不等式解區間。
- ◆ 弧度量與三角函數。

學了用在哪裡？為何而學？

- ✓ 導函數的不等式解區間。(1684)
- ✓ 弧度量 & 正餘弦互導。(1650—1720)

5

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

商權二：數學知識發展

- ◆ 機率之貝氏定理。(1750)
- ◆ 推論統計之信賴區間。(20th世紀)
- ◆ 平面上的線性變換。(1800—50)
- ◆ 空間向量。(1840—90)
- ◆ ...
- ◆ 多項式微積分。(1680)

6

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

商權三：需求觀

- | | | |
|--------------------------|--|---------------|
| ◆ 平面上的 線性變換。 | 誰 的 顧 客 多 ? 誰 的 需 求 大 ? | ◆ 單變數 微積分。 |
| ◆ 空間向量、 直線與平面 方程式。 | | |
| 必修 | | 選修 |

7

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

二 微積分的深澳之學

8

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

微積分「深」在哪裡？



Cauchy (1789—1857)



Weierstrass (1815—97)

單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

9

積分的面積意涵



Riemann (1826—66)



Lebesgue (1875—1941)

單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

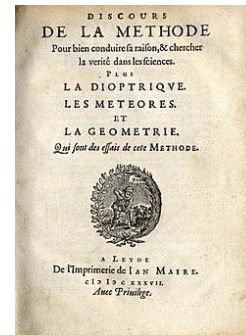
10

三 微積分也曾天真無邪

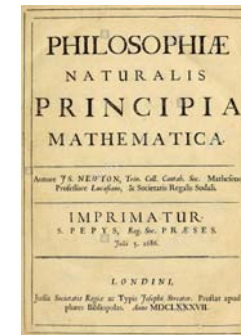
單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

11

微積分「淺」在哪裡？



La Géométrie (1637)



Principia (1687)

單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

12

1637 第一版的目錄

TABLE
Des matieres de la
GEOMETRIE.
Livre Premier.

DES PROBLESMES QU'ON PEUT
constituer sans y employer que des cercles &
des lignes droites.

COMMENT le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie. 297
Comment se fait Geometriquement la Multiplication, la Division, & l'extraction de la racine quarrée. 298
Comment on peut user de chiffres en Geometrie. 299
Comment il faut venir aux Equations qui seruent a résoudre les problemes. 300
Quels sont les problemes plans; Et comment ils se résolvent. 302
Exemple résolu de Pappus. 304
Réponse à la question de Pappus. 307
Comment on doit poser les termes pour venir à l'Equation en cet exemple. 310

Com
K k k

單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

13

進步的觀念：用法文出版（但是在法國遭禁）

但是笛卡耳只用一條水平數線

單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

14

有需要時輔以鉛直線

單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

15

Frans van Schooten (1615—60)

荷蘭萊登

林布蘭作品
229

單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

16

施豪登的文化遺產

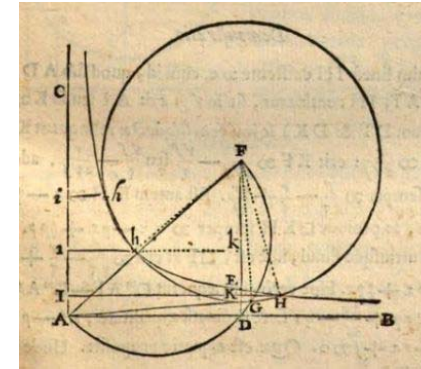
- ◆ 1649：拉丁文譯本。
- ◆ 1659—61：拉丁文注。
- ◆ 教出惠更斯。



單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

17

施豪登的拉丁文注：縱坐標

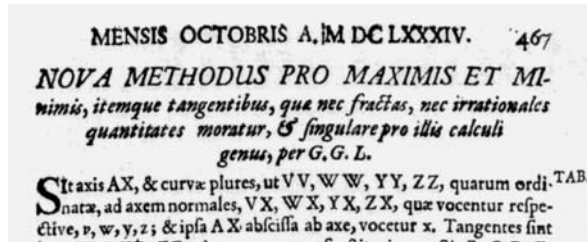


單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

18

施豪登的拉丁注本

- ◆ 約 1662：牛頓從 Barrow 學習。(→1669)
- ◆ 1672：惠更斯授萊布尼茲。(→1684)



劉柏宏 (2012) 微積分基本定理的發展歷史在教學上的應用與啟發。數學傳播 36。

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

19

Naïve Calculus

- ◆ 牛頓、萊布尼茲固然是天才 ...
- 他倆的微積分能有多難？
- ◆ 高中一年級的知識背景。
 - 直角坐標的基本方法。
 - 直線點斜式。
 - 多項式函數、多項式除法。

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

20

中國的遺產

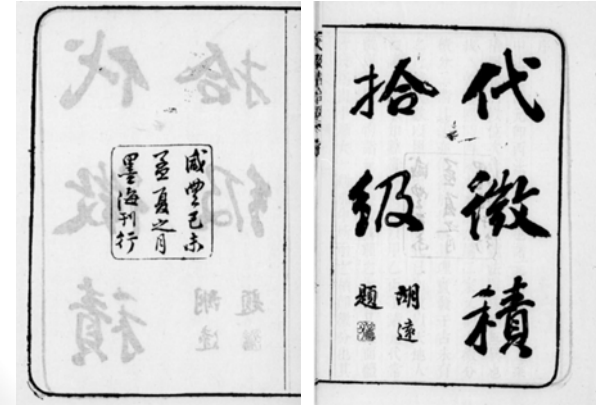
- ◆ 綜合除法
- ◆ Horner 演算法、Taylor 多項式

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x-1)(x-1)^2(x-1)^2 + 6(x-1) + 5$$

| | | | | | |
|-------|---|----|----|----|---|
| 1 | 3 | -2 | -3 | 6 | |
| + | 1 | 4 | 2 | -1 | 1 |
| <hr/> | | | | | 5 |
| + | 1 | 5 | 7 | -6 | |
| <hr/> | | | | | 1 |
| + | 1 | 6 | 13 | -6 | |
| <hr/> | | | | | 1 |
| + | 1 | 7 | 13 | -1 | |
| <hr/> | | | | | 1 |
| + | 1 | 8 | 11 | 6 | |
| <hr/> | | | | | 7 |

單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

李善蘭譯微積分 (咸豐九年 1859)



單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

第二批西方數學大轉譯

序
 中法之四元即西法之代數也諸元諸乘方諸互乘積四元別以位次代數別以記號法雖殊理無異也我朝康熙時西國來本之奈端二家又創立微分積分二術其法亦借徑於代數其理實發千古未有之奇秘代數以甲乙丙丁諸元代已知數以天地人物諸元代未知數微分積分以甲乙丙丁諸元代常數以天地人物諸元代變數其理之大要凡線面體皆設為由小漸大一剎那中所增之積即微分也其代微積拾級序

單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

李善蘭在同文館

- ◆ 同治 7 年 1868，天算館總教習。



單維彰 · 微積分課程展望 2018/12/01

四 融入微積分的數學課程

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

[25]

「比」與「比值」

- ✗ $a : b$ 其中 $ab \neq 0$
- ✓ 當 $b \neq 0$ ， $a : b$ 的比值為 $\frac{a}{b}$ 。
 - 「比」何須「比值」？
 - $a : b : c$ 的「比值」為何？

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

[26]

小學不急著處理

- ✗ $2 : 0 = 2 : 1$ ， $2 : 0 = 0 : 2$ 。
- ✓ $2 : 0 = 1 : 0$ ， $2 : 0 = 0 : 0$ 。
- ✓ $0 : 0 = a : b$ 。
 - $0 : 0$ 的比值似乎... 在「某種」意義下...
 - 可能等於任何數。

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

[27]

比例式 \leftrightarrow 直線方程式

- ✓ $y : x = m : 1$ 。
- ✗ $\frac{y}{x} = m$ 。
- ✓ $(y - b) : (x - a) = m : 1$ 。
- ✗ $\frac{y - b}{x - a} = m$ ，可它不就「點斜式」嗎？
一記漏接。

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

[28]

從方程式轉銜到函數

- ◆ 一個墊步，不要太嚴肅。
- ◆ 直線方程式的其中一種形式。
 - 標準式 $ax+by+c=0$
 - ...
 - 函數式 $y=mx+k$
(動機、好處...)

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

29

$f(x)$ 只是函數符號

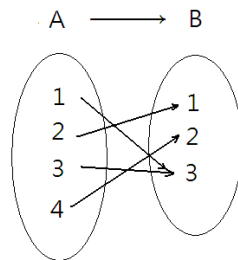
- ◆ 它不是「函數」。
- ◆ 素養導向：使用它是因為溝通的需求。
 - 圖形的漲縮平移 $f(ax)$ $f(x-h)$
 - $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $[f \circ g](x) = f(g(x))$
(國中不必急著處理)

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

30

「函數」的標準教學

- ◆ 不論幾年級、不論前後文。
- ◆ SMSG (New Math) 的陰魂不散。



單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

31

集合式「函數」的商榷

- ✗ 中學哪裡有離散函數？
- ✗ 中學生的「集合」概念心像為何？
- ✗ 自變數如何「自」「變」？
「代數以... xyz代未知數，微積分以... xyz代變數」
李善蘭 (1859)
- ✗ 17世紀 vs 19世紀

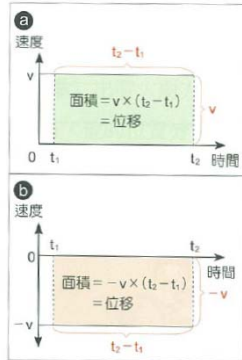
馬雅筠、高健維，大安高工11年級教學實驗，民國106年11月。

單維彰·微積分課程展望 2018/12/01

32

九年級（國三）物理課本

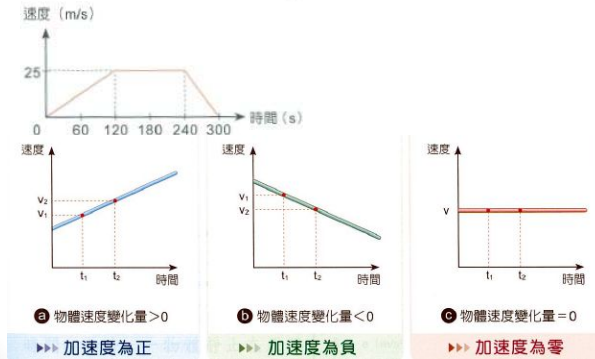
- ◆ 等速、等加速運動的 v-t 關係圖
- ◆ 所圍面積即為位移



翰林版《自然與生活科技》3上，第1課「直線運動」。

33

教學例題的變化



34

17世紀「函數」、「微積分」的舞台已經備妥

- ◆ 一記「妙傳」，另一次漏接。
- ◆ 數學課本 3 下二次函數 $f(x)$
正方形面積 = 邊長²
邊長 x 為什麼要「自變」？

35

五 高中何須微積分？

36

不是 Why? 而是 For What?

- ◆ 不是為了準備大一 Calculus。
- ◆ 為了高中數學的有機連結與脈絡聯繫。
- ◆ 為了某些大一專業必修課程：
普物、普化、經濟學、統計學
立馬需用，非常概念性（除了物理）。

高晟鈞（2009）、李明憲（2013）、龍昌灝（2015）、郭潔如（2015）

37

請指教

38