單維彰、許哲毓、陳斐卿（2018）。
以學前診測與自由擬題探討九年級學生的自發性機率概念。
臺灣數學教育期刊，**5**（2），39-64。
doi: 10.6278/tjme.201810_5(2).001

以學前診測與自由擬題探討九年級學生的自發性機率概念

單維彰[1]　許哲毓[2]　陳斐卿[3]

[1]國立中央大學師資培育中心暨數學系

[2]國立中央大學學習與教學研究所

[3]國立中央大學學習與教學研究所暨師資培育中心

臺灣從 92 課綱起，機率即首次出現於九年級，但是八年級學生參與 TIMSS 國際評量時，在機率統計主題的表現卻已然很好，似乎透露著學生在未經學校正式的數學科課程之前，已經擁有某種程度的機率知識。本研究因而好奇：未經機率教學的九年級學生，到底具備何種自發性的機率概念？換言之，本研究意欲探討臺灣九年級學生對機率知識之自發性潛力。本研究設計機率學前診測（解題）與自由擬題兩種活動，將機率概念分為三種類型：主觀機率、古典機率、以及頻率機率；在前述的類型上，又辨識出四種概念層次：單一事件、複合事件、獨立性、條件機率，用於區分學生在解題與擬題各自具備的機率知識。結果顯示，未經機率教學的九年級學生，七成以上有能力解出古典機率的單一事件問題，顯示他們具有自發性的機率知識；再從學生所擬題目來分析，發現他們能展現機率概念的每一個層次。本文因而建議機率課程可提早於八年級開始，並宜注意各種機率類型的均衡發展，亦可在九年級導入獨立性與餘事件。

關鍵詞：自由擬題、自發性機率概念、機率概念層次、機率類型

通訊作者：陳斐卿，e-mail：chen.feiching@gmail.com
收稿：2017 年 8 月 22 日；
接受刊登：2018 年 10 月 5 日。

Journal homepage: http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

Shann, W. C., Hsu, C. Y., & Chen, F. C. (2018).
Investigation of ninth graders' spontaneous probabilistic concepts in pop pretests and problem posing.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *5*(2), 39-64.
doi: 10.6278/tjme.201810_5(2).001

Investigation of Ninth Graders' Spontaneous Probabilistic Concepts in Pop Pretests and Problem Posing

Wei-Chang Shann [1]　Che-Yu Hsu [2]　Fei-Ching Chen [3]

[1] Center for Teacher Education & Math Department, National Central University

[2] Graduate Institute of Learning and Instruction, National Central University

[3] Graduate Institute of Learning and Instruction & Center for Teacher Education, National Central University

Many students exhibit some knowledge of probability before they have formally been taught. For example, in Taiwan, probability is not taught until the ninth grade, but Taiwan's eighth graders perform above average in the probability category of the Trends in International Mathematics and Science Study. This fact inspired the authors to investigate ninth graders' spontaneous conceptions of probability. In the present study, two activities were designed for data collection: a pop pretest and free problem posing. Two-dimensional analysis was employed to identity the spontaneous concepts demonstrated in the activities. Analysis was based on three probability types: subjective, classic, and frequentist. These three types encompassed four conceptual levels: single event, compounded events, independency, and conditionality. The results revealed that more than 70% of the students could solve single-event classic probability problems before they were formally taught relevant methods. Additionally, the students' spontaneous concepts extended to all conceptual levels. We therefore suggested that the introductory probability curriculum can be implemented in grade eight, and independency and complementary-events could be taught in grade nine.

Keywords: free problem posing, spontaneous probabilistic concepts, probability concepts levels, probability types

Corresponding author：Fei-Ching Chen，e-mail：chen.feiching@gmail.com
Received：22 August 2017;
Accepted：5 October 2018.

壹、前言

機率與統計，和代數、幾何、數與量並列，是我國中小學數學教育的四大主題，但是在課程的規劃上，後三個主題都有機會在數學課程中循序發展，惟獨機率與統計之中的機率主題，向來顯得較為孤立。仔細地說，自從民國 92 年版的九年一貫數學領域課程綱要實施以來，機率課程即遲至九年級才首次出現（各版教材皆將其安排在第二學期）。有學者主張機率思維並不簡單，不宜太早學習（翁秉仁，2016）；然而國家教育研究院〈十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究〉報告（林福來、單維彰、李源順、鄭章華，2013），提出八大項數學領域學習內容修改建議，其中第一項就是關於「不確定性與數據處理」，文中指出美國和中國皆在小學階段就有機率內容，並認為我國太晚進入機率主題。顯然，太早或太晚的主張並存，這是一個值得議論的課程重要決策。

部分證據顯示九年級學生已經具備機率概念。相對於數學課程在九年級才進入機率內容，至少有兩條線索，顯示學生可能在未經正式機率教學的條件下，就具備了某些機率思維能力，亦即本文所謂的「自發性機率概念」。其一是自然領域安排在七年級的生物遺傳課程，已經用到機率，而這樣的課程持續進行著。其二是 TIMSS（Trends in International Mathematics and Science Study）國際評量的成績，民國 100 年度接受 TIMSS 評量的我國八年級學生，在民國 97 或 98 年就讀六年級，當時已經採用九年一貫的 92 課綱，所以應試時尚未正式學習機率。但是，他們在所有數學主題（包括機率）皆表現優異，遠超過 TIMSS 量尺中心點的 500 分（林陳涌，2014）。

本研究有雙重目標：一是以「機率學前診測」與「機率自由擬題」兩項活動蒐集資料，設計機率類型與機率概念層次兩個向度的分析規準作為研究工具，探究九年級學生自發性機率概念的發展程度；二是建基於前述實徵研究發現，並參照國外教材以及研究結果，探究臺灣數學教育應該包含哪些適切的機率內容？機率課程又該如何規劃，以兼顧認知上的循序發展、跨領域的呼應協作、以及連結生活經驗與解決實際問題的素養目標？以作為制訂課程綱要與設計教材教法的佐證。文章結構的鋪陳上，本文於第貳章之末列出研究問題，第肆章揭露本地實徵研究之發現，並於第伍章提出機率課程設計的建議。

貳、文獻探討

相對於大多數教育領域聚焦於學生受教後的學習成效，本研究聚焦於學生未經教學而自發的機率概念。文獻探討分為五節：首先探討直觀的機率思維；而後，為準備研究工具之需，我們探討機率類型與其概念層次的兩類文獻；接著回顧擬題活動之相關文獻，並以 TIMSS 試題和成績作為本研究之合理動機；最後，為準備提出課程規劃的建議，我們回顧臺灣數學課程綱要在

機率主題的沿革，以及某些「他者」的機率課程。

一、直觀的機率思維

所謂自發性機率概念，亦即未經正式機率教學就具備的機率概念，只能說是來自於直觀。心理學界在 1950 年代即開始研究直觀的機率思維，確認這種認知型態的存在（Cohen & Hansel, 1956）：那是人們為了在不確定的環境中做出適當的決定，必須運用一種與生俱來或是從經驗中養成的認知型態，而如此的認知結果是不證自明的（Konold, 1991）。

在數學教育領域，直觀機率思維的專門化研究，一般認為始於 1975 年 Fischbein 的專書（Fischbein, 1975），他表明直觀思維是機率概念的最初雛形，不論機率概念的對與錯，都將成為學童面對問題時，最自然產生的想法。後續的研究表明，生活中所經歷之態度、信念、經驗、語言，都會影響自身機率思維的發展（Amir & Williams, 1999; Bognár & Nemetz, 1977）。

本研究認為自發性機率概念之存在，乃以前述文獻作為基礎。但是，許多關於直觀思維的研究偏向機率迷思概念的產生，及其對於教學產生的干擾（例如 Shaughnessy, 1977），而引伸至教學的因應設計（例如 Fischbein, 1987）。本研究並不關注直觀導致的迷思概念，而是試圖發掘直觀思維對於課程設計的可能助益。

二、機率類型

本研究將以機率類型作為分析自發性機率概念的第一個向度。本節從應用的觀點，強調機率類型是指「獲致機率數值的方法」，而不是各自不同的機率理論。本文採用 Shaughnessy（1992）統整各家之言所做的四種類型：古典機率（classical probability），頻率機率（frequentist probability），主觀機率（subjective probability），和形式機率（formal probability）。

（一）古典機率

古典機率以數量的比值計算機率。此類型的前提是：能窮舉隨機試驗的所有可能結果（稱為樣本空間），且發生每種結果的可能性均等。在此前提下，如果樣本空間有 n 個元素，則每個元素發生的機率定為 $\frac{1}{n}$。法國數學家巴斯卡（Blaise Pascal）和費馬（Pierre de Fermat）在 1654 年討論一個上流社會因賭博而產生的問題時，作出古典機率的定義（Borovcnik, Bentz, & Kapadia, 1991）。因為古典機率必須接受「可能性均等」的前提，所以也稱為理論機率或先驗機率。

（二）頻率機率

頻率機率以重複試驗的相對次數當作機率。在彼此「獨立」的前提下，重複一個隨機試驗無窮多次，將某事件發生之相對次數（即「頻率」）的極限，作為該事件的機率。人們當然無法執行無窮多次的實驗，因此實際上乃是根據有限的執行結果而決定機率的估計值。頻率機率的

概念發生於 17 世紀末葉，一般以瑞士數學家伯努利（Jacob Bernoulli, 1655-1705）於 1713 年出版的遺作《猜測的藝術》（Ars Conjectandi）作為此概念的濫觴。因為頻率機率以實驗結果為依據，所以也稱為實驗機率。

（三）主觀機率

主觀機率以個人信念或既有經驗而決定其值，它是直觀機率思維的一種表現：直觀地認知不確定的狀態，而主觀地評估其可能性。在應用上，主觀機率的數值並非一成不變，它可以隨著新訊息的出現而調整其判斷，而後者又可以用來解釋人們獲得新資訊之後，如何合理化自身信念的形成和改變（Borovcnik et al., 1991; Fischbein, 1975）。如前述，主觀機率的研究始自 1950 年代，1957 年 11 月還登上了《科學人》（Scientific American）雜誌的封面。相對於主觀機率，古典機率和頻率機率又統稱為客觀機率。

（四）形式機率

形式機率先擬定機率的分布，從機率質量函數或者機率密度函數來計算機率。這是蘇俄數學家柯莫戈洛夫（Andrey Kolmogorov, 1903-1987）開創的理論架構，他以純數學的算術和幾何公設系統作為典型，從所謂的機率公設出發，以定義和定理證明，發展出數學上嚴謹的機率論。形式機率得以處理具有連續可能結果的隨機試驗。因為它需要微積分，所以通常不屬於中學課程，而後文也將不再討論此類型。

在教學上清楚辨識機率類型，應該有助於減少學習過程中的困惑。機率的教學應以數學模型的觀點（a modeling point of view），讓學生能察覺與辨識適當的機率類型（Shaughnessy, 1992）。傳統上，中學機率課程以古典機率為主，但許多國家的課程已經開始重視提供主觀機率和頻率機率的學習經驗（Watson, 2005）。靈活搭配各種機率類型的能力，實為運用機率解決不確定性問題之數學素養。

三、機率概念層次與適學年齡

本研究將以機率概念層次作為分析自發性機率概念的另一個向度，而各層次的適學年齡亦將作為我國機率課程規劃的建議依據。本節綜合回顧 Piaget 與 Inhelder（1975）、Bognár 與 Nemetz（1977）和 Jones、Langgrall、Thornton 與 Mogill（1997）等三組學者的研究結果：他們將兒童或青少年的生理發展階段，次第對應於各層次的機率概念。前兩組學者的研究，支持九年級學生具備自發性機率概念的可能性，第三組學者的研究，支持本研究採用兩個向度來分析機率概念。

在皮亞傑認知發展論的「運思階段」架構中，Piaget 與 Inhelder（1975）認為沒有證據顯示前運思期（二至七歲）之兒童，具備不確定性的概念。但是在具體運思期（七至十一歲），Bognár

與 Nemetz（1977）作出細緻的發展描述：七至八歲可以分辨確定事件、不可能事件及互斥事件；九至十歲可以細分頗有可能的事件、不太可能的事件，並能夠按照可能性將事件排序。按此理論，三或四年級的學童，開始具備初始的主觀機率概念。

本研究所關心的學生年齡，屬於青少年時期的形式運思期（十一至十六歲）。Piaget 與 Inhelder（1975）認為這個時期的青少年能列舉實驗的所有可能結果，並且瞭解相對次數之極限（引自劉秋木，1996）。也就是說，九年級學生大約已經能夠自發地列舉樣本空間，因此準備好了學習古典機率，並且具備頻率機率概念。而 Bognár 與 Nemetz（1977）更細緻地指出：十一至十二歲可理解相對次數（relative frequencies），這就是頻率機率的先備知識。以上研究表明不同類型的機率概念最早發生於哪個認知發展階段，支持本研究將「機率類型」當作一個分析的向度。

機率概念還有類型以外的另一個向度，例如前面指出的互斥事件概念，並不限定於主觀機率，在古典機率和頻率機率也都需要互斥概念來思考問題。Jones 等人（1997）和 Jones、Thornton、Langrall 與 Tarr（1999）也支持這個觀點，他們以機率情境（probability situation）和機率思維（probabilistic thinking）兩個向度，分析三年級兒童的機率認知發展。機率情境的細項包括樣本空間、單一事件、機率比較和條件機率，而機率思維的細項和定義，列於表 1。Jones 等人的研究確認了二個分析向度的必要性：不論何種機率情境，兒童均表現出有序性的思維層次發展，而且在不同的情境上，（在三年級）達到不同的思維層次。

表 1

Jones團隊所建立之「機率思維」分析向度的細項與定義（整理自謝佩宜，2008；Jones et al., 1999）

機率思維	主觀	過渡	非主觀	數值化
定義	兒童多以個人的主觀意識或喜好來處理機率問題。	兒童思考介於主觀和質樸的量化思考之間，但其思考結果最後往往又會回到主觀的想法。	兒童已能做量化思考，但尚未具備足夠的數量概念。	兒童可完全使用生產性策略來描述結果，並能用數字完整的表現出數量的推理。

Jones 等人（1999）的結果支持本研究採用二個向度來分析學生的自發性機率概念，但是其機率思維的向度，並不適用於本研究。那是因為 Jones 等人的研究對象為三年級學生，他們的機率概念主要屬於主觀類型，表 1 之「機率思維」所謂的非主觀與數值化，著眼於學童將可能性從自然語言轉換成機率數值。相對地，本研究的對象是九年級學生，他們的認知能力不限於主觀機率，於是本研究將使用機率類型取代機率思維，作為一個分析的向度，而以機率概念層次

取代機率情境，成為另一個向度。兩個向度的概念細項，詳如後面的表 4 和表 5。

四、數學擬題

數學的學習若長期注重解題能力的強化，可能造成學生在數學思維發展上的限制，進而影響其學習態度。為平衡以解題為主的教學活動，國內有些學者提出了擬題活動的建議（陳斐卿、江家瑋、張鐵懷、黃佩岑、單維彰，2015；Leung, 2016）。數學擬題活動讓學生以數學知識和經驗為基礎，基於其自身經驗或特定情境，創造出有意義的數學題目（Stoyanova & Ellerton, 1996）。改革導向的美國和中國數學課程，也強調擬題活動可發展新世紀所需的創意思維與創新能力；值得注意的是，中國的國小數學教科書在西元 2000 年後顯著增加了「不確定性」主題的擬題活動（Cai & Jiang, 2017）。

相對於國內學者所做的擬題研究關注於學習動機、學習成效與擁有感等議題，本研究認為擬題活動能探掘學生的直觀思維，讓學生主動呈現其機率概念，故將它當作探索自發性概念的工具。Silver（2013）也支持此想法，他指出擬題是一個將知識個人化的過程，因此擬題有利於蒐集學生之想法或概念，藉以分析學生的思維是否與生活經驗結合，或是對尚未學習的知識有哪些自發性的概念。

在擬題活動的設計上，依據結構情境限制的多寡，分為「結構擬題」、「半結構擬題」與「自由擬題」（Stoyanova & Ellerton, 1996）。「結構擬題」給定一個條件不足或多餘資訊的題目，讓學生進行修改，期望在過程中理解其數學概念。「半結構擬題」則限定一個半開放的情境，例如限定某課程單元或給定部份題幹，讓學生據以擬題。而「自由擬題」則毫無限制，例如不限擬題的時間點、答案已知或未知、活動情境素材，以及教師的涉入等等（Bonotto, 2013）。自由擬題是比較晚近被使用的研究工具，例如國外有 Şengül 與 Katranci（2012）對數學師資生在「集合」課題上的認知與能力研究，以及 Azlina、Amin 與 Lukito（2018）對小學生做認知類型與創造力的關係研究，國內則有陳斐卿等人（2015）對國小四年級學生的研究。

「自由擬題」原本應該毫無限制，但本研究的擬題活動限定了「機率」的大方向，要求學生出一道含有不確定性之機率題。因為除了「機率」大方向以外，皆無所限制，故仍可視為「機率的」自由擬題活動。

五、TIMSS 的機率試題

研究者從 TIMSS 1999、2003、2007 與 2011 年公佈之「數據與機率」試題中，辨識出 14 道機率試題。在機率類型上，有 13 題屬於古典機率，1 題頻率機率。在機率概念層次上，分辨出古典機率的單一事件 8 題、複合事件 1 題、獨立性 2 題、與條件機率 2 題。作者分享全部的 TIMSS 機率試題於網路檔案（單維彰、許哲毓，2014），此處僅舉 2011 年之複合事件試題為例：

「在一個袋子中裝有 10 顆紅色鈕扣，8 顆藍色鈕扣，以及 4 顆白色鈕扣。從袋中取出一藍色鈕扣或白色鈕扣的機率有多少？」這是一道典型的古典機率單一事件試題。

臺灣八年級學生在「數據與機率」主題之平均量尺分數，自 2003 年以來依序為 568、566、584，保持一定的水準。以上資訊顯示學生對於「數據與機率」主題並不陌生或恐懼，因此本研究猜想學生具有自發性的機率解題能力，甚至達到獨立性的層次。但是前述成績是「數據與機率」主題的統合分數，而且本研究意欲探討九年級學生在教學前對現行機率課程的解題能力，故不能以 TIMSS 成績作為本研究的資料。

六、臺灣的機率課程發展脈絡

在臺灣，「機率」於民國 53 年首度進入數學課程（教育部，1964），當時僅置於高中，亦稱「概率」。當時的機率課程有以下兩項特點：（1）以嚴謹的「集合」來表示樣本空間與事件，（2）將機率作為「排列組合」的後續課題。而這樣的觀點影響至今。

民國 60 年代，高中數學課程延續民國 53 年版的全部內容，包含古典、頻率與形式機率（以隨機變數的形式呈現）這三種類型，並且增加了貝氏定理（教育部，1971）。在這段時期，國小階段也引進了機率（教育部，1975），國中階段則有基本的統計而沒有機率。

民國 70 年代，高中數學課程刪除了頻率、主觀、與形式機率，僅只教導古典機率此一類型。而國中階段則首度加入了機率，在類型上包括頻率機率（稱為實驗機率）與古典機率（不涉及樣本空間與排列組合），在解題的方法上採用樹狀圖作為主要手段（陳冒海，1989）。國小階段的機率課程沒變，因此本時期在國小、國中以及高中都有安排機率。

民國 80 年代，臺灣數學教育界興起「建構式數學」的思維，但是對機率內容的影響不大。然而，89 年的九年一貫數學領域暫行課程綱要，在國小階段還繼續留著「可能性」，到了 92 年起之正式綱要，國小階段的機率課程就被刪除了。從那時起，機率課程即首度出現於九年級，而且不再有頻率機率的觀念，僅有古典機率。

由以上回顧，可知我國機率課程曾經涵蓋三種機率類型的綜合學習，但是在最近十六年，從九年級下學期才開始教導機率，並在類型上獨尊古典類型，且以單一事件為主。前述發展，簡化整理於表 2。我國的機率課程現況，顯然不吻合本計畫回顧的機率認知發展與適學年齡研究結果。

表 2

機率在數學課程中的發展時程

民國 / 階段	50 年代	60 年代	70 年代	80 年代	90 年代	100 年代
國小		首次出現	百分比與機率	89 暫綱留下可能性		
國中			首次出現，有頻率機率、古典機率，有樹狀圖	內容同左	僅存古典機率	同左
高中	首次出現，需要集合和排列組合	古典、頻率與形式機率，新增貝氏定理	僅存古典機率，其他類型皆被刪除	同左	同左	同左

七、其他國家或其他領域課程中的機率

此節簡述美國與英國的數學課程綱要，在七至九年級的機率課程規劃，以及我國現行自然與生活科技領域課程中，使用機率的狀況。

美國在 2010 年首次規劃了全國各州的共同核心課程標準（Common Core State Standards, CCSS）（Common Core State Standards Initiative, 2010）。雖然美國憲法使其不能強制執行，但僅有少數的州政府不採用。根據 CCSS，美國七年級在「不確定性」主題有八項目標，其中機率和數據處理各占一半，而機率部分的目標如下：

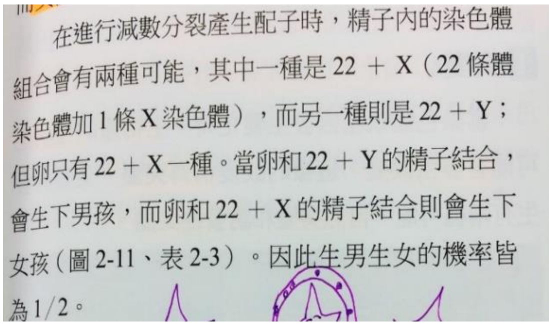
1. 了解機率是表示事件發生之可能性的數，它的值介於 0 與 1 之間。其值越接近 1 表示越可能發生，越接近 0 表示越不可能發生，而 1/2 附近的值難以決定的可能性。
2. 透過收集數據和長時觀察來估計不確定事件之機率，並在給定機率的條件下預測該事件的相對次數。
3. 發展機率模型並用以發現事件的機率。將模型推論的機率與實際觀察到的頻率做比較；如果模型的預測效果不好，解釋差異性的可能原因。
4. 運用有系統的列舉、表格、樹狀圖或模擬，求得複合事件的機率。

英國將十一年的國民義務教育分成四個關鍵階段（key stages），其中對應於國中七至九年級的是第三階段（KS3）。英國的數學課程在第三階段關於機率的指標有以下四條（Department for Education, 2014）：

1. 能記錄、描述和分析隨機試驗之各種結果的發生頻率，能用適當的語言和 0 與 1 之間的機率尺度，表達公平性以及相等或不相等的可能性。

2. 理解所有可能結果的機率總和為 1。
3. 能有系統地使用表格、網格和文氏圖來計數集合以及聯集和交集的元素個數。
4. 能為單一或複合事件產生互斥且出現機會相等的樣本空間，並據以計算它們的理論機率。

注意英國所謂的「理論機率」就是本文的「古典機率」。而且，美國和英國的「複合事件」都不是一般性的，而是餘事件和彼此互斥的和事件。由以上簡述，可見美國和英國在國中階段的機率課程，在知識和技能方面的教學規劃，皆多於我國。然而，雖然我國的數學課程在九年級才正式開始機率教學，但是在自然與生活科技學習領域的課程，從七年級的「遺傳」主題就開始應用機率概念了，而且還涉及獨立性概念。本文擷取南一版自然與生活科技課本的內容為例，如圖 1。在「遺傳」的具體情境下，學生並沒有使用機率的困難，因此學生可能具有自發性的機率概念。


在進行減數分裂產生配子時，精子內的染色體組合會有兩種可能，其中一種是 22 + X（22 條體染色體加 1 條 X 染色體），而另一種則是 22 + Y；但卵只有 22 + X 一種。當卵和 22 + Y 的精子結合，會生下男孩，而卵和 22 + X 的精子結合則會生下女孩（圖 2-11、表 2-3）。因此生男生女的機率皆為 1/2。

(a) 解釋機率概念

(b) 建立頻率機率的概念

圖 1　七年級自然與生活科技課本（郭重吉，2016：52、55）有關機率的概念

上述美國和英國的數學課程綱要，以及我國生物課程中的機率，皆是本研究可以在九年級第一學期進行「學前診測」與「自由擬題」活動的支持性證據，也是研究團隊做自發性機率概念研究的根據。

綜合本章所述，本研究提出的問題有二：

1. 透過機率學前診測，未經機率教學之九年級學生在解題活動中展現的自發性機率概念類型與層次為何？
2. 透過機率自由擬題，未經機率教學之九年級學生在擬題內容中展現的自發性機率概念類型與層次為何？

最後，建基於實證研究結果，本文對我國課程綱要在機率主題上之規劃、以及機率課程是否應較早開始，提出具體建議。

參、研究方法

為探究九年級學生之自發性機率概念，本研究運用兩種活動：機率學前診測與機率自由擬題，來分別收集學生在解題與擬題方面的實際資料。從解題活動獲得的資料，可以探究學生在教學前對現行課程之機率內容的解題能力；從擬題活動獲得的資料，可以探究學生在現行課程範圍之外所具備的機率自發概念。

活動完成之後，再以文獻探討中提出的機率類型和機率概念層次，作為分析學前診測試題與學生擬題的兩個向度，並搭配學前診測的解題表現，評判學生展現的自發性機率概念類型與層次，以對我國的機率課程提出建基於實證的規劃建議。

一、研究對象

本研究之田野設定在臺北市一間中型國民中學，全校約 20 多個班級。九年級面臨升學考試，願意接受研究的班級不多，故以方便取樣。我們在前述國中選取 A、B 兩個九年級班級的學生，實際參與活動者 A 班 30 人（男生 12 人，女生 18 人），B 班 29 人（男生 14 人，女生 15 人），共 59 人。

研究時程選在九年級上學期。現在（97 課綱）各版教材的機率內容都安排在九年級下學期，所以自發性機率概念的測量時機，可以選在八年級甚至七年級。儘管如此，為了保守評估學生之自發性機率概念，故選在九年級上學期收集資料。但九年級恰是學生面臨升學壓力之時，故活動的設計需要更為謹慎，以避免影響正規學習，也不因為額外壓力而影響收集資料的品質，詳述於下一小節。

二、活動設計與資料收集

（一）機率學前診測

本研究之「學前診測」的意義類似未告知學生而忽然執行的突擊測驗（pop-quiz），但不同的是：學前診測實施在教學前，而突擊測驗通常於教學過程中實施。但是學前診測又跟前測不同，前測通常會對應一個後測以檢視學習成效，而本研究並不安排後測。換句話說，「學前診測」是教學前的突擊測驗，也是沒有對應後測的前測，故其英文應為 pretest without posttest，但本文使用 pop-pretest。所謂「機率學前診測」是指一份測驗目標為機率概念的學前診測。學前診測的目的並非測試學生的機率知識與能力，而是期望從中獲得學生自發性機率概念的資料。本研究之學前診測，在九年級上學期的第二週，以彈性學習時間的一節課實施，學生事先毫不知情。學前診測由兩班學生的班級導師（同時也是數學教師）開場，說明測驗的意義。測驗中，導師及研究人員在教室內巡視，隨時鼓勵學生認真作答。收卷的方式，是請學生答畢舉手，由監試人員當面檢收。實際測驗時間約為 30 分鐘。

從機率學前診測活動收得 59 份答案卷，平均成績為 9.73 分，標準差 2.64 分。其中最高成績為滿分 15 分，最低為 4 分，而有 33 卷的成績高於平均，表示成績分布具有些微的負偏態。

（二）機率擬題

機率擬題安排在第五週，以連續兩節課的時間實施。為考量研究對象皆無自由擬題的經驗，故於第一節課集合兩班之學生，由 A 班導師以數位簡報（PowerPoint）展示範例並解說，歷時約 30 分鐘；接下來學生可以自由互相交談，然後在第二節課擬題。

前述自由擬題之範例來自前導研究（陳斐卿等人，2015）以小學四、五年級學生的擬題作品，示範題目如何與生活經驗結合，而非限定於課本或考卷之題型。它是 104-106 科技部計畫成果之正式出版品（陳斐卿、單維彰，2014），其內容具有很高的參考價值，亦是現場教師執行擬題活動時的參考範例（沒有年級的限制）。五年級與九年級在數學知識上有落差，九年級學生可從範例獲得擬題「型式」的啟發，五年級的範例題目沒有機率題目，不會在機率「內容」上受到暗示。

第二節課擬題的時間約為 45 分鐘。過程中，教師與研究人員不會指導學生任何機率知識。此外，為了盡可能連結學校課程，研究者之一（數學教授）在擬題活動兩週之後入班，以兩節課時間綜合講解擬題結果，讓學生有所收穫，作為下學期機率課程的前置經驗。

從機率擬題活動亦收得 59 份題目，平均字數為 83 字，標準差 48 字。其中最多 212 字，最少 9 字。將所擬之題依班級和座號之順序編碼，如 A 班 1 號編碼為 P1，依此類推，而 P31 恰為 B 班 1 號，最後一題為 P59。活動設計的流程與機率課程的相對關係，示如圖 2。

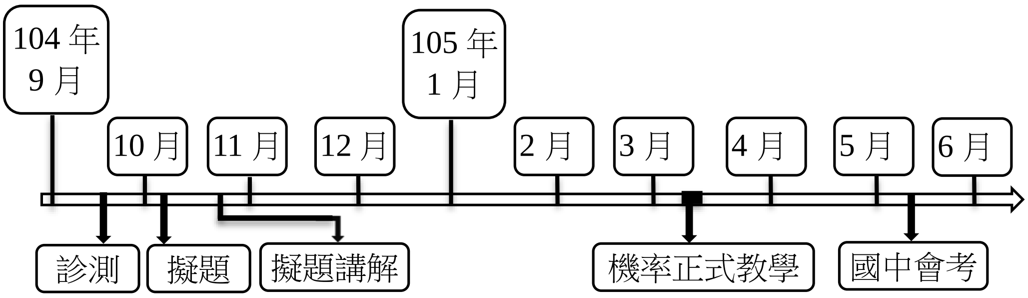


圖 2　機率自發性概念研究之活動流程與機率正式課程關係圖

三、研究工具

（一）機率學前診測之測驗卷

本研究之機率學前診測共有 15 題，依序記作 T1 至 T15。其中 T1—T4 為概念性的是非題，不需要計算；接著 2 題為概念性的填充題，不需要寫出過程；後面 T7—T15 是 9 道計算題，須寫出過程。測驗卷每題 1 分，滿分為 15 分。測驗題目的出處，包括近年基測、會考或符合 97 課綱之課本例題。為了利於分析學生的概念，針對少數題目，有題型上的更動，像是將選擇題轉換成是非題或計算題，或是將測驗目標較為多元的非選題轉換成簡答題，但是絕未變更題幹。僅有 T12 為了簡化問題使其聚焦於獨立性概念而修訂了題幹，如表 3。

表 3

學前診測試題T12之原題與改題對照

原題	改題
一袋子中有 4 顆球，分別標記號碼 1、2、3、4。已知每顆球被取出的機會相同，若第一次從袋中取出一球後放回，第二次從袋中再取出一球，則第二次取出球的號碼比第一次大的機率為何？【96 年基測一】	一袋子中有 4 個圓球，球上分別標記號碼 A、B、C、D。已知每一個球被取到的機會相等，若自袋中任取兩次球（一次一球，取後放回），則取出的兩球號碼依序是 A、B 的機率為何？

（二）分析規準：機率類型與機率概念層次

學前診測的題目和擬題的作品，都採用同一套分析規準，以比較學生在解題表現和擬題表現上，各自能呈現的概念類型與層次。因為擬題較能揭露自發性概念，不像解題相對受到題意的限制，所以用同一套分析類目比較解題和擬題之間的表現差異，有助於分辨兩者的差別。以下介紹兩個向度概念細項的分析規準。

1. 機率類型

本文採用 Shaughnessy（1992）所彙整之機率類型作為機率類型之概念細項（不含形式機率）。但是對於擬題作品，為使機率歸類更契合研究對象之表現，增加「沒有機率」細項。最後決定在分析擬題內容時，將「機率類型」分成四個細項：沒有機率、主觀機率、古典機率、頻率機率；而分析學前診測試題時，刪除「沒有機率」細項。各細項的定義和舉例，請見表 4。

表 4

「機率類型」向度之概念細項定義與舉例

概念細項	定義說明	題型舉例
沒有機率	不需要機率思維解題之題目	今有 100 顆蘋果，每小時吃 10 顆，試問 6 小時後剩下 30 顆之機率為何？
主觀機率	指一個事件發生的機率由某人決定，包括設計上的安排設定，或者根據相信的程度而猜測。	小明平時很常踩到狗大便，試問今天上學踩到大便的機率為何？
古典機率	假設樣本空間 S 中的每一個樣本出現機會均等，則事件 A 發生的機率 $P(A)$ $= \frac{n(A)}{n(S)}$，其中 $n(*)$表示樣本個數。	擲公正骰子 1 次，出現點數為奇數的機率為何？
頻率機率	由觀察重複試驗之相對次數而來，用實驗設計之觀察結果當作事件發生的機率。	某工廠試做一天，生產 1 萬件玩具，該工廠品管部對當天生產的每件玩具做不良品測試，發現 400 件不良品。以後該工廠每天正式生產 10 萬件玩具，試問依此測試結果，預估此工廠生產不良玩具的機率為何？

以下舉一例說明規準之使用。擬題 P11：「誠凜高中即將對戰洛山高中。誠凜派出先發 5 人，火神、黑子、木吉、日向、依月。洛山則派出赤司、葉山、根武谷、實洲、黛千尋這 5 人上場。若火神在前 30 分鐘就進入 zone 的機率為 15%，最後 10 分鐘才進入 zone 的機率為 90%。請問火神在最後 20 分鐘能進入 zone 的機率是多少？」此題是相當好的生活（漫畫）情境題，反應學生對不確定現象的複雜直觀。

題目並未交代 15%和 90%這兩個機率數據的來源，而題目的情境顯然不屬於古典類型：因為「進入」和「不進入」的發生可能並不均等。在真實世界，上述數據可能來自過去歷次比賽的統計，也就是頻率機率。可是此題的情境是想像的，而非真實世界，所以更可能是動漫或遊戲設計者規定的。在此考量之下，此題歸類為主觀機率類型。

2. 機率概念層次

本研究調整 Jones 等人（1997, 1999）的機率情境向度，參照 Bognár 與 Nemetz（1977）對青少年機率概念發展的研究，以及我國近年機率課程之安排（含高中階段），決定將「機率概念層次」分成四個細項：單一事件、複合事件（餘事件、和事件、積事件）、獨立性、條件機率。因為概念的發展經常是漸進的，所以機率概念層次向度的各概念細項並沒有互斥性，反而有層

層包含的關係，例如餘事件包含單一事件，而獨立性又包含餘事件。各細項的定義和舉例，請見表 5。

表 5

「機率概念層次」向度之概念細項定義與舉例

概念細項	定義說明	題型舉例
單一事件	問題中僅涉及一個事件。	擲公正骰子 1 次，出現點數為奇數的機率為何？ 小明平時很常踩到狗大便，試問今天上學踩到大便的機率為何？
複合事件	涉及事件及其餘事件的機率，或者需考慮兩事件之交集或（互斥的）聯集。	今天有抽獎活動，分為頭獎、二獎與普獎，抽中頭獎的機率是 0.4，二獎與普獎的機率相等，試問抽中普獎之機率為何？
獨立性	兩事件互不影響時，各自或皆同發生的機率。	一對夫妻，第一胎生男嬰，試問第二胎再生男嬰之機率為何？
條件機率	兩事件彼此影響時，已知其一的前提下，求其二發生的機率；或求二者先後發生的機率。	企鵝班有 45 人，國文考試及格率為 60%，其中有 14 人數學亦即格，試問在國文及格的人中，隨機抽出一位學生，數學及格者之機率為何？

沿用前面的擬題 P11 作為此向度之規準使用範例。此題難以運用國中階段的知識解決，但研究者依據我國高中階段的機率知識，賦予可解的條件：假設比賽每節 10 分鐘，火神在前三節各節進入 zone 的機率相等，每場比賽僅能進入一次。然後，運用複合事件與條件機率概念，可得火神在最後 20 分鐘進入 zone 的機率約為 81%。因為機率概念的細項層層包含，本研究選其最高層次代表此向度，是故此題被歸類在條件機率層次。

（三）學前診測試題的雙向類目表

為了從學前診測試卷的各題答對率，分析學生在解題活動表現的自發性概念，在此將試題按照前述規準分類至雙向類目表，如表 6。分析的信度與效度，詳於後面第五小節。結果顯示學前診測的試題以單一事件的古典機率為主，這固然是選題來源的限制所致，但也符合本研究之目的所需。

表 6

機率學前診測之雙向類目表

	單一事件	複合事件	獨立性	條件機率	總計
主觀機率	T1	---	---	---	1
古典機率	T2、T3、T4、T5、T6、T7、T8、T9、T10、T11、T13、T14	---	T12	---	13
頻率機率	T15	---	---	---	1
總計	14	0	1	0	15

屬於主觀機率與頻率機率的學前診測試題，分別出自依據 83 年課程標準和 89 年暫行綱要的試題，它們不在現行課程綱要的範圍內。因為民國 94 年是接受九年一貫一綱多本課程學生之第一次參與基測，所以教育部（2005）特別審慎地提前公佈了參考題本，以下是這兩題的題目。

（T1）投擲一枚圖釘，釘尖朝上、朝下的機率一樣。（是非題）【92 年基測一】

（T15）某工廠連續五天、每天生產100件玩具，該工廠品管部對當天生產的每件玩具做不良品測試，下圖為五天內所測試的結果[圖略]。以後該工廠每天正式生產1000件玩具，試問依此測試結果，預估此工廠生產不良玩具的機率為何？（計算題）【94年基測參考題本】

四、資料分析

（一）機率學前診測

根據研究對象在學前診測試題的答對率，以及試題所屬的機率類型與概念層次，將可探討學生在未經正式機率課程前，解決機率問題的能力狀態。每一題答對人數除以受測人數，定義為該題之答對率；屬同一類目的各題平均答對率，定義為該類目的答對率。

（二）機率自由擬題

為了從研究對象的自由擬題內容，分析學生的自發性機率概念，研究者先按照機率類型規準，將題目 P1—P59 分類。以下透過六個例子，呈現如何根據擬題內容進行機率類型與機率概念層次的分類。

1. 古典機率類型與單一事件概念層次

一副撲克牌有54張牌，如果不算鬼牌，以亂洗的方式把牌一一排在桌子上，那要抽出兩張數字一樣但花色不一定一樣的牌，機率有多少？（P6）

此題內容即以有限母體與事件所組成，鬼牌以外的 52 張牌為母體數量，從題意可以窮舉事件的數量，而計算機率。

2. 主觀機率類型與單一事件概念層次

> 有一天，老皮走在路上，錢幣不小心掉了出來，已知水溝蓋洞口的寬度分別為2cm、2mm，錢幣的直徑為1.8cm，厚度為1.8mm，請問錢幣掉進水溝概的機率是多少？（P52）

本題在真實的生活情境中呈現不確定現象與機率概念，但此題不符合古典機率的前提，也沒有多次試驗的結果可查詢，所以僅能依照經驗或是個人信念作答，屬於主觀機率。

3. 頻率機率類型

> 人類的細胞有23對46條染色體，請問細胞少一條或多一條的機率？當父親或母親其中一方患有唐氏症。（P31）

本題內容雖然不夠專業，但明顯屬於遺傳疾病的科學情境，學生可能在七年級生物課學過。因為唐氏症（染色體異常）並非完全由遺傳而來，也沒有演繹的估算方法，僅能根據醫學與公衛文獻中的發生次數予以估計，因此屬於頻率機率。又因為唐氏症有自發（突變）機率，而受父親或母親遺傳影響的程度也不同，所以此題的概念層次屬於條件機率。

4. 複合事件概念層次

> 六福村為中秋舉辦票價優惠方案，凡身份證字號號碼內有2個2以上，票價為200。902班班上有30人為（台北市人），男生有14人，女生有16人，班上準備班遊去六福村。請問能得優惠價200元的人機率為多少？（P41）

此題不是問班上有人獲得優惠的機率，而是問遊客獲得優惠的機率為何，所以其實與男生和女生的人數無關。因為女生的身分證字號第一位數必定是 2，所以獲得優惠的機率與性別有關，但評分者會商後，判定學生未必知道前述事實，所以此題的旨趣無關於條件機率。此題聲明「兩個 2 以上」獲得優惠，顯示擬題者應該是從負面列舉來思考的：扣除身分證後 8 碼沒有 2 或僅有一個 2 的情況，所以研究者將此題的概念層次定為複合事件；更精確地說，是餘事件。

5. 獨立性概念層次

> 瓶蓋抽獎活動，假如一箱有100罐，那河馬要買幾罐中獎機會才會是23%？（P2）

此題雖然條件不足，但學生欲表達的不確定現象，卻相當清晰。若補上每箱有 5 罐中獎且發生在每一罐的機會均等之前提，則此題可解。解題過程雖然需要餘事件概念，但是「*n* 罐皆不

中獎」的機率就需要獨立性概念了，所以此題的概念層次定為獨立性。

6. 沒有機率概念

> 阿公今天的頭髮有84%是黑的，其餘皆為白的，他每天掉325跟頭髮，黑白掉得機率一樣，今天他發了一頓大脾氣，比平常多掉了70根，這70根其中有56%是白髮，已知阿公今天00:00有7800根頭髮，則阿公明天的00:00有多少根頭髮？明天阿公掉320根頭髮的機率是？（P37）

此題相當精緻，學生雖然寫出「機率」一詞，卻沒有意識到根據條件可以算出確定的結果，並不涉及機率思維。學生嘗試擬出一道包含機率思維的題目，可是表現出來的卻是未能辨識不確定現象。

五、信度與效度

（一）機率學前診測試題品質

機率學前診測之試題，有 10 題選自民國 92 年至 104 年之間的國民中學學生基本學力測驗（含 94 年參考題本）與國中教育會考，有 5 題選自符合 97 課綱之 104 年版國中數學課本（三個版本），所以試題品質皆具國家考試的水準，或經由教科書審查通過。

（二）機率學前診測與自由擬題的題目分類

本研究以機率類型和機率概念層次兩個向度，將學前診測之試題與自由擬題的題目予以分類，結果如表 6 和表 10，此處敘述分析的信度與效度。此分析以「題」為內容之最小單位，分為學前診測試題 15 題，與學生擬題 59 題。由於題目屬於質性資料，為避免分類的疏漏，故邀請三位具備數學專業者參與評分：大學教授 A、博士生 B、碩士生 C。分類過程經歷 6 次討論，每次 2 小時。

（三）確立分析架構

依據機率類型與機率概念層次，建立機率雙向類目表，共有 12 項類目。分析的程序是：將研究樣本的「題」加以編碼，根據前述規準，紀錄在機率類型與機率概念層次表格上，其中機率類型之概念細項保持互斥，但機率概念層次之概念細項為有序性層次，而以最高層次做歸類。每道「題」只屬於唯一類目。

（四）建立評分者信度

將機率類型、機率概念層次各概念細項之定義與規準發給每位評分者，並說明分類的原理與方法。各評分者對「題」進行分類。若初步發生不同的歸類，則邀請評分者彼此討論與溝通，

然後再次歸類。本研究使用評分者一致性信度檢驗（余民寧，2011）。對於學前診測試題，機率類型之信度為 0.98，機率概念層次之信度為 0.96；對於學生擬題，機率類型之信度為 0.96，機率概念層次之信度為 0.94，詳見表 7。可見最後的分析結果皆達到高度一致性。

表 7

機率學前診測與自由擬題的評分者信度表

			機率學前診測		
評分者	A	B	評分者	A	B
B	1		B	0.93	
C	0.93	0.93	C	0.87	0.87
機率類型之平均相互同意值	P = 0.95	R = 0.98	機率概念層次之平均相互同意值	P = 0.89	R = 0.96
			機率自由擬題		
評分者	A	B	評分者	A	B
B	0.92		B	0.85	
C	0.88	0.85	C	0.83	0.80
機率類型之平均相互同意值	P = 0.88	R = 0.96	機率概念層次之平均相互同意值	P = 0.83	R = 0.94

（五）建立效度

本研究根據文獻理論與教學實務經驗，建構雙向類目表的概念細項。分類過程中，採用三角校正以避免研究者主觀意識影響結果。若遇到歸類有疑慮時，則進行思考定義與討論，進而達成共識。經由上述程序，達成資料分類之專家效度，使得後續的分析與解讀，能夠更客觀公正。

肆、研究結果

一、學前診測呈現的自發性概念

依據學前診測試題在雙向類目表的分佈（表 6），15 道試題僅分布在 4 個類目之內，故表 8 僅呈現這些類目的答對率。學前診測試卷共有 12 道單一事件的古典機率問題，表 8 顯示研究對象對於這些試題展現七成以上的平均答對率。表 8 之中主觀機率、獨立性與頻率機率這三個類目，各僅有一道試題，而平均答對率依序為 60%、12%和 44%。

表 8

機率學前診測各類目試題之答對率

答對率	主觀機率	古典機率	頻率機率
單一事件	60%	72%	44%
獨立性	---	12%	---

二、自由擬題呈現的自發性概念

研究對象之自由擬題內容，在機率類型的分析結果如表 9。表 9 顯示接近六成學生在擬題內容展現古典機率概念，並有超過三成半學生擬出具有主觀機率概念的題目，但是僅有 1 題被歸類為頻率機率。

表 9

機率自由擬題之類型分布

機率類型	沒有機率	主觀機率	古典機率	頻率機率	總計
題數	3	21	34	1	59
百分比	5%	36%	57%	2%	100%

59 道擬題之中，有 3 題被判定沒有機率，故不討論它們的機率概念層次。將含有機率概念的 56 道擬題，分類至雙向類目表的結果如表 10。表 10 顯示有 77%的擬題內容屬於單一事件概念層次，有 21%達到或超過獨立性概念層次，但是僅有 1 題恰屬於複合事件概念層次（P41）。有些擬題具備餘事件、互斥和事件的概念，例如前面介紹過的 P11 和 P31，但是因為含有更高的概念，所以被分類在條件機率。

表 10

機率擬題之雙向類目表（已扣除沒有機率的三題）

	單一事件	複合事件	獨立性	條件機率	總計
主觀機率	18	0	2	1	21
古典機率	25	1	7	1	34
頻率機率	0	0	0	1	1
總計	43	1	9	3	56
百分比	77%	2%	16%	5%	100%

三、學前診測與自由擬題呈現的自發性概念之異同

透過學前診測與自由擬題兩種途徑，機率的自發性概念有若干相同之處。學前診測結果顯示，未正式學習機率課程的九年級學生，超過七成能夠解出古典機率的單一事件問題，有六成

答對主觀機率問題。事實上，高分組學生（學前診測成績在前 27%者）在此類目試題的答對率甚至超過九成。擬題類型也呈現類似的發現：有 93%的研究對象能夠想像主觀機率與古典機率，並能在情境中想像它們的應用。在含有機率概念的擬題中，有超過七成的擬題內容屬於單一事件。

以上數據表明，未經正式機率課程的九年級學生，不論在傳統試題的解題或者在自我展現的擬題上，都顯示大致具備主觀機率與古典機率的概念，也大多具備解決單一事件機率問題的能力。

不論從解題還是擬題的資料來看，研究對象都顯得缺乏頻率機率的認知：學前診測的一道頻率機率試題，未達一半的答對率；而擬題活動也僅有一題被歸類為頻率機率。此結果表示，未獲教導前，較難自發產生頻率機率的概念。

透過學前診測與自由擬題兩種途徑，機率的自發性概念也有若干不同之處。因為機率學前診測的試題原則上來自基測與會考，所以在機率概念層次上顯得侷限。但是研究對象在自由擬題時，卻展現出多層次的機率概念。雖然單一事件的概念層次佔了擬題內容的大多數，但還是有 24%呈現更高的概念層次：複合事件、獨立性與條件機率。學生表現的最高自發機率概念層次，可達條件機率，但是就數量而言並不普遍（僅 5%）。

根據擬題內容的分析，本研究認為一般的九年級學生有可能自發地理解機率的獨立性概念。學前診測結果顯示學生缺乏解決獨立性機率問題的能力，但是此結果與前述結論並不矛盾，學生可能在教學之後，便能解決獨立性的機率問題。

四、小結

根據機率「學前診測」與「自由擬題」兩項活動所收集之資料的分析結果，本研究發現：尚未正式學習機率課程的九年級學生，已經自行發展了主觀與古典類型的機率概念，但沒有顯示頻率機率的概念。研究對象幾乎都具備單一事件的概念層次，雖然最高可達條件機率層次，但較易達到獨立性層次。

在研究方法上，自由擬題確實可以用以探究自發性概念，且能發覺更多質性的提示。若搭配學前診測，則有機會針對同一項學習目標，分辨概念理解和程序執行的不同層次。

綜而言之，本研究發現未經正式機率課程的九年級學生：

1. 大致具備主觀機率與古典機率之機率類型概念；
2. 也大致具備處理單一事件問題的機率概念層次；
3. 頻率機率之概念薄弱；
4. 很可能具備獨立性層次的機率概念，但是沒展現解決獨立性問題的能力；
5. 部分學生能夠達到條件機率概念層次；

6. 很少呈現恰處於複合事件層次的概念。

伍、結論與建議

本文自發性機率概念的研究結果顯示，九年級開學初期的學生，就已經大致掌握了現行九年級下學期的機率內容：古典類型的單一事件機率課程。所以，現行課程規劃雖然有減輕學習壓力的優點，但是在配合學生認知發展的妥適性，以及在數學支持其他學科學習和解決生活問題的素養目標方面，都值得商榷。本研究獲得的結果，不違背 Piaget 與 Inhelder（1975）以及 Bognár 與 Nemetz（1977）的認知發展與適學年齡研究，顯示古典機率之單一事件內容，至少可以提前至八年級學習。

但是機率概念不只有古典機率這一種。臺灣的數學課程偏重古典機率，雖然它具有「正確答案」與「數學嚴謹」的好性質，但是仍然值得提供學生其他機率類型之學習經驗。前一段引述的兩份機率概念認知發展文獻，以及我國過去的機率課程規劃，都包含主觀機率與頻率機率。

在學生創造的擬題中，我們觀察到主觀機率與古典機率的有意義搭配。主觀機率不僅用於評估可能性，也用於設計。從學生的擬題中，我們看到商業、電玩或動漫情境，例如前面介紹過的 P2、P11、P41 等。在這些客觀資訊不足的不確定情境裡，古典機率只能提供部分資訊，必須彌補主觀機率才能完整地解決問題或者做出理性的猜測。既然本研究已經表明學生自發地具有主觀機率概念，而且自然地搭配古典機率使用，所以若在課程中予以支持和導引，應可發揮事半功倍的效果。

關於獨立性，本研究顯示九年級學生缺乏解決獨立性機率問題的方法，但是並不缺乏獨立性的概念。因為解題的方法僅為機率相乘，所以缺乏的關鍵也不是計算，而是對於獨立性的概念理解。學生的擬題表現（如表 10），搭配 Bognár 與 Nemetz（1977）指出十三至十四歲可辨識獨立（independent）或相關（correlated）的實驗或事件，本研究認為九年級學生已經準備好獨立性機率概念的學習。當學生在熟悉的獨立性情境之下，學習了獨立性的機率概念和計算原理，就能具備解題的方法了。

此外，表 10 的分析顯示：將複合事件安排在獨立性之前，很可能是不自然的，不符合學生的認知發展。事實上，Jones 等人（1999）的三年級機率概念細項並沒有「複合事件」（表 1），Bognár 與 Nemetz（1977）對青少年的機率概念認知發展研究，也沒有特別述及一般性的複合事件；此外，Watson（2005）回顧 6 至 9 年級學生機率思維的研究文獻，也指出複合事件的困難性以及它通常需要伴隨獨立性的概念。本研究將複合事件列入概念細項，並且將它列在獨立性之前的理由，是為了搭配我國傳統的高中階段機率課程規劃。然而，從表 10 可知：幾乎沒有恰好處於和事件、積事件概念層次的擬題。證據顯示九年級學生可能會先發展餘事件與獨立性的

概念，而一般性的複合事件，對他們來說反而可能比較困難。

根據本研究發現的結論，作者建議將現行九年級的機率課程移到八年級，九年級可以進行「獨立性」與複合事件之中「餘事件」的學習。但是九年級的機率教學不宜包含一般的複合事件，即所謂和事件與積事件，因為「餘事件」是語言上容易理解的概念，並不需要先理解「差集」和「補集」之一般性集合概念，更不需要集合運算（聯集、交集）的先備知識。此外，本研究雖然顯示部分學生能夠達到條件機率概念層次，但證據不足以顯示學生準備好在九年級學習條件機率。綜合而言，本文建議臺灣的機率課程學習內容宜規劃如下：

1. 六年級：主觀機率的概念及生活中的應用。
2. 八年級：單一事件概念層次的主觀機率與古典機率。
3. 九年級：餘事件與獨立性，並在真實情境中學習兩種機率類型的搭配運用。
4. 十年級：條件機率與一般性的複合事件。

在未來工作方面，本研究發展的「機率類型」與「機率概念層次」兩向度之分析規準，應有助於分析機率課程與教學的設計與實施，但是「複合事件」的適當位置，還有待更精緻的釐清。而自發性概念的研究，有助於適學年齡的探索，也可以作為課程規劃的參考，值得持續關注。

雖然 Piaget 與 Inhelder（1975）認為形式運思期的青少年能具備頻率機率概念，但本研究顯示頻率機率較難由直觀而發生。這或許意味著：若無教導，學生難以自行發覺統計數據可以當作機率使用。但是頻率機率確有實用及學理上的重要性，實應納入學習目標。關於頻率機率的教學內涵與課程規劃，應為值得研究的問題。

本研究認為九年級可進行獨立性的教學，但並不是將高中教材提前到國中實施的意思。適合國中階段的機率表徵之一，應為「在樹枝上記錄機率的樹狀圖」（許哲毓、單維彰、劉柏伸，2016）。此表徵可提供解決獨立性機率問題所需的算法，並且不需要先學習集合概念。國外教科書的比較研究，以及國內的教學實驗，將有助於確認這種表徵的教學效果。

最後，本研究保守地選擇九年級上學期的學生作為研究對象，而且因為是初步探討，故研究對象的人數與地域性都較為侷限。又或許因為自由擬題與學前診測的時間靠近，使得診測的試題或許對擬題產生提示效應，導致擬題內容以古典機率類型為最大多數，都是本研究的限制。

謝誌

本文感謝科技部計畫（透過自由擬題活動提升數學學習的投入度，計畫編號：104-2511-S-008-002-MY2）經費補助，亦感謝審稿委員以及編輯委員之寶貴建議。

參考文獻

余民寧（2011）。**教育測驗與評量：成就測驗與教學評量**（第三版）。臺北：心理。【Yu, Min-Ning (2011). *Educational testing and assessment* (3rd ed.). Taipei: Psychological. (in Chinese)】

林陳涌（主編）（2014）。**國際數學與科學教育成就趨勢調查 2011 國家報告**。取自 http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2011/downloads/t1.pdf【Lin, Chen-Yung (Ed.) (2014). *TIMSS 2011 national report*. Retrieved from http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2011/downloads/t1.pdf (in Chinese)】

林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。**十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究報告**（計劃編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12）。新北：國家教育研究院。【Lin, Fou-Lai, Shann, Wei-Chang, Lee, Yuan-Shun, & Cheng, Chang-Hua (2013). *Research report on the lead study of curriculum contents in mathematics for the 12-year basic education* (Project no.: NAER-102-06-A-1-02-03-1-12). New Taipei: National Academy for Educational Research. (in Chinese)】

翁秉仁（2016）。小朋友適合學機率嗎？**科學人**，**170**，26-27。【Ong, Ping-Zen (2016). Can children learn probability? *Scientific American*, *170*, 26-27. (in Chinese)】

教育部（1964）。**高級中學生物、化學、物理教材編輯大綱及數學教材大綱**。臺北：正中。【Ministry of Education. (1964). *Syllabus and teaching materials for high school's biology, chemistry, physics and mathematics.* Taipei: Cheng-Chung. (in Chinese)】

教育部（1971）。**高中數學課程標準**。臺北：正中。【Ministry of Education. (1971). *Mathematics curriculum standards for high schools*. Taipei: Cheng-Chung. (in Chinese)】

教育部（1975）。**國民小學課程標準**。臺北：正中。【Ministry of Education. (1975). *Curriculum standards for elementary schools*. Taipei: Cheng-Chung. (in Chinese)】

教育部（2005）。**國中九年一貫課程實施成效與基本學力測驗辦理情形專案報告**。臺北：作者。【Ministry of Education. (2005). *Report on the effectiveness of grade 1-9 curriculum and the preparation of the basic competence test for junior high school students*. Taipei: Author. (in Chinese)】

許哲毓、單維彰、劉柏伸（2016）。**樹狀圖在機率教學的應用──臺灣與英國教科書之比較**。論文發表於國立臺灣大學舉辦之「第四屆師資培育國際學術研討會」，臺北市。【Hsu, Che-Yu, Shann, Wei-Chang, & Liu, Bo-Shen (2016). *Application of tree diagram in probability teaching – A comparison of mathematical textbook in Taiwan and the United Kingdom*. Paper presented at The 4th International Conference on Teacher Education Focusing on Teaching Methods and Materials, National Taiwan University, Taipei. (in Chinese)】

郭重吉（主編）（2016）。**自然與生活科技**（三版，第二冊，七下）。臺南：南一。【Guo, Chorng-Jee (Ed.) (2016). *Science and technology* (3rd ed., vol. 2, grade 7). Tainan: Nani. (in Chinese)】

陳冒海（1989）。我國國民中學數學課程之發展。**教育資料集刊**，**14**，157-194。【Chen, Mao-Hai (1989). The development of mathematics in Grade 9-11. *Bulletin of Educational Resources and Research*, *14*, 157-194. (in Chinese)】

陳斐卿、江家瑋、張鐵懷、黃佩岑、單維彰（2015）。數學自由擬題之設計與評量——一個合作的取徑。**科學教育學刊**，**23**（2），1-26。doi: 10.6173/CJSE.2015.2302.04【Chen, Fei-Ching, Chiang, Chia-Wei, Chang, Tieh-Huai, Huang, Pei-Tsen Belle, & Shann, Wei-Chang (2015). The design and evaluation of free math problem posing: A collaborative approach. *Chinese Journal of*

Science Education, *23*(2), 1-26. doi: 10.6173/CJSE.2015.2302.04 (in Chinese)】

陳斐卿、單維彰（2014）。**中平國小學生自由擬題作品集**。取自 http://shann.idv.tw/articles/fpp_exmp.pdf【Chen, Fei-Ching, & Shann, Wei-Chang (2014). *Students' portfolio of free math problem posing in Chung Ping Elementary School*. Retrieved from http://shann.idv.tw/articles/fpp_exmp.pdf (in Chinese)】

單維彰、許哲毓（2014）。**TIMSS 1999-2011 機率試題**。取自 http://shann.idv.tw/articles/TIMSS_Probab_1999-2011.pdf【Shann, Wei-Chang, & Hsu, Che-Yu (2014). *TIMSS 1999-2011 probability items*. Retrieved from http://shann.idv.tw/articles/TIMSS_Probab_1999-2011.pdf (in Chinese)】

劉秋木（1996）。**國小數學科教學研究**。臺北：五南。【Liu, Chiu-Mu (1996). *Study on the teaching of mathematics in elementary schools*. Taipei: Wu-Nan. (in Chinese)】

謝佩宜（2008）。**運用潛在類別分析國小六年級生機率概念表現之縱貫研究**（未出版之碩士論文）。國立臺中教育大學，臺中市。【Hsieh, Pei-Yi (2008). *A longitudinal study on children's probability concepts basing on latent class analysis model* (Unpublished master's dissertation). National Taichung University of Education, Taichung. (in Chinese)】

Amir, G. S., & Williams, J. S. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(1), 85-107. doi: 10.1016/S0732-3123(99)00018-8

Azlina, N., Amin, S. M., & Lukito, A. (2018). Creativity of field-dependent and field-independent students in posing mathematical problems. *Journal of Physics: Conference Series*, *947*, 012031. doi: 10.1088/1742-6596/947/1/012031

Bognár, K., & Nemetz, T. (1977). On the teaching of probability at secondary level. *Educational Studies in Mathematics*, *8*(4), 399-404. doi: 10.1007/BF00310944

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 37-55. doi: 10.1007/s10649-012-9441-7

Borovcnik, M., Bentz, H. J., & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia, & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-71). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-011-3532-0_2

Cai, J., & Jiang, C. (2017). An analysis of problem-posing tasks in Chinese and US elementary mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(8), 1521-1540. doi: 10.1007/s10763-016-9758-2

Cohen, J., & Hansel, M. (1956). *Risk and gambling: The study of subjective probability*. London, UK: Longmans, Green & Co.

Common Core State Standards Initiative. (2010, June 2). *Introduction to the common core state standards*. Washington, DC: Common Core State Standards Initiative. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/ccssi-introduction.pdf

Department for Education. (2014, December). *The national curriculum in England: Key stages 3 and 4 framework document*. Retrieved from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/381754/SECONDARY_national_curriculum.pdf

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel. doi: 10.1007/978-94-010-1858-6

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Jones, G. A., Langgrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 101-125. doi: 10.1023/A:1002981520728

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., & Tarr, J. E. (1999). Understanding students' probabilistic reasoning. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12: 1999 Yearbook* (pp.146- 155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47201-5_7

Leung, S. K. S. (2016). Mathematical problem posing: A case of elementary school teachers developing tasks and designing instructions in Taiwan. In P. Felmer, E, Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.). *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (pp.327-344). Cham, Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-28023-3_19

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children* (L. J. Leake, P. D. Burrell, & H. D. Fischbein, Trans.). London, UK: Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1951)

Şengül, S., & Katranci, Y. (2012). Problem solving and problem posing skills of prospective mathematics teachers about the 'sets' subject. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 69*, 1650-1655. doi: 10.1016/j.sbspro.2012.12.111

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 465-494). New York, NY: MacMillan.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics*, *8*(3), 295-316. doi: 10.1007/BF00385927

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: Looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 157-162. doi: 10.1007/s10649-013-9477-3

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education: Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 518-525). Melbourne, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 145-169). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/0-387-24530-8_7