

計畫編號

NAER-102-06-A-1-02-03-1-12

國家教育研究院

「十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究」整合型研究

子計畫三

十二年國民基本教育數學領域 綱要內容之前導研究

研究報告

研究主持人：林福來教授（國立臺灣師範大學）

共同主持人：單維彰教授（國立中央大學）

李源順教授（臺北市立大學）

鄭章華助理研究員（國家教育研究院）

研究助理：林欣毅（國家教育研究院）

兼任助理：盧彥佑（國家教育研究院）

研究期程：民國 102 年 7 月至民國 102 年 12 月

執行單位：國家教育研究院

中華民國 102 年 12 月

目次

第一章 緒論	1
第一節 研究背景.....	1
第二節 研究目的與問題.....	1
第二章 文獻探討	3
第一節 現行數學領域課程實施相關問題.....	3
第二節 重大議題.....	11
第三節 國際發展趨勢.....	14
第三章 研究設計與實施	28
第一節 研究過程.....	28
第二節 研究方法.....	28
第三節 研究架構.....	29
第四章 結果與討論	30
第一節 數學領域的理念與目標.....	30
第二節 數學領域的內容、組織與表述方式	33
第三節 數學領域學習內容修改建議.....	34
第四節 數學領域與社會重要議題之融入模式	48
第五章 結論與建議	49
第一節 結論.....	49
第二節 建議.....	50
參考文獻	52
附錄一 數學領域之理念與目標	54
附錄二 領域時數/學分數及學習內容	59
附錄三 歷年課程綱要的內容表述方式	67

第一章 緒論

本章闡述此研究工作的背景、目的、以及待答問題。

第一節 研究背景

數學課程理應配合國家需要、社會變遷與教育心理學的知識而演變。從 1957 年蘇聯發射「史潑尼克一號」人造衛星，到 2013 年中國的「嫦娥計畫」登陸月球，客觀上我們身處的環境發生了巨大的變化，主觀上人們對於國民教育的認知與數學在教育中的角色，也逐漸轉變。最具體的發展，就是十二年國民基本教育的施行。這是自民國 57 年實施九年國民義務教育以來，我國最劇烈的教育制度變革。課程綱要是支撐這項制度變革的主要基石，為了搭配民國 102 年進行的總綱研擬計畫，並籌備民國 103 年將啟動的領域綱要研修工作，而產生了本數學領域綱要的前導研究。

從數學教育改革的歷史來看，東亞的數學教育似乎受到美國教育改革的影響，被批評為太過西方化甚至是美國化（黃毅英、韓繼偉、李秉彝，2005）。值得注意的是，臺灣的數學教育界已開始反思全盤移植美國經驗的適當性（劉柏宏，2004）。值此十二年國民教育改革全面啟動的時刻，其理念在於「適性揚才，成就每一位孩子的學習」，著重培養學習者的核心素養，適性開展潛能，進而能運用所學，成為自發主動的終身學習者（國家教育研究院，2013）。要如何將十二年國民教育改革的理念落實到數學教育呢？國際間的數學課程固然可以做為借鏡，但臺灣的數學課程應該基於臺灣數學教育的特殊性與需要，以及實證研究的結果，建構出提昇學生數學素養的課程，為我們的下一代在多元與快速變遷社會，面對可能的競爭與挑戰，做好準備。

由於九年一貫課程綱要、高中與高職課綱的訂定，是由不同委員會在不同時空背景進行，當初並沒有十二年一貫的理念、目標、內容與能力主軸的設計，其呈現的格式也各有特色。然而，課程一貫的理念與設計似乎可以合理地從九年一貫延伸至十二年一貫（陳宜良、單維彰、洪萬生與袁媛，2005）。本研究擬從十二年一貫的大方向與視野，切入檢視與檢討現行中小學數學課程內容的安排，藉由分析數學課程文獻與諮詢數學教育學者、數學家和數學教師等人的意見，為十二年國教數學課程的理念與目標、內容組織與表述方式提出建議。

第二節 研究目的與問題

- 一、探究十二年國民基本教育數學領域的課程架構、理念與目標。
- 二、探討現行中小學數學課程內容需要增刪之處。
- 三、探究十二年國民基本教育數學領域的學習階段以及學習內容組織方式。

根據以上的研究目的，本計畫欲解答的研究問題如下：

- 一、基於十二年國民基本教育核心素養培養的理念與世界各國數學課程的目標，數學領域的課程架構、理念與目標為何？
- 二、考量世界各國數學課程的安排與未來升學、生活的需要，現行中小學數學領域內容是否有內容過量、不足或重覆的問題？若有，其內容為何？修改之建議為何？
- 三、參考世界各國數學課程的做法，為達成核心素養培養的理念，數學領域的學習階段與學習內容的組織方式為何？

第二章 文獻探討

本章旨在探討現行十二年國民基本教育的理念與目標、歷年數學領域課程綱要、以及國際上課程綱要的趨勢，做為本研究提出十二年國民基本教育課程綱要內容的參考資料。

第一節 現行數學領域課程實施相關問題

本節首先探討十二年國民基本教育的理念與目標，以及歷年數學領域課程綱要相關內容。旨在從歷史的回顧中，鑑往知來，引發構思未來一、二十年的可能數學構念。

壹、十二年國民基本教育

我國自 1968 年（國家教育研究院，2013）實施九年國民義務教育以來，迄今已超過 40 年，早已為我國人才培育奠定良好基礎。近年來為了因應社會需求與時代潮流，2003 年 9 月「全國教育發展會議」達成「階段性推動十二年國民基本教育」之結論，將高中、職及五專前三年予以納入並加以統整，藉以進一步提升國民素質。總統於 2011 年元旦祝詞宣示啟動十二年國民基本教育。當年 9 月行政院正式核定「十二年國民基本教育實施計畫」，明訂 2014 年 8 月 1 日全面實施。在課程綱要（教育部十二年國民基本教育網站，2013）的實施方面，2014 年發布課程總綱、2016 年發布學習領域/學科/群科綱要。

以下簡述十二年國教課程總綱的基本理念與課程目標，以及國民素養專案計畫中，關於數學素養的主張。

一、基本理念與課程目標

國家教育研究院（2013）經過一連串的研究與公聽會，提出十二年國民基本教育課程本於「自發」、「互動」及「共好」之理念，以學生學習為關注核心，強調學生是自發主動的學習者，從而妥善開展人與他人、人與社會、人與自然的各種互動關係，從而致力個體生命、他人生命與自然環境之間的互惠及共好。

準此，十二年國民基本教育課程係以「成就每一位孩子～適性揚才·終身學習」為課程願景。意在使課程以生命主體的開展為起點，透過學習者的核心素養培養、身心健全發展，讓潛能得以適性開展、品德得以涵養，進而能運用所學、善盡責任，成為學會學習的終身學習者，以使個人及整體的生活、生命更為美好。並訂定四項課程目標，分別為啟發生命潛能、陶養生活知能、促進生涯發展、涵育公民責任。

二、核心素養

為落實十二年國民基本教育課程的理念與目標，期望以「核心素養」做為課程發展之主軸。「核心素養」是融合認知、技能和情意，經內化後的綜合表現，它

能幫助學生積極回應個人的及社會的生活需求，迎接現在與未來的挑戰。「核心素養」較「基本能力」與「學科知識」涵蓋更寬廣的教育內涵，強調學習不宜以學科知識為限，而應關注學習與生活的結合，透過實踐力行而彰顯學習者的全人發展。

核心素養係強調培養以人為本的「終身學習者」，分為三大面向：包括「自主行動」、「溝通互動」、「社會參與」。包括九大項目：以及「身心素質與自我精進」、「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」、「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」、「藝術涵養與生活美感」、「道德實踐與公民意識」、「人際關係與團隊合作」、「多元文化與國際理解」九大項目。

三、國民數學素養

12 年課綱是以素養為導向，教育部提升國民素養專案辦公室（2013a）提出國民素養之內容，乃是設想十二年國教完成後所具備的素養內涵，使其能於各自的學習、工作、生活領域上產出成果價值，以提升個人的生活福祉。其中數學素養的定義與內涵為：個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。

在十二年國民基本教育的政策基礎下，有四項提升數學素養的目標：

- （一）學習並發揮數學思維的特長：抽象、邏輯與深刻的創新。
- （二）充實並活用基本的數學知識：關係與變化、空間與形狀、數量、數據處理與不確定性。
- （三）建立健康對待數學的態度：數學是人格發展的基礎一環。
- （四）擅於利用計算工具與數位科技：協助數值計算、整理和分析資料，並做數學概念的視覺化。

貳、數學課程發展

以下簡述國小、國中、高中課程的興革。

自從民國 57 年開始實施九年國民義務教育，學科名稱由「算術」改為「數學」，並根據《國民小學數學暫行課程標準(57)》從 57 年的一年級開始逐年實施，到 69 年的最後一屆六年級學生使用，才全面改成 64 年教育部正式頒佈的《國民小學數學課程標準(64)》。此課程從民國 65 年起逐年實施，直到 89 年的最後一屆六年級學生，是目前壽命最長的課程標準。在此期間，全國都使用國立編譯館編製的教科書（俗稱統編本），此課本經過相當大規模的實驗，常稱為「板橋模式」。這段時期的小學數學注重數、量、形的內容學習，並把握三項原則：社會生活的需求，兒童身心發展、與學習的妥當性。

同時期的國民中學數學課程標準則在民國 57 年制訂之後，歷經 61 年、72 年、74 年、83 年多次的修訂，其教學目標從數、量、形的基礎內容，逐漸延伸

到重視學生的思考、推理與創造能力，並顧及情意面的學習興趣及數學素養。國民中學的數學課程，在民國 89 年被納入九年一貫課程。

普通高級中學的數學課程則為配合國民中學首屆畢業生而在民國 60 年訂立課程標準，至民國 72 年配合「高級中學法」而修訂高級中學課程標準，在民國 84 年因應社會變遷而再次修訂。高中數學的學習內容增加了「函數」項目，也都強調思考能力和應用於生活的素養，並且均指出數學在其他學科上的重要基礎性。

民國 80 年代，發生了一項重要的數學教育興革。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱 NCTM) 於 1989 年出版《學校數學課程與評鑑標準》(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)，強調數學能力的培養與數學概念的理解，從傳統以「教師為中心」轉向以「學生為中心」，教師不再是知識的「傳遞者」而是學生知識建構的「協助者」。然而其過分著重概念理解卻輕忽計算能力的培養，招致數學家的批評，對於「概念理解」與「計算能力」發展孰輕孰重的爭論，發展成數學教育學者與數學家之間的數學戰爭 (Wilson, 2002)。

此波風潮及於臺灣，則展現於民國 82 年頒布之《國民小學數學課程標準版課程標準(82)》所揭示的建構主義，強調讓兒童主動從自己的生活經驗建構與理解數學概念。同年亦開放民間出版社編寫教科書，由四家出版商（南一、翰林、康軒、新學友）以及國立編譯館同時編製國小數學課本。因為開放的時間急迫，幾乎沒有經過實驗就送審，審查通過後即直接實施於小學。各版教科書紛紛按課程標準之理念而編製了所謂的「建構式數學」。此課程從民國 85 年起逐年實施，至 92 年全面轉換為《九年一貫課程數學領域暫行綱要(89)》而止。

教育部於民國 89 年宣布實施九年一貫課程，將國小和國中課程做統整的規劃，並於同年頒佈「暫行綱要」。自此，數學科改稱為「數學學習領域」。最劇烈的改變是，取消了數學傳統上具有較多授課時數的「主科」概念，而與其他學習領域平分。在《九年一貫課程綱要總綱》的（六）實施要點（97 年版的 p.11）明白規定著：

- A. 語文學習領域佔領域學習節數之 20%—30%。但國民小學一、二年級語文領域學習節數得併同生活課程學習節數彈性實施之。
- B. 健康與體育、社會、藝術與人文、自然與生活科技、數學、綜合活動等六個學習領域，各佔領域學習節數之 10%—15%。

暫行綱要的數學課程似仍持續建構主義的理念，原本計畫些微調整後即為正式的綱要。然而，建構式數學不要求學生背誦九九乘法表和輕忽直式乘法計算，造成學生計算能力下降的疑慮，引起數學家批評建構式數學，中華民國數學學會便緊急向教育部建議暫緩正式綱要之公布，並另行邀集相關學者與教師，重新審議數學課程的設計，結果就是民國 92 年頒佈的《九年一貫數學領域課程綱要(92)》，從 94 年起正式逐年實施，並於民國 97 年微調修訂，自 100 年起實施迄今。

教育部於 92 年發布九年一貫課程綱要後，隨即組成「國民中小學課程綱要審議委員會」、「國民中小學課程綱要研究發展小組」二層級之常設性課程修訂機制，採取演進式課程修訂模式，以便隨時發現問題即時進行評估研究或調整。97 年的課綱修訂，即為此一機制的成果展現。

參、民國 95 年之後的數學理念與目標

民國 95 年之後，我國主要分成九年一貫課程，以及高中、高職、綜合高中。以下說明其課程理念與目標

一、九年一貫數學之課程理念與目標

97 年九年一貫課程（教育部，2008）強調以學習者為主體，以知識的完整面為教育的主軸，以終身學習為教育的目標。在進入 21 世紀且處於高度文明化的世界中，數學知識及數學能力，已逐漸成為日常生活及職場裡應具備的基本能力。基於以上的認知，國民教育數學課程的目標，須能反映下列理念：(1)數學能力是國民素質的一個重要指標；(2)培養學生正向的數學態度，瞭解數學是推進人類文明的要素；(3)數學教學(含教材、課本及教學法)應配合學童不同階段的需求，協助學童數學智能的發展；(4)數學作為基礎科學的工具性特質。

九年一貫課程同時將一到九年級畫分為四個階段，並且分階段設定其學習目標。

- (一) 第一階段(國小一至二年級)：能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形之認識。
- (二) 第二階段(國小三至四年級)：在數方面要能熟練自然數的四則與混合計算，培養流暢的數字感；另外，應初步學習分數與小數的概念。在量上則以長度的學習為基礎，學習各種量的常用單位及其計算。幾何上則慢慢發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。
- (三) 第三階段(國小五至六年級)：在小學畢業前，應能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積或體積之計算；能製作簡單的統計圖形。
- (四) 第四階段(國中一至三年級)：在數方面，能認識負數與根號數之概念與計算方式，並理解坐標表示的意義。代數方面則要熟練代數式的運算、解方程式，並熟悉常用的函數關係。幾何方面要學習三角形及圓的基本幾何性質，認識線對稱與圖形縮放的概念，並能學習簡單的幾何推理。能理解統計與機率的意義，並認識各種簡易統計方法。

課程目標（教育部，2008）的達成，希望可以培養學童的演算能力、抽象能

力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定高中階段的數學基礎，並希望能培養學童欣賞數學的態度及能力。

二、高中數學之課程目標

搭配九年一貫課程的實施，高中先後從民國 95 年、99 年起，實施暫行綱要與新的綱要，並於 102 年微調。後期中等學校的數學課程，分成高中（普通高級中學之簡稱，以下皆同）、高職（高級職業中學之簡稱，以下皆同）、和綜高（綜合高級中學之簡稱，以下皆同）三類，其課程目標如下。

高中必修科目「數學」課程欲達成的目標如下：

- (一) 培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。
- (二) 培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能。
- (三) 培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。

三、高職數學之課程目標

高職數學課程分為 A, B, C, S 四種(A: 未來工作領域；B: 商業專業及資訊應用領域；C: 工程專業及資訊應用領域；S: 表現藝術之動、靜化相關物理及資訊應用領域)

- (一) 引導學生瞭解數學概念與函數圖形，增進學生的基本數學知識。
- (二) 培養學生基本演算與識圖能力，以應用於解決日常實際問題及 A, B, C, S 內實務問題。
- (三) 訓練學生運用電算器與電腦軟體解決日常實際問題及 A, B, C, S 內實務問題。
- (四) 增強學生基礎應用能力，以培養學生未來就業、繼續進修、自我發展的能力。

四、綜合高中

至於綜合高中，按規定在一年級使用高中的課程，二、三年級則根據學生選擇的專業學程而接軌至高中或高職的二、三年級課程。所以可以不特別討論綜高的數學課程，但須特別留意普高與高職數學課綱之間的銜接狀況。

綜觀我國數學課程的沿革，主要是從國小、國中、高中課程綱要分別制定，到國小和國中合一制定的九年一貫課程，至今則朝向十二年課程合一制的方向邁進。同時不同年代的課程目標，國中之前大都包含數學內容的學習、數學解題能力的培養、運用於生活問題的解決，以及學習興趣、欣賞數學等情意的培養。高中則還包括具備其他學科或者未來就業所需的知識。至於各個階段的課程理念與目標，請參見附錄一。

肆、領域時數/學分數及學習內容

數學作為一種語言，是學習各種領域的共同基礎。因此，環顧世界各國以及

我國的早期課程規劃，數學的學習時數在學校教育裡一向佔有相當的份量。但是，自從「九年一貫」課程實施以來，數學領域被設定為一般學習領域，並不被視為共同基礎。此一概念上的設定，值得各方留意與省思。

至於數學的學習內容，則在不同年代有些許不同。例如在美國新數學運動的年代，國小和國中納了集合的抽象內容。隨著返回基本運動，這些內容也被移除。以下僅做一概述，詳細的文獻探討，請看附錄二。

一、課程時數（學分數）

自九年國民教育實施以來，至九年一貫課程實施以前，各階段數學課程的時數變化不大。國小一、二年級都有（每週）3 節課，三、四年級 4 節課，五、六年級 6 節課。國中則從固定的課程演變為較具多元想法的課程。在 85 年之後，一年級有 3 節課，並配有 1—2 節的選修課；二年級有 4 節課，並配有 1—2 節的選修課；國中三年級有 2 節課，再加上 2 節個別差異教學，以及 2 節選修課。

在九年一貫課程架構中，數學領域的時數按總綱的規劃，與其他五個學習領域平分授課時數，佔全部學習時數的 10% 至 15%。照此規劃，按比例分配的授課時數為：一、二年級 2~3 節，三、四年級 2.5~3.75 節，五、六年級 2.7~4.05 節，七、八年級 2.8~4.2 節，九年級 3~4.5 節。就算學校安排至上限，數學的授課時數還是少於「九年一貫」實施前。

至於後期中等教育的數學課程，我們現在已經可以不談五年制專科學校，而因為綜合高中的數學課程就是高中或高職的課程，所以可以不用特別討論綜高的數學課程。不論高中或高職，都因為性向或專業分流而有不同的課綱，所以在學習時數（學分數）和內容上，都有相當的多元性。

以高中為例，傳統上分為自然組與社會組。在民國 62—72 年間，高一（每週）4 節課，高二分流之後的自然組有 6 節課，社會組 4 節課。自 72 年起，不在高二正式分流，故高一、高二都接受同樣的必修數學課程，而以選修的方式代替分流；但是，事實上，全國各地的高中為了解決師資的專業分佈與排課等實務性問題，皆以「包裹選修」的方式，基本上維持著高二起分流授課的事實。這個現象至今仍在。

民國 72—84 年間，高一有 5 節數學課，高二 4 節，高三按分流結果分成三種數學課：理科（6 節課）、商科（6 節課）、普通（4~6 節課）。民國 84—95 年改成高一和高二各 5 節課，另外在高二提供「幾何」或「邏輯」選修課各 2 節，高三則按分流結果分成「數學甲」（6 節課）和「數學乙」（4~6 節課）兩門數學課。

自民國 95 年迄今，高一和高二的（必修）數學課皆為 4 節，高三數學列為選修。自 99 年起，高二下學期的必修數學課綱分成 A、B 兩版，A 包含於 B，但授課時數相同；而且將「95 暫綱」的高三選修課程改回 84—95 年間大家比較習慣的甲、乙兩版選修內容，各實施一學年，其中數學甲 4 節課，數學乙 3 節課。

再一次地，以民國 95 年當作「九年一貫」課程的分割點，高中數學課程時數在「九年一貫」實施後，有非常明顯的縮減。在「不是所有人都須要這麼多這

麼深的數學」這個意見上，數學教育學者的看法與大家一致。但是，在裁減「一般人」的數學內容時，是否該同步限縮「自然組」的數學課程？實在值得各方再審慎考慮。

現行之高職數學課程分成 A、B、C、和 S 四種版本。家事、設計等群科採用數學 A，高一至高二每週 2 節課（共 8 學分）。商業、外語等群科採用數學 B，高一和高二每週 3 節課（12 學分）。電機、機械等群科採用數學 C，高一和高二每週 4 節課（16 學分）。藝術群科採用數學 S，高一每週 2~3 節課。

二、學習內容

有關九年一貫國小課程，主要在掌握數、量、形的概念，在數方面重點在自然數、分數、小數及其四則與混合計算；能利用常用數量關係（包含比例、公因數、公倍數），解決日常生活的問題。在量方面主要學習七種量及其常用單位及計算。幾何上則能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積或體積之計算。在統計方面，能製作簡單的統計圖形。比較特殊的是，82 年課程有初步機率的課程，九年一貫課程時，已被刪除。

現今受到教材與教法理念流變，以及授課時數限縮的影響，學生在這些傳統基礎內容的學習成效上，是各方關注的焦點。

國中數學的內容則有相對較大的改變。隨著數學內容的逐漸專業化，學生的性向也逐漸發生影響，而社會變遷也開始影響此階段學習內容的取捨。但基本上，國中數學皆至少包含「以符號代表數」的觀念與技術發展，負數（負的整數、小數與分數）與整個有理數系的四則運算，數線及直角坐標平面、以平行線、圓形和三角形為主要物件的平面幾何，相似與全等，畢氏定理、平方根，比例式、一元一次或二次方程式及不等式、二元一次方程式及方程組、二次函數及其圖形等課題。

大致而言，自九年國民教育實施以來，國中數學的內容被刪除的有平方根的開方算法與查表法、集合概念、（非量化）空間概念與立體幾何、多項式的公因式與公倍式（有些課題是先移去高中而後再移除的），被次第弱化的有因式分解、平面幾何的作圖與證明（含三角形的「心」），被徹底移去高中的有等比數列與級數、複數、三角。雖然在九年一貫的課程理念上，意欲略為加強資料整理與機率概念，但由於這段課程被安排在國中三年級的最後，許多教師反應：太靠近升學考試的日期而影響了教學的成效。

民國 95 年，為配合九年一貫課程的實施，並反應社會的人口結構以及學生個人生涯需求的變化，許多 95 年以前的高中數學內容不是被刪除就是被弱化。

雖然 95 年之後最顯著的新增內容是推論統計，但事實上 99 年版的高中數學課綱相對於 84 年，有著許多掩藏於內容項目之下的理念變革，還有待教師同仁們認識與體會。譬如，在向量、矩陣、行列式、方程組這些傳統課題之下，有一個新的脈絡希望讓學生掌握：線性組合與線性變換，這是將來學習線性代數乃至於離散數學的重要基礎。

高職數學皆為必修，但隨其專業群科而有不同的內容。值得注意的是，各版

本的高職數學在內容項目上雖然少於高中數學（必修及選修課程），但檢視其教材內容則很可能並不亞於高中的數學學習深度，更因為各群科之專業課程需要而可能先於高中數學的進度。譬如數學 B（商業、外語等群科）在高二有微積分，數學 C（電機、機械等群科）在高一上學期就有（六個）三角函數的圖形，以及複數平面；這些課題在普高數學都列於三年級的選修。

伍、學習內容的連貫與統整

89 年以前，數學課程內容從國小、國中，到高中、高職，由不同的教師與學者分別撰寫，因此在連貫和統整上需要花更大的精神。在 103 年之前，由於九年一貫課程的實施，使國小和國中的課程內容由同一批學者撰寫，在學習內容的連貫與統整已有進一步考量，但高中和高職課程仍獨立撰寫。

未來 12 年國民基本教育的實施，從國小、國中、到高中、高職的數學課程綱要，將由同一個委員會或工作小組研擬及撰寫，相信在連貫與統整上，更能達成任務。

陸、學習內容知識量

比較不同課程綱要的學分數或者學習時間，數學領域的時間愈來愈少。同時，不同課程的學習內容或有不同。例如

- 89 年暫行綱要，將分數、小數除法移至國中，92、97 年課程綱要又移回小學。
- 82 年以前的課程有不確定的機率問題，92、97 年課程綱要已被移除，但它在處理生活與科學問題的情境中，非常重要。
- 論證與「說理」的敘述能力，一直是各方對於數學教育的共同呼籲。但是沒有時間實施，應該考慮未來是否應增加此內容。
- 基本的三角比例關係，基本的計數原理，以及基本的空間概念（包括旋轉與鏡射等操作型概念），長期被高中一年級的基礎科學課程疾呼需求（甚至於社會學科也很可能需要，只是尚未檢視），卻一直不能在國中時期處理，應該考慮未來是否應增加此內容。

因為，學習內容的知識量問題涉及教學時間的問題，內容深度的問題，社會環境改變的問題，不同觀點的問題，等等。因此，未來在十二年國民基本教育的數學學習內容知識量，還需要取得更多的共識。至於某些內容的增加或者刪除，可以參見第四章結果與討論之中，我們所呈現的相關問題。

柒、不同教育階段之學習內容表述方式

國小和國中階段的數學課程，從九年國民義務教育到九年一貫的年代，數學課程學習內容的表述方式，從巨細靡遺的列出教授的內容(64 年版的分段目標，82 年版的領域目標和分段目標)，到以主題羅列學習內容(89、92、97 年的五大主題)。數學課程內容也從單元內容描述(64 年版)，到認知領或的內容描述(82 年

版)，改變到以能力指標(89年版)和分年細目(92、97年版)的表述方式。

高中階段的課程內容，則一直是以單元內容來描述，但是內容從教材大綱(72年版)具細靡遺的列出教授的內容到簡單的主題內容，到每個概念(84年版)大約上幾節課，然後在主題之下羅列主要內容(95年版)之下闡述教授的內容，到分成主題、子題和內容(99年版)，以及負面表列的表述方式。

未來十二年國民基本教育以素養為核心，數學課程的內容表述方式，應該適度反應學生的數學素養。

第二節 重大議題

本節旨在闡述數學的學科地位、學生數學學習的問題、未來數學素養發展的主要議題，以及數學與教育部揭示的七大重要議題的關係。

壹、數學的學科地位

教育部(2008)公佈的97年數學課程綱要，說明數學的佔有重要的學科地位。綱要指出，數學之所以被納入國民教育的基礎課程，主要有三個重要原因：

一、數學是人類最重要的資產之一

數學被公認為科學、技術及思想發展的基石，文明演進的指標與推手。數學結構之精美，不但體現在科學理論的內在結構中及各文明之建築、工技與藝術作品上，自身亦呈現一種獨特的美感。

二、數學是一種語言

簡單的數學語言，融合在人類生活世界的諸多面向，宛如另一種母語。精鍊的數學語句，則是人類理性對話最精確的語言。從科學的發展史來看，數學更是理性與自然界對話時最自然的語言。

三、數學是人類天賦本能的延伸

人類出生之後，即具備嘗試錯誤、尋求策略、解決問題的生存本能，並具備形與數的初等直覺。經過文明累積的陶冶與教育，使這些本能得以具體延伸為數學知識，並形成更有力量的思維能力。

同時，在進入21世紀且處於高度文明化的世界中，數學知識及數學能力，已逐漸成為世界各國認同的日常生活及職場裡應具備的基本能力。

貳、數學的高成就低興趣現象

台灣近年來積極參與國際數學評量計畫，發現台灣學生的數學評量成就相當不錯，但態度與自信心不佳，如表2-1。例如，參加國際數學和科學趨勢研究(Trends International Mathematics and Science Study [TIMSS])(Mullis, et.al, 2008)發現四年級和八年級學生的數學成就在國際評比上很不錯，但是對數學的興趣與自信心就沒有那麼好。TIMSS 2007的數學成就國際排名，四年級(37國參加)學生為第3名，八年級(50國參加)學生第1名，排名在頂尖的位置。但是對數學的正向態度

與自信心國際排名，四年級分別為第 36 和 35 名，八年級分別為第 39 和 46 名。

表2-1 TIMSS 2007 台灣學生的認知與情意排名

四年級 (37 國參加)			八年級 (50 國參加)		
成就	態度	自信心	成就	態度	自信心
第 3 名	第 36 名	第 35 名	第 3 名	第 39 名	第 46 名

同樣的，我國參與 2011 TIMSS 的結果，在數學成績方面(國家教育研究院，2012)，小學四年級與八年級的分數都顯著提升，顯示我國學生在數學成就上的厚實基礎。但是對於情意的調查結果，同樣發現有低興趣、低自信心與數學無用論的情形，如下表。

表2-2 TIMSS 2011 台灣學生的認知與情意排名

四年級 (50 國參加)			八年級 (42 國參加)		
成就	態度	自信心	成就	態度	自信心
第 4 名	第 43 名	第 46 名	第 3 名	第 37 名	第 36 名

可見我國學生雖然數學成就很高，但對於學習數學的正向態度方面，於國際間位居末段班。其中值得注意的是，在 2003 年的 TIMSS 評量，當時四年級學生的「態度」調查結果，曾經高居第 4 名(共 25 國參與)。那一年的四年級學生於民國 88 年入學，受到「九年一貫」課程的影響較低。「九年一貫」課程縮減了數學課時，在一定程度上也降低了課業要求，一方面我國學童的平均成就表現雖無變化，另一方面卻在情意面以及「成績標準差」兩方面的表現都逐步惡化。這些現象不見得全是「九年一貫」課程中，取消了數學作為基礎學習科目此單一因素所導致，但應該是一項須認真檢視的因素。

參、數學素養

學生能力國際評量計劃 (The Program for International Student Assessment [PISA], 林煥祥, 2008)，是由 OECD 所委託的計畫。OECD 國家希望透過 PISA 來比較參與國即將進入社會的 15 歲學生運用所學的知識解決生活脈絡中的問題的能力。數學素養的調查，PISA 2006 為基準，臺灣平均 549 分，排名第一；PISA 2009 臺灣平均為 543 分，排名第五；PISA 2012 臺灣平均為 560 分，排名第四。如下表。

表2-3 15 歲學生的 PISA 成績

2006 年 PISA			2009 年 PISA			2012 年 PISA		
數學	科學	閱讀	數學	科學	閱讀	數學	科學	閱讀
1 名	4 名	16 名	5 名	12 名	23 名	4 名	13 名	8 名

然而，按照平均成績所做的排名隱藏了另一面的事實：我國 15 歲少年的 PISA 數學成績「標準差」已經高居世界之冠。從 2006，2009，到 2012，我國 PISA 數學成績的標準差直線上升。在 2006 年是世界第三高（我國標準差 103，世界平均標準差為 92），在 2009 年已經「躍居」第一，而 2012 年的標準差不但是世界第一高的 116，還「遙遙領先」次高的 105。PISA 提供的家庭社經地位調查報表，進一步指出臺灣學生的家庭社經地位對其數學成績表現的「解釋度」偏高，而將臺灣列為「教育機會不公平」的國家；臺灣的社經解釋度大約為 18%，高於國際平均的 14.5%，遠高於澳門、香港、日本、和韓國，也高於大約處於世界均標的新加坡、美國、和中國上海。

我們要再次提出「九年一貫」縮減數學課時導致上述現象的主張。縮減數學課時，乃至於過度地刪減數學學習內容，並不能解除社會以及其他學習領域對數學的實際需求，學生的壓力並未就此解脫。縮減數學課時之後，學生平均成就卻不見衰減的原因，很可能出自密度更高的教學或者時間更長的課外學習；不論何者，都是造成學生身心壓力的理由，更是家庭社經地位介入影響的明顯跡象。要解決臺灣學生的數學焦慮，以及教育機會不公平的社會問題，必須正視「數學」作為一種語言，是所有學習的共同基礎之重要觀念；特別在初期學習階段，更是如此。

有鑑於台灣學生的數學學習態度與自信心低落，以及運用所學的知識解決生活脈絡中相關問題之素養能力的重要性。教育部成立教育部提升國民素養專案辦公室（2013b）旨在推動相關業務十二年國民教育政策時，能提升國民的素養。同時為落實十二年國民基本教育課程的理念與目標，國家教育研究院（2013）的課程總綱修訂，期望以「核心素養」做為課程發展之主軸。教育部提升國民素養專案辦公室（2013a）則提出我國數學素養向度的建議文，做為發展或者評量數學素養的方針。

肆、數學與七大重要議題

教育部進行學習領域課程的擬訂時，發現一些現今社會上重要且需要學習的內容，但這些內容並未獲得教育界或國人的一致認同，認為這些課程應在國中小學開設獨立的課程，且認為這些學習內容可以利用融入在不同領域的學習內容的方式，透過潛在的生活對話，或者藉由議題融入教學活動，來達到學習的目的。因此九年一貫國民教育訂出了七個重大議題，包括性別平等教育、環境教育、資訊教育、家政教育、人權教育、生涯發展教育、海洋教育。

在 97 年課綱要之中，(六)實施要點說明，有關性別平等、環境、資訊、家政、人權、生涯發展、海洋等七大議題如何融入各領域課程教學，應於課程計畫

中妥善規劃。

在歷年的數學課程綱要之中，並未針對這七大議題專文撰寫如何融入數學課程內容之中，但是在能力指標的內容說明之中，也融入了相關議題的內涵。例如 4-d-01 便說明重大議題的融入。

表2-4 重大議題的融入數學課程

4-d-01	能報讀生活中常用的長條圖。	D-2-02
說明：	<ul style="list-style-type: none"> ■ 統計圖的學習分成兩階段，先學習如何報讀已經製作好的統計圖，再學習如何將資料製作成統計圖。「報讀」是指將統計圖上所看到的資料數據檢讀出來。 ■ 統計圖表的功能在於藉由圖表，整理雜亂的原始資料，可以簡明的掌握整筆資料的重點。 ■ 資料的解讀可與「社會」、「自然與生活科技」等學習領域的教學綜合進行為宜。亦可與社會重要議題結合，例如：人口販運、性交易防制、性別平等、家庭暴力防制、生命教育、環保教育等議題。 <p>....(未完)</p>	

第三節 國際發展趨勢

本節旨在羅列世界各國數學相關課程目標、學習內容，做為我國發展未來 20 年前瞻性的數學課程綱要的基石。羅列的國家主要包括美國、英國、德國、芬蘭、荷蘭、日本、韓國、新加坡、大陸和香港地區。

壹、美國數學課程—內容少、深度高

美國《共同州立核心標準》(Common Core State Standards Initiative, 2010) 直接了當的提出為學生的「大學與職場生涯做好準備」。課程設計著重連貫 (coherent) 與聚焦 (focused)，強調數學理解與程序技能同等重要，兩者可以用豐富的數學任務對學生進行評量。

它從兩大向度來設定標準條目：「年級標準」(grade level standards) 與「數學實踐 (mathematical practice) 標準」，年級標準從兩方面：「理解」(understand) 與「有能力去做」(be able to do) 來敘寫標準條目，從 K 至 12 針對每一年級提出特定 (specific) 的課程標準，將幾個相關連的標準條目放在一個群組 (cluster) 底下，形成具體的學習內容，一至數個群組即形成學習主題，例如：在七年級的「幾何」學習主題底下，包括了「製圖、建構與描述幾何圖形以及說明圖形間的關係」與「解決包括角度測量、面積、表面積與體積的現實生活問題與數學問題」兩個學習內容，而這兩個學習內容各自涵蓋了三個標準條目。

數學實踐標準提出了所有學生必須發展的八項數學專門能力 (expertise)：一、理解問題並且堅持不懈地解決它們；二、進行抽象與量化的推理；三、建構可行

的論辯並評論他人的推理；四、數學建模；五、有策略地使用合適的工具；六、注意精確性；七、探求與使用結構；八、在重複的推理中，探求並表達規律。該標準強調課程、評量與專業發展設計者應該在數學教學中連結數學實踐與數學內容。

另外，高中數學課程是按照主題進行組織，這與國中小按年級安排有所不同，主題包括：數與量、代數、函數、建模、幾何、統計與機率，在每個主題底下提出為「大學與職場生涯做好準備」所需的**核心課程**之標準條目，而附有「十」的標準條目為學生選修微積分、進階統計、離散數學等進階課程所必須學的。值得注意的是，在該份文件中，不同內容的前後出現順序，是根據國際成就評鑑表現優異國家的課程安排、各州之前的課程安排與數學教育工作者的意見彙整而得，但不一定是課堂教學的順序，教師仍可以視情況自由做選擇與調整，它保留了往後因數學教育研究發現而進行調整的可能性。

貳、英格蘭國家數學課程

英格蘭 (Department for Education, 2013a, 2013b) 新的國家數學課程規畫研究¹於 2013 年九月公布 key stages² 1-3 (即 1-9 年級；5-14 歲)的數學新課程內容。整個規劃研究意圖藉由高品質的數學教育，提供方法讓學生認識世界(如日常生活、科學評析、科技與工程、財金素養及大多數的職業相關議題)、利用數學進行推理、欣賞數學的美與能量、對數學能有愉悅感與好奇心。因此國家數學課程的目標設定在保證所有的學生能：

- 流暢地處理主要數學內容，包含一再透過各式(varied)且頻繁(frequent)的練習複雜問題，讓學生能發展概念性瞭解(conceptual understanding)並能夠快速且準確的想起(recall)及應用(apply)知識的能力。
- 藉由一序列的 (a line of) 探查(enquiry)、臆測關係(conjecturing relationships)與歸納(generalizations)，並用數學語言發展出一個論點(argument)、辯證(justification)或證明(proof)的數學化推理過程(reason mathematically)。
- 藉由將學過的數學應用到一系列例行性(routine)與非例行性(non-routine)且複雜度提升的問題上以進行解題(to solve problems)，包含將問題拆解成一系列簡單步驟的問題以及持續地尋找解答。

簡單的來說，新的國家數學課程目標架設在大多數學生能流暢地穿梭於以不同表徵形式存在的數學想法間。雖然數學是獨立學科，但是學生要能從在為各種

¹ 全面適用於 2014 年 9 月開始的 Key stages 1-3 學生。

² 英格蘭主要將學校義務教育區分為四個關鍵階段 (key stages)：**Key stage 1:** years 1-2; 5-7 歲;**Key stage 2:** years 3-6 (lower key stage 2: years 3-4; upper key stage 2: years 5-6); 7-11 歲;**Key stage 3:** years 7-9; 11-14 歲;**Key stage 4:** years 10-11; 14-16 歲

數學想法建立豐富連結(包含不同學科領域的情境下)的過程中去發展他們解逐漸複雜化問題(increasingly sophisticated problems)的流暢性(flucy)、數學推理(mathematical reasoning)與能力(competence)。且每個階段都必須是在確認學生已瞭解(understanding)與準備(readiness)好了的情況下才可前進到下一階段。

此外，電算器(calculator)在課程中不該被使用來替代書面計算或心算，僅能在近 key stage 2 的後期介紹給學生，來輔助他們概念性瞭解與探索更複雜的數字問題，而且必須是在學生書面計算與心算都沒問題的前提下。在小學與國高中階段，老師應該自己判斷決定 ICT (Information and communication technology) 工具何時該被使用。而語言(spoken language)方面，學生所聽到或說的數學語言的品質(quality)與多樣性(variety)，對學生發展數學語彙或是進行數學辯證、論證、或證明是很關鍵的因素。這些語言也必須能幫助學生以及其他能清晰地思考。老師必須確保學生在建立穩固的討論基礎中能去偵測(probe)及補救(remedy)他們的迷思(misconceptions)。

在 key stage 1 和 2 的課程中，規劃的課程是逐年被設定的。雖然如此，但學校只要在每個 key stage 的尾聲教完相關課程即可³。學校在每個 key stage 過程中保有對課程的彈性配置，也就是說可以早教或是晚教整個 key stage 範圍的課程。關於成就指標(achievement targets)，則是期望學生能知道(know)，應用(apply)且瞭解(understand)規劃課程中切題的內容(the matters)、技巧(skills)、及進程(processes)。

如前所述，在 key stages 1 & 2 中，國家數學課程明確地依各年級指出該年度應學的數學內容與數學能力，而 key stage 3 則是以整個階段來討論規畫應學的數學內容與數學能力，為能橋接上未來 key stage 4 的數學課程做準備。整體而言，英國數學課程指出各內容主題(及其分支)學生該學的重要數學概念或數學能力，以及(非強制規定的)主題的相對應指引供參考。例如，一年級的數(number)主題，其分支：乘與除，指出學生必須要學會讀(read)、寫(write)、詮釋(interpret)有加、減與等號符號的數學陳述(statement)；要能陳述與使用在 20 以內的加法(number bonds/addition facts)與減法(subtraction facts)運算。

以下針對英格蘭學生該學的數學主題內容，依年級整理成下表。

³ 牽涉到每個 key stage 最後一年學生必須參加國家性測驗檢測學習狀況。

年級階段 (year)		內容主題 (subject content)						
		數	比與比例	代數	測量	幾何	統計	機率
Key Stage 1	1	X			X	X		
	2	X			X	X	X	
Lower key stage 2	3	X			X	X	X	
	4	X			X	X	X	
Upper key stage 2	5	X			X	X	X	
	6	X	X	X	X	X	X	
Key stage 3	7	X	+ 比率變換	X	X	X	X	X
	8	X	+ 比率變換	X	X	X	X	X
	9	X	+ 比率變換	X	X	X	X	X

參、德國國家課程理念—PISA 導引

近年來制訂國家課程的議題，於西方各國家逐漸受重視，特別是具有不同聯邦系統教育體系(一國多制)的德國、美國。

德國國內對於數學素養(mathematical literacy)的討論行之有年，但卻一直沒有國家課程的設計。由於國際性測驗中，各邦學生的評比測驗差異性很大，因此德國許多學者萌生發展國家課程的理念。2003年由 Eckhard Klieme 集結各學科領域的研究專家 (Klieme 等人, 2004)，統籌撰寫國家課程標準的專家理念；德國各邦文教部長聯席會議(Kultusministerkonferenz, KMK)則於 2003 年與 2004 年釋出 5-10 年級與 1-4 年級的國家數學教育標準(educational standards)。各邦的實際教學或教科書設計則需依據此國家數學教育標準搭配各邦的數學課程大綱(syllabus)執行。

國家數學教育標準列出須具備的全面性數學能力(mathematical competencies)，小學版本有五個數學能力(Kompetenze)：

- 問題解決(problem solving, K1)
- 溝通(communication, K2)
- 論證(argumentation, K3)
- 建模(modeling, K4)

- 表達與陳述(representation, K5)

中學版本則有六個數學能力：

- 數學論證(mathematical argumentation, K1)
- 問題解決(mathematical problem solving, K2)
- 建模(mathematical modelling, K3)
- 表達與陳述(mathematical representations, K4)
- 處理數學的符號、形式化及技術性元件(dealing with symbolic, formal, and technical elements of mathematics, K5)
- 溝通(communication, K6)

同時，每一數學題目具備的功用(requirement) (De Lange, 1999) 三個等級，如下所列；都能藉由分析題目的解題過程，定位出上述的某項數學能力，以及其所屬的主題內容：

- 再製(reproduction, Anforderungsbereich I)、
- 建立連結(establishing connections, Anforderungsbereich II)、
- 概化與反思(generalization and reflection, Anforderungsbereich III)

小學版本涉及五個主題內容(Leitidee)有：

- 數與運算(number and operation, L1)
- 空間與平面(space and shape, L2)
- 樣式與結構(pattern and structure, L3)
- 量與測量(size and measurement, L4)
- 資料與機率(data, frequency and probability, L5)

中學版本亦涉及五個主題內容：

- 數(number, L1)
- 測量(measurement, L2)
- 幾何(space and shape, L3)
- 函數關係(functional relations, L4)
- 機率統計(data and probability, L5)

德國將 2000 年的 PISA 架構，修改轉化成課程設計結構，優點是清楚明瞭，結構中的三等級未必有階層關係，取決於學習內容。

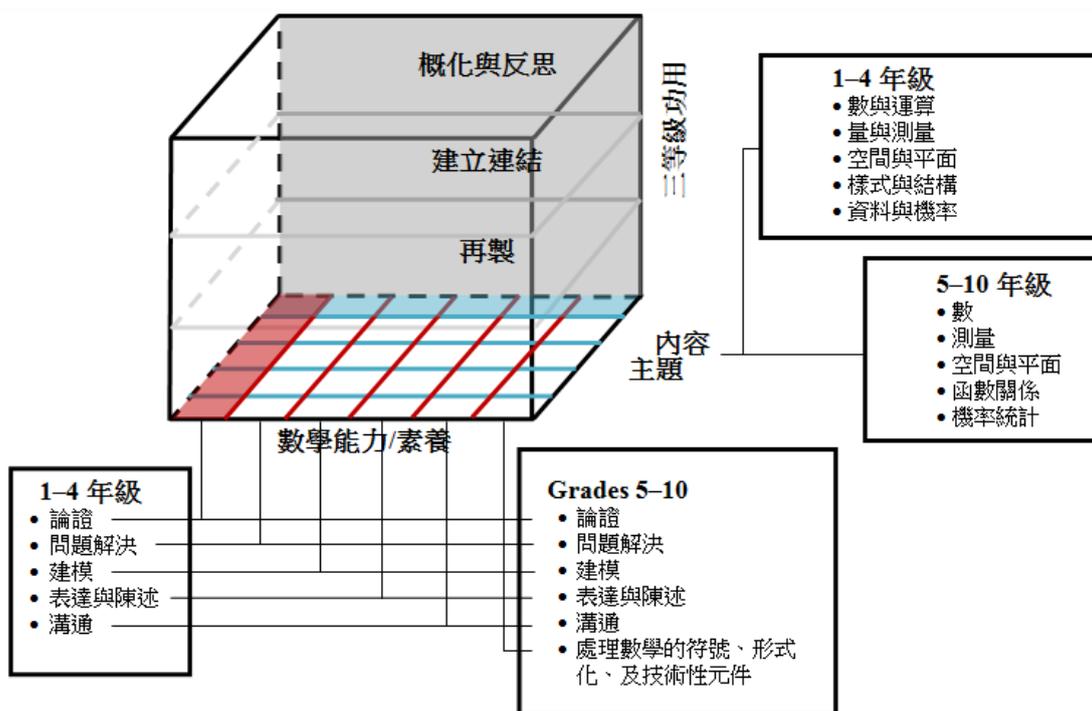


圖2-1 德國數學課程設計結構

肆、芬蘭 2004 – 發展數學思維、數學解題

2004 年修訂的國家核心課程綱領 (Finnish National Board of Education, 2004), 數學教學的任務是能提供發展數學思維、數學概念學習和使用最廣泛的解題方法的機會。核心課程將中小學數學學習分為三個階段：第一階段是 1-2 年級，第二階段為 3-5 年級，第三階段是 6-9 年級。

第一階段(1-2 年級)的核心任務是發展數學思維，專注、傾力和溝通實作，以及獲得形成數學概念和結構的基礎的經驗。

第二階段(3-5 年級)的核心任務是發展數學思維，引導數學模式的思考的學習，強化基本運算能力和數的概念，以及提供同化數學概念和結構的基礎的經驗。

第三階段(6-9 年級)的核心任務是深化數學概念的理解和提供足夠的基本能力以模式化日常生活中數學問題，學習數學模式的思維，記憶、聚焦、準確表達的實作。

伍、荷蘭 – 現實數學教育

荷蘭自 1960 年代起便推行現實數學教育(Realistic Mathematics Education, RME)。荷蘭的數學教育改革稱為“realistic”的理由，不僅是數學要和真實世界相連結，RME 也重視提供學生可以想像的問題情境。荷蘭對動詞”to imagine”的翻譯是”zichREALISERen”。它是強調在你的心中變成某些真實，它就是 RME 這個

名字的由來。這個意思是說，一個呈現給學生的問題脈絡可以是真實世界的脈絡，但它並不全是必然的。在一個問題上，神話故事的幻想世界，甚至數學的形式世界，只要他們在學生的心中是真實的，都可以做為合適的學習脈絡。

Freudenthal 主張「學生不是學習數學，而是學習數學化」，強調「數學來自於現實生活，將其再利用於現實生活」以及「學生經由自己熟悉的現實生活，自行發現和理出數學結論」。Treffers (1978, 1987)進一步闡述，將數學化分為「水平式的數學化(horizontal mathematization)」與「垂直式的數學化(vertical mathematization)」。

Treffers(1987)總結 RME 的五個特徵是脈絡的運用、模型的利用、學生自己產生和建構的利用、教學過程的互動特性、不同學習路徑(strands, 成份)的編織。

陸、日本國家數學課程—活動數學

日本國家數學課程 (Takahashi, Watanabe & Yoshida, 2008) 分成「目標」(objectives)與「內容」(content)敘寫，小學與國中階段都有提出總目標，接著分年敘寫課程目標、課程內容以及教學應放入的數學活動建議，不過，課程內容沒有寫到九年一貫課程的分年細目那麼詳細。值得注意的是，日本的課程文件特別提出與目標和內容並列的一章來說明課程轉化，告訴教師教學計畫制定和每個年級的內容教學應注意的事項。整體來說，日本的數學課程是「活動數學」，數學活動為其主軸/特色，以下分別說明小學與中學階段的課程目標和內容。

一、小學階段(2011年4月1日開始實施)

- (一) 課程目標：經由數學活動，學生將 1.習得基本與基礎的數、量與形的知識與技巧；2.培養從日常生活的現象提出與組織邏輯思考步驟以及表徵現象的能力；3.欣賞數學活動的趣味性與數學操作的優點；4.增進於日常生活與日常學習中使用數學的意願。
- (二) 課程內容：數與計算(numbers and calculations)、量與測量(quantities and measurements)、幾何圖形(geometric figures)、量化關係(quantitative relations)。

二、國中階段(2012年4月1日開始實施⁴)

- (一) 課程目標：經由數學活動，學生將 1.深化他們對於數、量與形的原理和規則的理解；2.發展數學表徵與程序的流暢性；3.在推理與做判斷時，傾向去使用數學理解、表徵與程序。
- (二) 課程內容：數與式(numbers and mathematical expressions)、幾何圖形(geometric figures)、函數(functions)、資料處理(data handling)。

⁴ 高中課程於 2013 年 4 月 1 日開始實施

表2-5 日本數學課程授課時數安排

年級	年齡	一整年數學課 總節數	一整年總節 數	每年上課週數	一節課的時間
1	6	136(每週四節)	850	超過 34 週	45 分鐘
2	7	175(每週五節)	910	超過 35 週	45 分鐘
3	8	175(每週五節)	945	超過 35 週	45 分鐘
4	9	175(每週五節)	980	超過 35 週	45 分鐘
5	10	175(每週五節)	980	超過 35 週	45 分鐘
6	11	175(每週五節)	980	超過 35 週	45 分鐘
7	12	140(每週四節)	1015	超過 35 週	50 分鐘
8	13	105(每週三節)	1015	超過 35 週	50 分鐘
9	14	140(每週四節)	1015	超過 35 週	50 分鐘

柒、韓國數學課程—數學與文創、未來導向課程

韓國數學新課程 (Lew, 2012) 是基於「未來導向課程 (future oriented curriculum)」的理念，於 2011 年 8 月修訂，重點放在創造力 (creativity) 與人格 (personality)。除了要培養學生工作上需要具備的創造性 (creative) 與足夠能力 (competent)，還要增強他們更加理性 (rational) 與明智 (sensible)。數學課程中，除了強化一般所了解的數學過程 (mathematical process; 包含數學推理、數學解題、與數學溝通) 外，還特別強調數學態度 (mathematical attitude)。

韓國意識到他們在 PISA 2003, 2006, 2009 年測驗中都市地區學生遠比鄉村地區學生表現要來的好很多，他們認為數學素養不僅只是歸因於成績的表現，教育環境更是重要的因素 (e.g. 學生與家長的負面數學態度)，因此促動課程的改革。韓國教育部更公布了一項數學教育政策，以提升學生與公眾社會的數學態度。這項政策強調：

- 情境式學習：以助學生連結數學概念與日常生活
- 操作式活動 (manipulation activities)：藉此學生可以從他們正在學習的數學獲得直觀式想法並提升創造力。
- 推理與辯證 (reason and justify)：基於學生的數學知識與經驗推理並辯證數學結果。
- 教科書根基於 storytelling 與 STEAM (science and technology, engineering, art, and mathematics) 以幫助學生了解數學意義 (meaning in mathematics)。
- 全國 11700 間學校數學研究室的推動。
- 數學教師的專業化發展。

簡單來說，韓國新數學課程的目標有：

- (一) 所有學生應能獲得數學信心與能力(confidence and competence)以及職業上所需的數學技能；並能辨識到數學的社會與文化重要性。
- (二) 藉由數學思維與數學態度的培養，培育新一世代的數學創造力與人格。
- (三) 涉及國家性策略，以建構一個高度已開發國家：數學是工具，以推動科學的發展並解決人們日常生活中量與質的問題。
- (四) 為了在適宜的情境中合適地使用這些工具，未來導向課程強調數學與日常生活的連結(connection)、搭配電腦科技素材的操作式活動(manipulation activities)、以及提升推理能力的辯證活動(justification activities)。

韓國新數學課程將舊課程的 39 個單元重新配置成 29 個單元：刪除低相關或是機械性的課程單元，或是整合相關單元於同一單元。藉此以降低學習負擔，將學習時間撥移到創造性活動與數學態度培養。

在**數與運算**單元，移除三單元：集合論、二進制、近似值。在**科學符號** (letters and expressions)單元，強調科學符號應用在建構日常生活。在**函數**單元，函數的概念比以往更為被重視，讓學生能視函數為工具，將觀察到的日常現象表徵成通則(rule)。在**機率與統計**單元，介紹利於視覺化小量資料分布的莖葉圖(stem-and-leaf plot)，同時資料的圖像表徵是被鼓勵的。在**幾何**單元，多數學生有困難的解釋(explanation)或辯證(justification)活動，比形式化證明更為被重視。

國小到高中的數學主要內容結構如下：

國小(1-6 年級)，有數與運算(numbers and operations)、圖形(figures)、測量(measurement)、機率與統計(probability and statistics)、規律與解題(patterns and problem solving)

國中(7-9 年級)與高中(10-12 年級)有數與運算(numbers and operations)、幾何(geometry)、變量與表示式(variables and expressions)、機率與統計(probability and statistics)、函數(functions)

捌、新加坡 2012 –五星的數學解題面向

新加坡的數學課程是以數學的解題 (Singapore Ministry of Education, 2012) 為中心，並由概念、過程、後設認知、態度、技能等五邊形建構之。

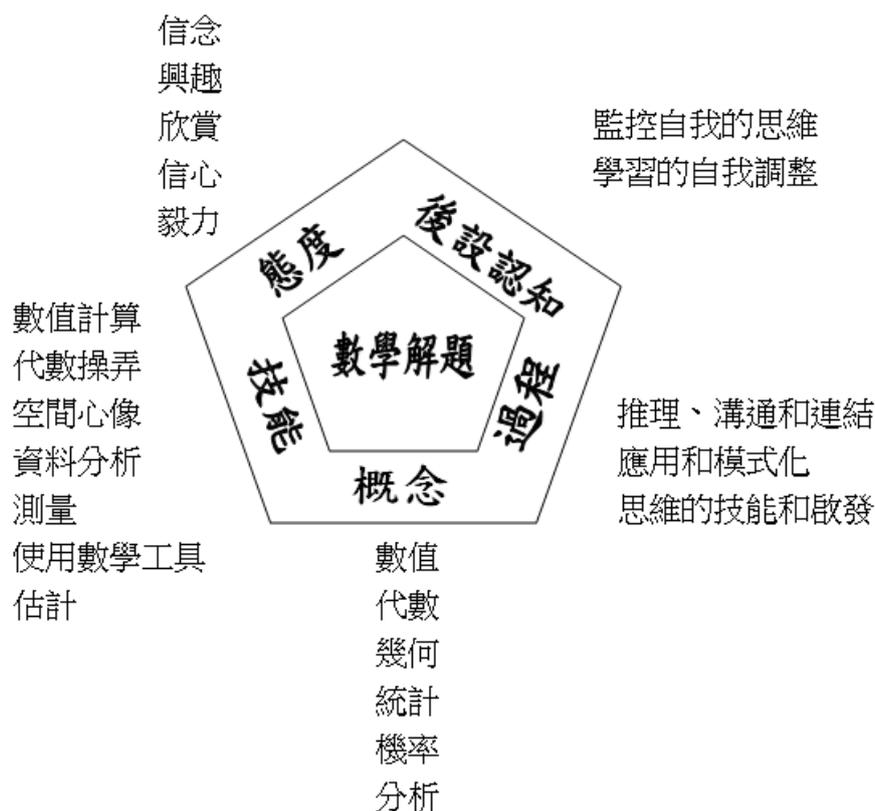


圖2-2 新加坡的數學課程架構

一、總目標 Aims

- (一) 獲得和應用數學概念和技能。
- (二) 獲得認知和後設認知技能，經由數學方法以解決問題。
- (三) 發展對數學的正向態度。

二、小學目標：奠定堅實的基礎

- (一) 獲得數學概念和技能，為了日常生活使用和持續學習數學。
- (二) 發展思維、推理、溝通、應用和後設認知技能，經由數學方法以解決問題。
- (三) 建立數學的信心和培養興趣

三、中學：建構優勢

(一) O/N(A) Level (O 標準，N(A)普通(學術))

- (1) 獲得數學概念和技能，為了持續學習數學和支持其他學科的學習。
- (2) 發展思維、推理、溝通、應用和後設認知技能，經由數學方法以解決問題。
- (3) 連結數學內的觀念，以及經由數學的應用連結數學和其他學科。
- (4) 數學信心的建立和興趣的培養。

(二) O/N(A) Level 的附加數學

- (1) 獲得數學概念和技能，為了更高的數學學習和支持其他學科的學習，特別是科學。
- (2) 發展思維、推理和後設認知技能，經由數學方法以解決問題。

- (3) 連結數學內的觀念，以及經由數學的應用連結數學和其他學科。
- (4) 欣賞數學的抽象本質和威力。

(三) N(T) Level (普通技職)

- (1) 獲得數學概念和技能，為了真實生活、支持其他學科的學習、和職業教育的準備。
- (2) 發展思維、推理、溝通、應用和後設認知技能，經由數學方法以解決問題。
- (3) 建立使用數學的信心，以及體會數學在真實生活內做明智的決策的價值。

四、大學前：為大學教育準備

(一) H1(商業和社會科學)

- (1) 獲得數學概念和技能以支持商業和社會科學的大專課程。
- (2) 發展思維、推理、溝通、應用和後設認知技能，經由數學方法以解決問題。
- (3) 連結數學內的觀念，以及經由數學的應用連結數學和其他學科。
- (4) 體會數學在真實生活內做明智的決策的價值。

(二) H2(數學、科學和工程)

- (1) 獲得數學概念和技能，做為數學、科學和工程大專課程的準備。
- (2) 發展思維、推理、溝通、應用和後設認知技能，經由數學方法以解決問題以及使用數學語言。
- (3) 在數學內連結觀念，以及經由數學的應用連結數學和其他學科。
- (4) 欣賞數學的美，以及數學在生活內做明智的決策的價值。

(三) H3(對數學有資質和熱情)

- (1) 獲得高等數學的概念和技能以深化對數學的了解，以及拓展數學的應用範圍。
- (2) 發展嚴謹的思維習慣，經由數學的推理和證明，創造數學的解題和使用數學模型。
- (3) 在數學內進行更高層次的連結，以及經由數學的應用連結數學和其他學科。
- (4) 欣賞數學的美、嚴謹和抽象，經由數學的證明和應用。

玖、大陸 2011 – 雙基連結與價值

中華人民共和國教育部（2011，p. 2-9）於 2011 年制定大陸義務教育課程標準，其中說明課程理念與目標

一、課程基本理念

- (一) 數學課程應致力於實現義務教育階段的培養目標，要面向全體學生，適應學生個性發展的需要，使得人人都能獲得良好的數學教育，不同的人的在數學上得到不同的發展。

(二) 課程內容要反映社會的需要、數學的特點，要符合學生的認知規律。它不僅包括數學的結果，也包括數學結果的形成過程和蘊涵的數學思想方法。課程內容的選擇要貼近學生的實際，有利於學生體驗與理解、思考與探索。課程內容的組織要重視過程，處理好過程與結果的關係；要重視直觀，處理好直觀與抽象的關係；要重視直接經驗，處理好直接經驗與間接經驗的關係。課程內容的呈現應注意層次性和多樣性。

(三) 教學活動是師生積極參與、交往互動、共同發展的過程。有效的教學活動是學生學與教師教的統一，學生是學習的主體，教師是學習的組織者、引導者與合作者。

數學教學活動應激發學生興趣，調動學生積極性，引發學生的數學思考，鼓勵學生的創造性思惟；要注重培養學生良好的數學學習習慣，使學生掌握恰當的數學學習方法。

學生學習應當是一個生動活潑的、主動的和富有個性的過程。除接受學習外，動手實踐、自主探索與合作交流同樣是學習數學的重要模式。學生應當有足夠的時間和空間經歷觀察、實驗、猜測、計算、推理、驗證等活動過程。

教師教學應該以學生的認知發展水準和已有的經驗為基礎，面向全體學生，注重啟發式和因材施教。教師要發揮主導作用，處理好講授與學生自主學習的關係，引導學生獨立思考、主動探索、合作交流，使學生理解和掌握基本的數學知識與技能、數學思想和方法，獲得基本的數學活動經驗。

(四) 學習評價的主要目的是為了全面了解學生數學學習的過程和結果，激勵學生學習和改進教師教學。應建立目標多元、方法多樣的評價體系。評價既要關注學生學習的結果，也要重視學習的過程；既要關注學生數學學習的水準，也要重視學生在數學活動中所表現出來的情感與態度，幫助學生認識自我、建立信心。

(五) 資訊技術的發展對數學教育的價值、目標、內容以及教學模式產生了很大的影響。數學課程的設計與實施應根據實際情況合理地運用現代資訊技術，要注意資訊技術與課程內容的整合，注重實效。要充分考慮資訊技術對數學學習內容和模式的影響，開發並向學生提供豐富的學習資源，把現代資訊技術作為學生學習數學和解決問題的有力工具，有效地改進教與學的模式，使學生樂意並有可能投入到現實的、探索性的數學活動中去。

二、課程目標

義務教育階段數學課程目標分為總目標和學段目標，從知識技能、數學思考、問題解決、情感態度等四個方面加以闡述。

數學課程目標包括結果目標和過程目標。結果目標使用“了解、理解、掌握、運用”等術語表述，過程目標使用“經歷、體驗、探索”等術語表述。

總目標是希望透過義務教育階段的數學學習，學生能：

(一) 獲得適應社會生活和進一步發展所必需的數學的基礎知識、基本技能、基

本思想、基本活動經驗。

- (二) 體會數學知識之間、數學與其他學科之間、數學與生活之間的聯繫，運用數學的思惟模式進行思考，增強發現和提出問題的能力、分析和解決問題的能力。
- (三) 了解數學的價值，提升學習數學的興趣，增強學好數學的信心，養成良好的學習習慣，具有初步的創新意識和實事求是的科學態度。

壹拾、香港

香港特別行政區政府教育局（2013）於 2003 年提出數學課程的架構圖，如下圖 2-3。數學教育的課程架構是數學科的學與教活動的整體組織框架。課程架構由互相關連的部分所組成，包括：學科知識和技能，在各範疇內以學習目標及學習重點表示；9 項共通能力；及正面的價值觀和態度。

課程架構設定學生由小一至中六各不同的學習階段需要學習、重視及應具備的各種技能，並讓學校和教師能靈活調適數學課程，以配合學生的不同需要。九項共通能力則分別是協作能力、溝通能力、創造力、批判性思考能力、運用資訊科技能力、運算能力、解決問題能力、自我管理能力及研習能力。

數學課程架構圖

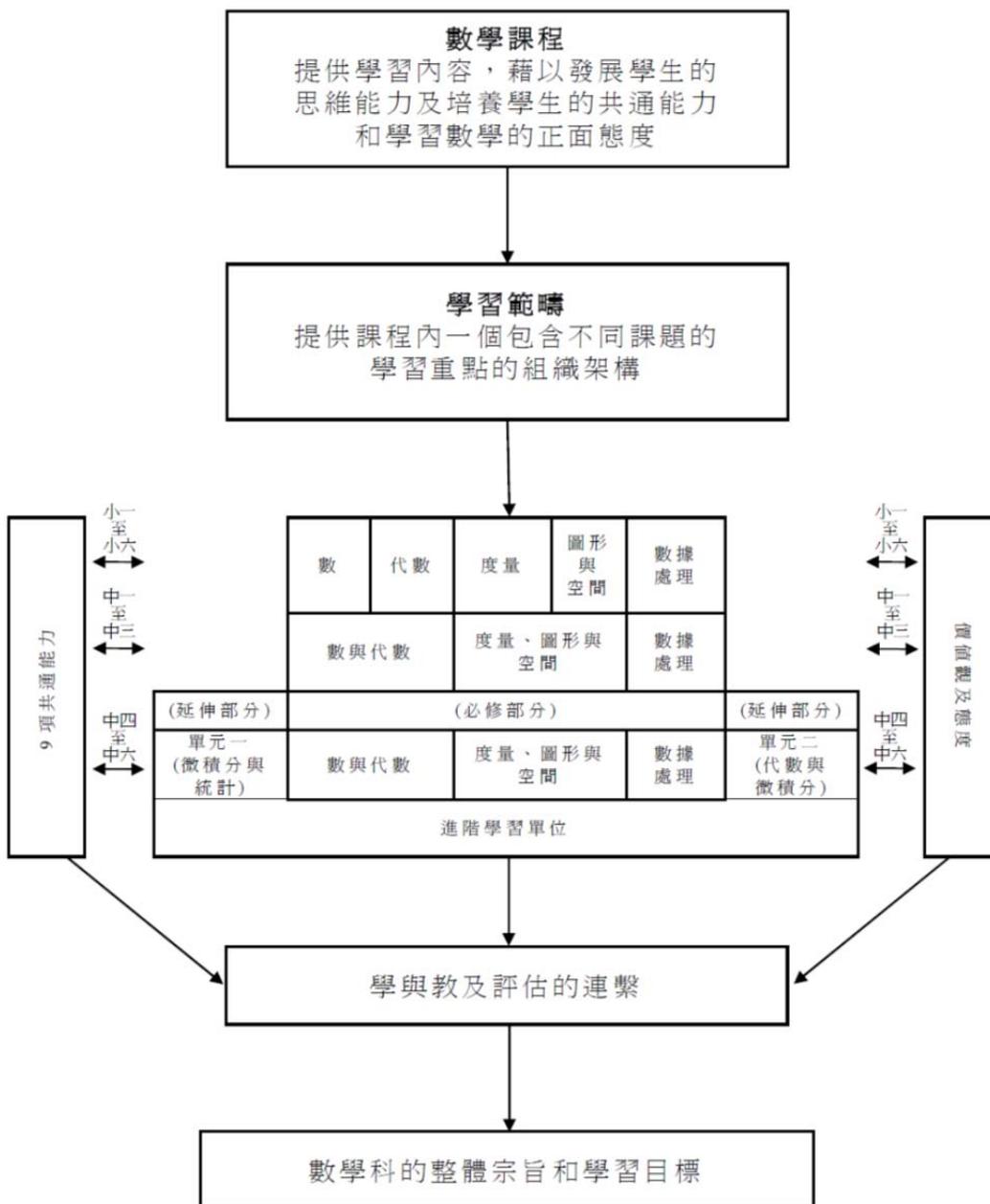


圖2-3 香港課程架構圖

第三章 研究設計與實施

第一節 研究過程

為解答前述的研究問題，本計畫以一位主持人與三位共同主持人組成研究團隊，共同合作進行數學基本學習內容的研究，在研究執行中期，由於教育部的政策確定普通型高中和技術型高中數學課綱的研修，將採「同一團隊、分開敘寫」的方式進行，因此研究團隊延請國立臺北市立大學的鄭英豪教授擔任諮詢委員參與研究會議的討論，借重其高職數學課程研修的經驗與學識，讓前導研究更能考量到技術型高中數學課程的需求。

研究團隊蒐集與分析國小、國中以及高中、職數學領域課程相關文件與國內外的數學課程文獻，進行焦點座談與意見諮詢，研究團隊成員於每個月進行討論，統整十二年國教數學基本學習內容的研究發現並進行研究報告寫作。我們於 7/5、8/6、9/3、9/24、10/8 的會議針對第一、二個研究問題提出初步的發現，然後於 10/19 召開兩場焦點座談會議邀請數學相關領域學者、校長、教師、家長代表過來諮詢，上、下午場次分別有 24 人與 23 人參與，諮詢會議的內容皆進行錄音與轉錄成逐字稿；諮詢會議之後，研究團隊於 11/13 根據諮詢委員的意見對於研究問題一與研究問題二的發現進行修正與精緻化。

接著，研究團隊於 11/13 的會議著手討論研究問題三，並於 12/3 與 12/10 的會議提出研究發現。最後，主持人整合文獻分析、焦點座談與研究會議討論的發現，帶領研究團隊完成數學前導研究的報告撰寫。

第二節 研究方法

研究團隊應用內容分析法(Cohen, Manion & Morrison, 2011)與焦點座談法。首先對現行中小學數學課程與世界各國課程進行分析、比較與綜合，從而對三個研究問題提出解答論述。內容分析單元為九年一貫數學「能力指標」(國民教育社群網站, 2012)、高中 99 數學課程綱要的「子題」與「內容」(高中數學學科中心網站, 2012)、高職 99 數學課程綱要(職業學校群科課程推動工作圈, 2009)。世界各國課程資料的蒐集包括：美國、英國、德國、芬蘭、日本、韓國、新加坡、中國大陸、荷蘭與香港的課程文件。此外，研究者也蒐集與分析相關的研究報告或文件，例如：單維彰(2013)與陳宜良、單維彰、洪萬生與袁媛(2005)的報告，瞭解國內學術社群目前對於數學課程的研究進展。

在研究團隊完成課程資料蒐集與分析，對於研究問題提出初步的發現之後，本研究邀請中小學數學教師、數學教育研究者與數學家做為諮詢委員進行焦點座談，瞭解第一線教師與專家學者對於現行數學課程內容安排的看法、哪些內容可以刪除以及哪些內容應該放入十二國教數學課程中。此外，研究團隊也向諮詢委員請益十二年國教數學課程的理念、目標與學習階段的安排，以檢核、修正與精緻化議題的陳述和立論，並找出重要的潛在議題。

第三節 研究架構

圖 3-1 的研究架構，簡要呈現了研究過程與研究方法，以解答研究問題，從而對十二年國民基本教育數學課程的規畫提出相關論述。

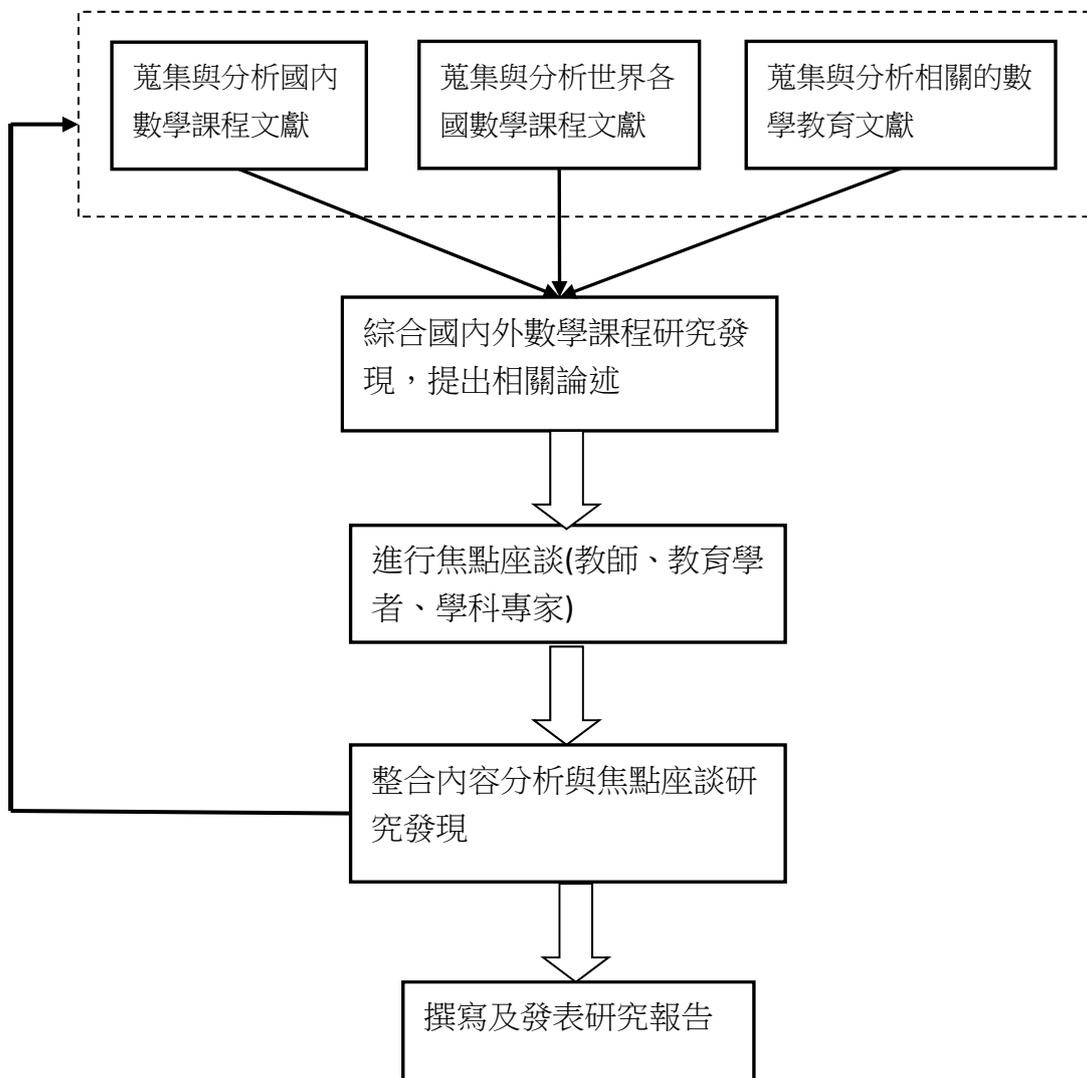


圖3-1 本計畫的研究架構

第四章 結果與討論

第一節 數學領域的理念與目標

在十二年國教理念下，參考國際發展趨勢與現行數學領域之問題，考量不同教育階段特性，提出數學領域的架構、基本理念與課程目標。

壹、數學領域的架構

受到 TIMSS、PISA 等國際評比的影響，培養數學素養成為很多國家數學課程的目標，例如丹麥、荷蘭、德國、法國...等 OECD 國家，他們的數學課程大都轉成以培養學生數學素養為目標。呼應國際趨勢，我國 12 年國民基本教育的課程設計，提出以素養為導向。同時教育部提升國民素養專案辦公室（2013b）提出以五個「國民素養」向度作為檢核 12 年國民基本教育的實行成果。其中數學素養即為檢核數學課程的指標之一。

一個好的課程架構，應該容易讓教科書編著者、教學者、評量者，都能了解課程設計的方向，使課程整體與實際執行之間能夠順利銜接。本計畫檢視德國、新加坡...等國的課程設計，以及我國歷年的課程發展與古聖先賢的智慧。發現我國和各國在進行課程設計時，都強調內容 (contents) 與能力 (skills、competence、literacy、practice) 兩大面向。再仔細檢視，發現除了「知道」與「能做」之外，都還內含有或者區分出認識 (understanding)、辨識 (sensitivity) 與見識的較高層次認知，甚至包括賞識 (appreciation) 等相信數學有益、認為數學美好、堅忍、勤奮等情意面向。因此，12 年國教之數學課程架構，除了包含內容與能力兩大向度之外，也應蘊含認知與態度。因為中國儒、道、釋的哲學發展，也都蘊涵內容、能力以及認知與情意等面向，同時也廣為教科書編著者、教學者、評量者、甚至社會大眾所熟知。因此，我們用引用古聖先賢的智慧，簡單扼要的以中文的「知」、「行」、「識」來詮釋 12 年國教數學課程的內涵。

「知」就是「學什麼」或者「是什麼」，指的是數學內容；它包括數學素養所強調的改變與關係 (change and relationships)、空間與形狀 (space and shape)、數量 (quantity)、不確定性和資料 (uncertainty and data)；其中數量和九年一貫的數與量主題一致，空間與形狀和九年一貫的幾何主題一致，不確定性與資料和九年一貫的統計與機率主題一致，改變與關係和九年一貫的代數主題以及高中的函數等內容一致。我們之所以建議使用改變與關係、空間與形狀、數量、不確定性和資料做為知的主題，主要是因為數學素養強調數學內容的應用與實用。「行」就是「怎麼做」或者「怎麼用」，指的是學生所能展現出來的數學能力，包括程序執行、解題、溝通、論證等等現今數學教育主要的的能力面向。「識」就是「為什麼」、「你認為」、「是什麼」，指的是對數學的內在認知與情意涵養，包括概念理解、推理、連結、後設認知、以及欣賞數學的美。

總而言之，本研究小組提出以數學素養為核心理念，以知、行、識做作為各階段課程的設計向度與查核指標，如下圖所示，透過數學的「知」、「識」、「行」滾動、衍化成國民基本數學素養。這些數學素養除了讓學生具備面臨與自己相關的生活、社會、職業和科學所需的數學知能之外，也為學生以備妥高等教育與職場生涯之所需的知能。



圖4-1 12年國教數學課程架構圖

貳、數學領域的基本理念

基於上述數學架構，我們抽取出數學特有的基本理念，它包括數學是一種語言，以及數學是一種規律的科學(science of pattern)。

一、數學是一種語言

簡單的數學語言，融合在人類生活世界的諸多面向，宛如另一種母語。自然生活語言與數學語言必須互補，才能精確地傳達批判與理性的意思。精鍊的數學語句，是人類理性對話最精確的語言。從科學的發展史來看，數學更是理性與自然界對話時最自然的語言。

例如生活中使用的語言「60分以上」、「60分以下」，有時候包括60分，有時候又不包括60分，不是很精準。數學上則使用「大於」、「大於或等於」的精確語言，方便溝通。再如人類為了計數所圈養的動物而發展出自然數概念以及相關的四則運算；為了探究自然界的奧妙而發展出數、量、形的數學內涵，進而可以與自然界對話。

二、數學是一種規律的科學

綜觀數學發展的歷史，整體來說，數學最主要內涵就是在現實世界與抽象意念中尋找與建立規律，並運用這些規律來解決問題。例如算術主要研討數與其運

算的規律，幾何主要研討形與體的規律，微積分則從有限世界的規律拓展無窮世界的規律，進而處理物理連續運動規律，統計則是利用部分資料建立母體的規律，以進行對未知世界的預測與推論。

此外，我們所在的現實世界有許多看似紛亂但其中有特定規律的現象，例如向日葵和松果看起來是完全不同的兩種植物，但是觀察他們的外型時可以發現向日葵的種子和松果的鱗片都呈現螺線狀的排列，如果數一下每一條螺線上的種子數或鱗片數通常都是 3、5、8、13、21、34、55 之一。這樣的螺線還可以在波斯菊、鳳梨上看見，而百合花、萬壽菊、玫瑰等美麗的花卉的花瓣數也有這個特性。在這些看似紛亂不一的植物上，他們的花瓣、種子與鱗片的數量都符合某個特定的規律，也就是費氏數列。我們所在的現實世界中還有許多看似變動但其中有特定關係的現象，例如白天與黑夜的時間會因季節而有不同，但每天白天與夜晚的時間總和是一樣的，這種定量關係就是這兩個變量之間的規律。

因此，數學是規律的科學，指在探究現實世界的內在理路與規律，進而運用已了解的規律來解決現實世界的問題。

參、數學領域的課程目標

健康的生活是 UNESCO 一直強調的主張。UNESCO 希望它的會員國的社會能夠健康發展，而不是競爭。本計畫同時考察芬蘭、新加坡、美國等國，發現皆以問題解決或職涯準備等務實的查核標準，作為教育的目標（所謂「問題」是指在日常生活、社會生活、職場或學科中發生的問題）。12 年國教應認同這種正能量，數學課程也應從這個面向去思考。數學課程的目標，可以從學科知識的本質去看，設想我國 18 歲學生往後的十年內所需要的素養與知能，讓他/她能在學習、工作、生活領域上產出成果與價值，使台灣的公民能在社會健康發展，創造有品質的生活。因此 12 年國教數學課程的願景是要達成為所有的人（for all），為了生活的品質（for healthy life），以為大學和職業做準備（university and career readiness）。

為了達成數學課程的願景，本計畫提出在知、識、行之中滾動，以涵養出轉換性(transitional)與結果性的課程目標，這兩項目標建議做為十二年國教數學課程的上位目標，來思考與擬定十二年國教數學課程目標。

轉換性目標的意思是經由學習數學內容（知），培養學童概念理解、推理、連結、後設認知（識），使學生能進行演算、解題、推論及溝通（行）。經由進行流暢的演算，探究、臆測、歸納、論證，以解決例行性與非例行性問題，以及理性溝通（行），使學生更加深刻體會數學概念、如何推理、如何連結等後設認知（識），體認數的美學、數學的感覺、喜歡數學（識），進而創造屬於學生的新數學知識（知）。經由概念理解、理解推理歷程、連結相關知能等後設認知，以及對數學的感覺（識）的蘊育，更清楚進行演算、解題、推論、溝通的道理，更能解決生活的問題、非例性的問題（行），進而創造新的數學內容（知）。

結果性目標就是達成我們設想的願景，設想 18 歲國民在往後的十年內進入

大學或職場所需用到的數學素養，例如，能從眾多看似紛雜的現象中辨識出模式以及能使用精確的語言進行描述、證明與溝通。培養出數學素養與知能，讓下一代能在學習、工作、生活領域上產出成果與價值。

至於五個階段或者三個進程的課程目標，因為需要比較嚴謹的文獻探討、問卷調查、理論與實務專家訪談等資料收集，以進行客觀、合理的設定。

肆、符應核心素養與國民數學素養

因為數學課程強調知、識、行，可以符應 12 年國教的核心素養。

數學的本質就是一種規律的科學，是一種符號科學，有其規律性的美感，因此在數學內容的「知」方面，可以培養藝術涵養跟數學美感素養。

從數學哲學觀，數學最重要的是要建立規律、模式以解決問題，需要系統思考，符號運用與他人溝通表達，進而與人合作，規劃執行與創新。因此，在「行」方面，可以培養「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」、「符號運用與溝通表達」、「人際關係與團隊合作」。

至於「身心素質與自我精進」、「藝術涵養與生活美感」、「多元文化與國際理解」主要落實於數學需要自我精進，體現數學美學與多元文化了解的見識、常識、辨識的「識」。「科技資訊與媒體素養」則是數學學習的載體。

至於「道德實踐與公民意識」項目，教師在進行數學教學時，也應注意學生的道德實踐與公民意識，使數學教學不與社會脫節。

第二節 數學領域的內容、組織與表述方式

壹、數學領域的進程區分與主題呈現

參照外國如瑞士、新加坡、德國、美國之學制，僅以五年或四年的小學教育完成最基礎的共同教育。思度我國的教育傳統，建議以 4-6-2 的概念劃分 12 年國民教育的數學學習進程。在這三大數學學習進程裡，次第發展根本數學（1—4 年級）、核心數學（5—10 年級）、和分流數學（11、12 年級）的課程。其中核心數學的六年，又可以類似英國的分段概念，再細分成 5、6 年級，7、8 年級，以及 9、10 年級三個小段落，一方面順應目前的學制分段，另一方面特別加強國中三年級在十二年國教實施之後，銜接高中一年級的關鍵變革。為落實 12 年國教的一貫性精神，課程綱要與教學現場，務必致力於三大學習進程或五個階段的平順銜接，使其前後呼應而一氣呵成。

基本上根本數學，主要了解數學的基本語言，建立數學的基本概念，以及學習數學的思維方式。核心數學則在培養國民所需具備的數學素養。分流數學分別為就業或者升學為職志的學生做準備，將來要就業者，持續培養其國民數學素養，以及特定職業中可能使用的數學；繼續升學者則提供深度的數學，使其能順利就讀大學，為其專業領域作準備。

因為十二年國民基本教育以素養為核心，因此，我們將內容主題分成「改變

與關係」、「空間與形狀」、「數量」、「不確定性和資料」四大主題。其中「數量」和九年一貫的「數與量」主題一致，「空間與形狀」和九年一貫的「幾何」主題一致，「不確定性與資料」和九年一貫的「統計與機率」主題一致，「改變與關係」和九年一貫的「代數」主題以及高中的「函數」等內容一致。

貳、數學領域學習內容、組織與表述方式

依據我國各年級學生的學習習慣，國小教材的組織方式仍沿用螺旋式，國中、高中教材則沿用主題式來學習。

因為歷年的國小和國中階段的數學課程，從巨細靡遺的列出教授的內容(64年版的分段目標，82年版的領域目標和分段目標)，到以主題羅列學習內容(89、92、97年的五大主題)。數學課程內容也從單元內容描述(64年版)，到認知領或的內容描述(82年版)，改變到以能力指標(89年版)和分年細目(92、97年版)的表述方式。其部份內容，請參見附錄三。思考未來十二年國民基本教育以素養為核心，建議數學課程的內容表述方式，應該以提升學生數學素養的方式來表述，或者以提升學生數學知能、能力和素養的方式來表述。

至於學習內容是否過量或者重覆，因涉及數學教學時數，以及全體國民的不同需求，因此除了下節本計畫所羅列的內容修改建議之外，需要更嚴謹的進行意見收集與分析。

再者從本研究課程架構的理念與三個學習進程，本研究認為可以思考在不同進程中，知、行、識的不同權重分配。例如在根本階段，知的部份佔五成、識的部份佔二成、行的部份佔三成。在核心部份，知的部份佔三成、識的部份佔四成、行的部份佔三成。在分流部份，為大學理、工等要數學基礎做準備的課程，知的部份佔三成、識的部份佔四成、行的部份佔三成；為就業或者不需要數學做準備的課程，知的部份佔一成、識的部份佔四成、行的部份佔五成，如表 4-1。至於精確的比例分配，可以進行深入的研究，或者廣泛的徵詢各方的意見來確定。

表4-1 學習進程與課程架構的權重

	根本	核心	分流(為需要數學的大學做準備)	分流(為就業或不需要數學的大學做準備)
知	50%	30%	30%	10%
行	20%	40%	40%	40%
識	30%	30%	40%	50%

第三節 數學領域學習內容修改建議

雖然，現階段無法精確的確認數學內容，但從各國現有課程、學者、教師等各面向的觀點，我們提出幾個學習內容修改的建議議題。

壹、不確定性與數據處理

本文主要從各國課程綱要與國際評量，來論述不確定性與數據處理的數學課程問題，並提出個人見解，供大眾參考。

一、問題

「不確定性與數據處理」在學校課程之教材地位？

二、各國課程綱要比較

(一) 不確定性與機率

不確定性的意思是指事先無法準確知道某個事件或某種決策的結果。例如每包 500 公克裝，不一定恰好 500 公克，是不確定的情境。同價的一堆水果，只是品質接近，不確定是相同。擦青春痘的藥膏，有人擦了有改善，有人擦了沒改善；沒擦的有人也改善了，有人沒有。對於此藥膏效用的問題，也充滿不確定性的思維。因為事件的不確定，若我們想進一步了解它，此時不確定性的問題有和機會或機率極為相關。有關不確定性與機率的課程，美國數學教師學會（National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM）於 2000 年提出的《學校數學原則與標準》（Principles and standards for school mathematics）在 3-5 年級有學習可能性的課程。2010 年美國各州共同核心課程倡議會（Common Core State Standards Initiative，2010）制定各州共同核心數學標準（Common Core State Standards for Mathematics）在六年級也提出發展對統計變異的了解。美國加州的課程綱要提到三年級學生要能夠記錄簡單事件的重複實驗（如擲銅板）；能夠進行簡單機率實驗，並作簡單預測；辨識日常事件的機率意義：確定、有可能、不太可能、完全不可能。四年級要能將機率實驗結果整理成圖表；能報讀簡單之機率。

中國大陸 2011 年義務教育數學課程標準（中華人民共和國教育部，2011）在第二學段（4-6 年級）提出結合具體情境，了解簡單的隨機現象；以及透過試驗、遊戲等活動，感受隨機現象結果發生的可能性是有大小的，能對一些簡單的隨機現象發生的可能性大小作出定性描述，並能進行交流。

相對於其他國家，我國現行小學教材較缺少了解不確定性、可能性、與機率相關的內容。民國 84 年的課程標準和民國 89 年的九年一貫數學學習領域暫行綱要在六年都有「運用生活經驗來瞭解機會」的課程。到了民國 92 年和 97 年的九年一貫數學學習領域課程綱要，在六年級之前已沒有機會或機率相關內容。直到九年級才有機率的教材（9-d-05 能在具體情境中認識機率的觀念）。

(二) 數據處理

數據處理的目的是從大量、雜亂無章、難以理解的數據中，經由資料收集、處理以提取有價值、有意義的數據。

美國 NCTM 於 2000 年提出的《學校數學原則與標準》在 3-5 年級時，希望學生能形成問題，並且可以利用數據收集、整理和展現相關的數據來回答所形成的問題；能選擇和使用適當的統計方法來分析數據；能依據數據發展和評估所做的推論和預測。美國加州的課程綱要提到。四年級要能做問卷，有系統收集數據，並製作相關之圖表；能將機率實驗結果整理成圖表。

英國國家課程標準（陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005）將學生的能力等級分別 8 種程度，期望多數學生在第二階段（6 年級、11 歲）結束時能達到等級 4。等級 4 的學生在資料處理的主題則希望學生能蒐集離散資料並以表格紀錄其發生次數；瞭解並用眾數和範圍來描述資料集合；對適當的資料，以等組距歸類資料，並依此繪製次數圖表，解讀次數圖表；能繪製並解釋簡單的折線圖。

中國大陸 2011 年義務教育數學課程標準在第一學段（1-3 年級）希望學生能根據給定的標準或者自己選定的標準，對事物或數據進行分類，感受分類與分類標準的關係。經歷簡單的數據收集和整理過程，了解調查、測量等收集數據的簡單方法，並能用自己的模式（文字、圖畫、表格等）呈現整理數據的結果。到了第二學段（4-6 年級）能經歷簡單的收集、整理、描述和分析數據的過程。會根據實際問題設計簡單的調查表，能選擇適當的方法（如調查、試驗、測量）收集數據。

相對於美國、英國和大陸，我國民國 97 年的能力指標僅在一年級時，期望學生能對生活中的事件或活動做初步的分類與記錄（1-d-01），同時能將紀錄以統計表呈現並說明（1-d-02）。之後就沒有對數據進行處理的內容。

三、不確定與數據處理的重要性

在強調學生數學素養年代，不確定性思維與數據處理能力，更顯重要。國際學生能力評量計畫（the Programme for International Student Assessment, 簡稱 PISA）主要評量 15 歲學生的數學素養，其中就有關於機率的問題。例如 PISA2012 公布的正式試題 PM00E 是問播放機故障需要修理的機率問題。PISA 2006 年公布的 M467 是問抽到紅色糖果的機率，M509 是問發生地震的機會本質問題。此外 PISA 的試題中也有許多有關統計方面的試題，再再強調統計的數據處理於現今社會的重要性。例如 PISA2006 年公布的試題 M513 中，就有利用同一數據從不同的觀點來解釋那 A, B 兩組的學生成績是 A 組好或者 B 組好的問題。M505 是要學生解釋為何不同廢棄物不適合製作成長條圖的問題。M179 是有關統計圖容易引人誤解的解釋問題。

台灣國小、國中、高中機率與統計課程向來缺乏建立在「不確定現象」上，發展不確定思維的設計進路。有關機率的問題，就像在算比例的問題一樣。例如，求投擲一個公正銅板，三次都是出現正面的機率等問題。較沒有機會讓學生深入體會不確定性。例如，在生活中，較少提問投擲一個銅板，發現 2 次都出現正面，下一次是出現正面或是反面？或者，未來的 20 年內，在 Zed 這個城市發生地震的機會是三分之二。那麼未來 20 年內，在 Zed 這個城市發生地震的可能性比沒有發生地震的可能性大或是未來 20 年內將會發生一次地震？

林福來（2012）主持的統計教育研究—人才培育與資訊整合總計畫也發現我國教學未提供學生理解資料變異性和不確定性的學習機會；例如，教師進行變異數教學時，關注的是標準差公式是除以 N 還是 $N-1$ ，而非變異數的基本概念；教材少提供呈現不確定現象的情境（如：丟擲形狀不規則的骰子）。

四、國際評量

近年來我國一直參與的國際數學與科學教育成就趨勢調查（Trends for International Mathematics and Science Study，簡稱 TIMSS），學生成就分析發現 TIMSS 2011 和 TIMSS 2007 八年級的數、代數、幾何表現相對好；數據與機率相對差。例如 TIMSS 2007 數、代數、幾何、數據與機率的成績分別是 577 分、617 分、592 分、566 分；TIMSS 2011 分別是 598 分、628 分、625 分、584 分。數據與機率的成績明顯比其他主題低了十幾分。

向來重要視國際評比的我們，若我國在八年級之前沒有進行機率相關概念的教學，將來我國八年級學生在這方面的成就，就有可能落後於其他國家。

五、建議

建議我國應該：

- 從國小開始發展不確定思維（uncertainty thinking）。
- 機率與統計課程除了重視 data 和 big ideas 外，應考量 situations 面向，設計以不確定思維為本的課程內涵。
- 參考現象與思維之確定及不確定性雙向模式。
- 不要只強調機率的計算，也應加入機率本質的討論；不要都是出現公正的事件，也應加入非公正事件的教學。
- 國小高年級之後應納入數據處理的教學，讓生體驗從雜亂無章的數據中，依據要解決的問題，收集有用數據，並使用適當方法加以分析，使能順利解決問題。同時也可以增加列聯表的教學與討論，例如，從下面的列聯表討論男生與女生以及是否近視人數等相關問題。

	男生	女生	合計
近視	312	324	636
正常	215	201	416
合計	527	525	1052

貳、數的四則運算

本文主要說明各國的小學階段課程綱要、教學時數、螺旋式教學、理解數的四則運算之根本概念，進而數的四則運算之概念性理解之範圍，供 12 年國教課程修訂的參考。

一、問題

數的四則運算應該以概念性理解為目標，而非重視計算嗎？

二、概念性理解的重要性

各國的課程綱要均強調運算的概念性了解。我國 2009 年課程綱要談到所謂能熟練數學的運算或計算，係指在能夠理解數學概念或演算規則的情況下，所進行的純熟操作。此外，中國大陸 2011 年義務教育課程標準（中華人民共和國教育部，2011）、新加坡 2012 年的課程綱要(Primary mathematics teaching and learning syllabus)(Singapore Ministry of Education, 2012)、2010 年美國 Common Core State Standards Initiative 制定各州共同核心數學標準(Common Core State Standards for Mathematics) (Common Core State Standards Initiative, 2010) 都說明四則運算意義的理解。

強調運算的概念性了解，主要是因為程序性知識的規則時常變來變去，對學生而言沒有感覺，也容易背錯或錯用。例如直式算則中，整數加減乘法可能說成最右邊對齊或者個位對齊個位；到了小數加減法一定要說是個位對個位，乘法則變成最右邊對齊；分數加減法則分母相同，分子才可以相加減；分數乘法又變成分母乘分母，分子乘分子，除法又變成除數顛倒再相乘。若數學強調概念性的了解，學生整合這些程序性知識，了解程序性知識的由來，程序性知識變得有意義。

我國目前學生數學學習時數已經減少，與其他國家的數學學習時數相比也較少，同時就讀學生比率逐年增加。我國 1-9 年級平均數學年上課時(77.3-108.7 小時)數比日本(119.9 小時)、韓國(130.4 小時)、香港(都 100.1-124 小時)少。我國現在的上課時數也比 2000 年以前的課程少（林宜臻，2010）。在這樣的情形下，四則運算的概念性理解與程序性運算（純技術演算）的合理份量應該如何分配，才能兼顧學生學習數學的感覺呢？

三、概念推廣下的理解

在小學，數學學習是螺旋式學習，例如先教一位數加法，再教二位、三位數加法。學生有機會一再回到相同的概念，只是數字變大、變複雜（概念推廣）而已。我們先教真分數的加減法再教假分數、帶分數的加減法；先教同分母，再教異分母加減法。因此，學童只要能在對較少位數的運算有概念性理解，他便可以推廣到較大位數的運算；先同分母或者真分數的運算有概念性理解，便可以推廣到其它分數；只是在溝通上比較複雜而已。

事實上，所有全數四則運算的概念性理解主要是利用數的主要概念 -- 位值概念；分數四則運算的概念性理解主要是利用分數的主要概念 -- 單位量的部分／全體或者單位分數的計數（李源順，2013）。在小學，把小數看成分母為十的幕次方的分數特例。小數四則運算的概念性理解可以使用全數的概念推廣（使用位值概念），或者分數概念。

負數四則概念可以使用理想化的生活情境來理解。例如+50 表示賺 50 元（或者有 50 元），-50 表示賠 50 元（或者欠別人 50 元）- 動態與靜態。負負得正可以

使用生活當中的逆逆概念來理解；即不是不對，表示對（若將我們將事情理想化二分為對與不對）；以及逆概念-50 表示賠 50 元， $-(-50)$ 表示不是賠 50 元就是賺 50 元。負數的加減運算可以使用金錢的動態（賺了、賠掉）與靜態（有、欠）的概念來解釋。乘法可以使用概念推廣來解釋，例如水庫的水一天上升 5 公分，三天後上升用 5×3 表示(表示與現在的水相比——相對)， $5 \times (-3)$ 表示三天前的水位和現在相比低 15 公分，即-15。 $(-5) \times (-3)$ 只是改變上升為下降。除法則為乘法的逆概念，即與現在的水位相比，三天後上升 15 公分，一天上升 $15 \div 3$ 。三天前是上升 15 公分，即一天下降 5 公分，即 $15 \div (-3) = -5$ 。

四、建議

建議所有四則運算的概念性理解都在一步驟問題中進行。同時全數加法最多為三位加三位；減法最多為三位減三位；乘除最多為二位乘以二位和三位乘以一位)；除法為四位除以二位。分數四則運算的概念性理解，均在真分數的情形下進行教學。帶分數則使用分配律的概念理解，不再說明真分數的概念。小數四則運算的概念性理解：加法最多為二位加二位小數（整部部份一位）；減法最多為二位減二位小數（整部部份一位）；乘除最多為二位乘以一位小數；除法為二位除以一位。負數四則的概念性理解可以使用適度理想化的生活情境來理解，建議只在小的整數來解釋即可，之後便概念推廣到分數、小數。我們相信，假如學生發現數學一直在進行概念推廣，他只要知道較小的數的概念性解釋，較大的數或複雜的運算，他也可以有感覺。

對於學習成效較差的學生，一開始他無法理解，過了一、二年，教師仍應該利用較小位數運算，讓他們有機會概念性理解。至於現在所學較大位數的運算，只要他理解是較小位數的概念推廣便可以了，不必要求他解釋。

較大位數的運算，教師可以允許使用計算機來計算，但是為了使學生能運用計算器處理整數、分數、小數的計算時，能進行合理性的判斷。全數四則運算應讓學生理解 n 位加減乘除 m 位的最多與最少位數相關問題（習慣使用極端例思考）。例如二位數乘以二位數最多是四位數（ $99 \times 99 < 100 \times 100 = 10000$ ），最少是三位數（ $10 \times 10 = 100$ ）。同時也應該適度強調數感的教學。小數四則運算應讓學生理解 n 位小數加減乘除 m 位小數時，最多位小數的相關問題（習慣使用極端例思考）。例如二位小數乘以二位小數最多是四位小數。

參、直角三角比

一、問題

直角三角比在學校課程之教材地位為何？

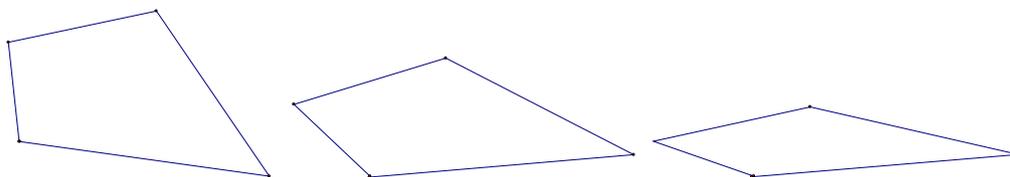
二、直角三角比的發展脈絡與重要性

平面幾何的發展有其脈絡，它可以說是簡化為以直線段為邊的平面圖形，再簡化為三角形、直角三角形，以探究其性質與關係，之後再利用它來解決平面幾

何相關的問題。

因為平面幾何圖形何其多，包括許多邊為非直線段的不規則平面圖形。為了能掌握平面圖形，數學上先探究以直線段為邊的平面圖形(我們忽略圓形不談)，並且在小學的平面幾何課程中，先從視覺的方式認知平面幾何圖形，例如，三角形、正方形、長方形、五邊形、六邊形、...等等。人們為了能掌握這些幾何圖形，在了解其構成要素，例如：頂點、邊、角，並將邊、角等構量化為長度與角度之後，再加以定義與探究其性質，例如：定義正方形的四個角都是直角，四個邊等長，同時它有對角線等長且互相垂直平分的性質。

然而以直線段為邊的平面圖形也非常多，同時我們發現四邊形以上的平面圖形，即使知道它們的所有邊長，也無法固定此一平面圖形，必需再加上它們的夾角，才能固定平面圖形。例如，知道四邊形的四個邊長分別為 2, 3, 4, 5，它的形狀仍然多變，如下圖所示。



為了掌握以直線段為邊的平面圖形，我們發現所有的多邊形都可以切成數個三角形。同時三角形有很好的特性，只要知道三個邊和三內角的其中三個數據，我們幾乎就可以固定此一三角形(知道兩邊和一鄰角，以及三個角例外)。

在三角形的平面幾何課程中，我們會探究一個非特定三角形內，其邊的關係(任兩邊之和大於第三邊)、角的關係(三角形的內角和為 180°)、邊和角的關係(大邊對大角)。我們也會探討一個特定三角形的邊和角關係，例如，直角三角形中，斜邊的平方和等於兩股的平方和)。當然，當我們了解三角形的性質之後，也會回頭檢視四邊形或者多邊形的性質。

除了上述一個三角形內的關係之外，在國中，我們也會探究兩個三角形之間的全等與相似關係。也就是，當我們發現二個三角形三個邊長相等 (SSS)，二個邊和其夾角相等 (SAS)，一個邊和兩個角相等 (AAS, ASA)，則兩三角形全等。當我們發現二個三角形三個邊長成比例 (SSS)，二個邊成比例和其夾角相等 (SAS)，一個邊成比例和兩個角相等 (AAS, ASA)，甚至簡化為只要兩個角相等 (AA)，則兩三角形相似。

進一步探討相似三角形的性質，我們發現一個三角形的三個內角和永遠為定值 (180°)，也就是，我們只要知道其中的兩個角，便知道第三個角，因此，它可以說是有兩個變量的問題。再者，由於直角三角形只有一個變量，我們可以很容易掌握它，也就是說兩個直角三角形，只要知道一個銳角相等，兩個直角三

角形便相似。相似三角形的對應邊長會成比例，它的另一種表現方式為任何兩個邊長的比與其對應邊長的比相等。因此，我們將直角三角形的兩個邊長的比分別定為六個三角函數（我們稱為直角三角比，主要是因為它從直角三角形發展出來的）。

直角三角比之所以重要，最基本的是我們就可以利用它來解決生活中許多與相似相關的問題。例如，我們想要量一個不可能實際去量的長度（例如旗竿的高度），我們可以去量可以量得到的一距離（例如人所的位置到旗竿的距離），以及相對應的角度（例如人所在的位置所測量到的旗竿全長的仰角 - 夾角），我們便可以利用三角函數把它算出來。張春興（1992）也說明三角函數的發展在導航、工程學以及物理學方面都有廣泛的用途。

在數學內的發展，當我們更進一步對三角函數進行探究之後，我們便可以精確的以正弦定理和餘弦定理來精確的描述三角形邊和角的關係。更可以利用它來了解多邊形的邊和角的精確關係。

三、國內課程對於直角三角比內容的安排

現行的九年一貫數學課程沒有教授直角三角比的內容，之前的 83 年課程標準、74 年課程標準與 61 年課程標準有放入三角函數的內容，按課程標準所編寫的教科書處理此一學習內容的方式有所不同。

依據 61 年課程標準所出版的數學第六冊課本(國立編譯館，1985)，在第一章教授「數值三角」，學生需有相似形的先備知識，內容鋪陳從第一節：「銳角的三角函數」開始，接連定義正弦、餘弦、正切、餘切、正割與餘割函數，舉 35 度角為例說明如何求三角函數值，接著進入第二節：「特殊角的三角函數值」，求解 30 度、45 度與 60 度特殊角的三角函數值，並說明三角函數間的關係，第三節：「查表法求三角函數值」教授以查表的方式求三角函數值，最後一節：「簡單的運用」，主要是以三角函數解決簡單測量問題。

至於 74 年課程標準所出版的數學教科書（張春興，1995），將三角函數放到第六冊的選修數學，其標題為「數值三角及其運用」，第一節：「銳角三角函數」從應用問題出發，以特殊角($30^\circ - 45^\circ - 60^\circ$)介紹正弦、餘弦與正切函數的概念，然後才講解餘切、正割與餘割函數的概念，第二節：「三角函數的基本關係」，說明六個三角函數間的關係，並明確說明倒數關係、商數關係與平方關係，第三節：「用查表法求三角函數值」介紹作圖法、查表法與運用電算器求三角函數值，第四節為「三角函數的應用」同樣以三角函數解決簡單測量問題。

按照 83 年課程標準所出版的數學教科書（游自達，2013），同樣將三角函數放到第六冊的選修數學，其標題為「銳角三角函數及其簡易運用」，分為基礎篇

與應用篇，在基礎篇中，課本一開始營造問題情境，在界定鄰邊、對邊與複習相似形的概念，並教授兩個特殊直角三角形($30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 與 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$)的邊長比之後，才介紹正弦、餘弦與正切函數的概念，餘切、正割與餘割函數的概念因時間與篇幅關係略去不教，明確說明商數關係、平方關係與餘角關係；在應用篇中，課本同樣介紹作圖法、查表法與運用電算器求三角函數值，之後進行三角函數的簡單運用。

四、跨國比較的研究發現

陳宜良等人(2005)所進行的數學課程跨國比較研究指出，美國加州的數學課程綱要三角函數最早出現在九年級的選修數學，新加坡則是於八年級介紹簡單的三角比，九年級拓展正弦和餘弦的角度至 180° 度，並使用相關公式，八、九年級的教科書主要教授正弦、餘弦與正切函數的概念，其例題與練習題不受限於特殊角度，而是 180° 度內的任意的角度，包含帶有一位小數的角度，設計讓學生透過查表求解任意角度的問題。英國於第四學習階段(第 10、11 年級) 在圓周上教導三角函數，而非直接在直角三角形上，引進計算器和測繪軟體輔助學習。大陸課程標準在第三學段(7~9 年級) 提到認識銳角三角函數，包括正弦、餘弦和正切概念，以及特殊角之值 (30° 、 45° 、 60°)。韓國在九年級的測量主題開始教授三角函數(0° 至 90°)。日本跟台灣一樣，高中之前完全沒有提到三角函數，高一時開始教授直角三角比，讓學生了解 \sin 、 \cos 、 \tan 是直角三角形的斜邊、對邊及鄰邊所造成的比值，讓學生先有這樣的觀念後才導入函數的觀念，為合理的課程安排方式。

現行的高中課程以一學期的時間完成直角三角比與三角函數的學習，對照其他國家至少以兩年來鋪陳的做法，陳宜良等人(2005)建議我國也應分兩段時間來學習三角函數，於九年級或十年級開始進行直角三角比的學習，並引入科學計算器。若從九年級開始學習直角三角比，在教學時數無法增加的前提下，可以考慮壓縮國中推理幾何的內容與範圍，刪除「兩圓關係」、「弦切角」、「三角形內心」內容，理由為：「兩圓關係及弦切角在各國綱要中均無提及，內心則只有在日本及大陸談及，這一部分刪除並不影響高中的學習」(p. 109)，直角三角比的學習內容聚焦在處理直角三角形特殊角的邊角性質，至於倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係留待 11 年級處理。

五、建議

綜合以上的討論，參考以往的數學標準與其他國家的做法，假如學生瞭解直角三角比的發展脈絡，學習此一內容並不是很困難，加上它是解決生活問題的重要概念，似乎可以放入國中階段的九年級教授，讓中學生有充分的時間學習三角

函數的概念。若放在九年級上學期教授，可以考慮壓縮九上推理幾何課程的內容，刪除「兩圓關係」、「弦切角」、「三角形內心」；若放在九年級下學期教授，可以考慮將九下的機率概念提前至七、八年級，甚至是國小第三學習階段教授。教授內容聚焦在直角三角形特殊角的邊角性質與應用，並引入電算器，至於在以往課程所教授的三角函數關係：倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係，建議延後至高中數學教授。

肆、論證

一、問題

「論證」在十二年國教數學領域的地位與安排為何

二、說明

九年一貫數學課程於「實施要點」和「能力指標」提及論證，「實施要點」提到論證做為讓學習者逐步掌握數、量、形及其相互關係的方法/活動，並以推理證明教學培養學生有能力去辨認論證過程中容易犯的錯誤。「能力指標」在國中階段開始出現論證的相關敘述，大多數出現在幾何的主題：「S-4-19 能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明(A-4-20)⁵」。課程安排是放在八年級與九年級，八年級的分年細目：「8-S-17能針對幾何推理中的步驟，寫出所依據的幾何性質」，此處僅要求學生以填空的方式寫出某些證明步驟所依據的原理；九年級的分年細目：「9-S-12能認識證明的意義」，要求學生在寫證明時，應將每個步驟所根據的理由適當地表達出來，實務上，證明是放在八年級下學期與九年級上學期進行教學。值得注意的是，證明的重要成分：「臆測」(conjecture)並沒有出現在相關的能力指標或分年細目的論述中，該詞僅出現在能力指標與十大基本能力的關係對照表，也就是說九年一貫數學課程在處理論證的學習時並沒有讓學生進行臆測的學習活動，提出與檢驗臆測在數學課室中並不常見，Lin的研究團隊(2003)即發現國內許多中學生仍無法寫出可接受的證明論述，學生的解題能力與證明的能力並未獲得充分發展。

就數學學科的本質，以及十二年國民基本教育以核心素養的培養(國家教育研究院，2013)做為主軸來看，論證在數學學習領域佔了相當重要的地位，應該從國小一年級開始安排學習活動，以達成提昇數學素養的目標：「學習並發揮數學思維的特長，讓學習者能有條有理的進行分析與推論」(教育部，2013)，美國的《學校數學與課程標準》(*Principles and standards for school mathematics*)

⁵ 此處呈現方式按九年一貫能力指標的呈現方式，亦即 A-4-20 和 S-4-19 並列，A-4-20 沒有出現在代數學習內容。

(NCTM, 2000)認為有能力進行論證是數學理解的根本，從學前階段即把「推理與證明」列入課程標準，要求從學前到十二年級(K-12)，數學教學應該使所有的學生：(1)認知到推理與證明是數學的根本；(2)提出與探究數學臆測；(3)發展與評估數學論述與證明；(4)選擇與使用多種推理與證明方法，並指出臆測對於 K-12 學生學習論證的重要性，希望高中生畢業時有能力理解與寫出由前提至結論邏輯嚴謹的論證所組成的數學證明，並欣賞論證的價值。目前於美國許多州實施的新一代數學課程標準：《各州共同核心標準》(*Common core states standards for mathematics*) (Common Core State Standards Initiative, 2010)，也提出培養 K-12 階段學生有能力建構可行的論述與批判他人的論點，建議從小一開始藉由幾何形狀與其特性的推論來學習論證。

德國的所進行的數學課程改革：mathe 2000，界定數學為「模式的科學」(the science of patterns)(Wittman, 2005)，其本質為準經驗(quasi-empirical)，數學的一般特徵在於探索模式與找出證明，認為所有學習階段的數學教學需反映數學活動的四個基本組成：數學化、探索、推論與溝通，建議應用四個階段的數學活動具體打造學習環境(substantial learning environment)：一、首先讓學習者探索真實或數學的情境，而該情境是鑲嵌於一個更寬廣的數學結構中；二、讓學習者以試驗的方式探索數學結構，發現其中的模式或解答；三、若經過多次試驗確認模式是正確的，要求學習者進行論證來解釋與驗證模式或解答；四、以口語或書寫方式溝通結果。Wittman(2005)進一步舉了許多例子說明從小一階段開始就可以應用具體操作(像是籌碼)或圖形表徵來察覺模式與進行論證，而且論證的對象不限於幾何，代數(例如：arithmogons)與算術(例如：ANNA 型數字)皆可進行論證，他特別指出操作型證明在教育上的益處，在形式證明的學習之前應讓學生充分獲得操作型證明的學習經驗。

三、建議

綜合以上所述，從數學學科的本質與十二年國民基本教育的理念來看，「論證」在十二年國教數學學習領域佔有相當重要的地位，其學習或教學活動的安排可以比九年一貫數學課程更為提前，就先進國家的經驗來看，提前至小一進行論證的學習活動是可行的，Wittman 所提出的四階段數學活動可做為論證教學的參考，讓學生進行操作型證明檢驗與溝通他們經由探索所察覺出的模式或解答。

伍、空間概念

一、問題

空間概念如何在十二年的課程中得到有效而適切的发展？本節聚焦在視覺化、視覺推理與視覺溝通三個向度進行討論。

二、說明

檢視現行數學課程，在小學階段發展了認識基本形體的空間概念，但是在7—10年級中斷，到了11年級急速地進入包括兩面角、截面圖形、平面的所有垂線皆平行、通過面外一點僅有一張平行面、點到直線或點到平面的投影等空間概念，並且立即跟進空間坐標、空間向量、三階行列式等操作型內容，是否造成學習躍進不易？是否有失課程連貫學習發展的原則？皆值得在12年國民基本教育的新課綱中，全面地重新考量。

關於空間概念的另一個問題是，我國數學課程尚未嚴肅探討操作型的空間幾何，而這項課題是講究設計、美感、視覺溝通的新時代重要課題（有了電腦多媒體以及網路的時代），包括新加坡、美國在內的數學課程，都明訂這些課題的學習指標。舉例而言，新加坡從小學起就有「拼貼」(tessellation) 課題，並由政府領導開發視覺化的教學軟體，包括立體圖形在平面螢幕上的視角旋轉、放大、縮小等。美國課綱也指出須以透明片、實體或電腦軟體進行的空間概念課題。這些教學軟體與課程目標，都希望教給學生視覺溝通與視覺推理的概念和能力。

但是，不僅空間概念應大量使用「視覺化」的教學方法，互動式軟體或動畫解說對平面幾何、機率統計、排列組合、函數關係、微積分等數學學習內容都有寬裕的應用可能。總之，空間概念教學的成敗，以及視覺化的認知、視覺溝通和視覺推理，攸關國民的基本素養，應受到合宜的重視。

三、建議

空間概念宜基本上逐年發展，在課程中形成一條清楚的脈絡。

我們就活在（三維）空間裡，宜研發一套教師備忘錄，在教室、學校或當地生活環境中，列舉可以運用的空間概念範例。

順應學生的認知發展，準備必要的實體、透明片、軟體教具。

軟體教具應有充分的互動性，讓學生有機會用以發展視覺化，視覺溝通與視覺推理的能力。

將「視覺化」教具製成短片，由「磨課師」平台發佈，以「翻轉教室」觀念直接訴諸於學生，減輕教師負擔並可減輕教師培訓的壓力。

陸、轉移矩陣、信賴區間、插值多項式、外積、用向量處理平面幾何

一、問題

「轉移矩陣」、「信賴區間」、「插值多項式」、「空間向量的外積」、「用向量處理平面幾何」等特殊課題是否應該留在 10—12 年級的必修課程中？

二、說明

上述課題是自從 95 暫綱與 99 課綱實施以來，最常被教師們或課程設計同仁們檢討的。其中「轉移矩陣」將矩陣計算連結機率，還發展出極限觀念，而那事實上是特徵向量，是一個高度綜合性的課題。轉移矩陣固然是高中數學裡最美的課題之一，但是它超過中學的矩陣教學目標太多，而且它是我國數學課程所獨有。

高中教師們都贊成信賴區間的實用性，也能認同統計課題在數學教育裡的重要份量，但是「信賴區間」的確造成教學現場頗大的困擾。在高中數學的機率與統計範疇中，一直以離散量與古典機率為主軸。信賴區間卻必須在連續隨機變數上說明，而它在目前課綱中的位置甚至還先於積分，許多中學教師確實努力想要教好這個課題，但是客觀條件使他們備感艱辛。

「插值多項式」的實用性，以及與其他數學課題的內部連結，都逐漸受到教師們認同；而且，在教材準備與教法熟練度上，也都越來越順手。可是，教師們指出學生在此課題的學習成效不彰，以高一學生的成熟度，不能體會插值多項式的妙處，也無法內化其概念，在往後與其對照、連結。

「空間向量的外積」是處理平面方程式問題的利器，但是不論它的方向或長度，都對社會組學生造成頗大的障礙。這項技術，已經仰賴它而處理的較進階空間坐標幾何問題，是否可以僅限於自然組的學生學習？

用「向量」技術處理平面幾何問題，是中學教師同仁們心愛的「絕招」。99 課綱的數學Ⅲ「圓與直線關係」引發了向量該放在之前還是之後的論戰。而這番論戰引起我們注意到，其他國家的數學課程可以說「都沒有」這個課題。此外，略為檢視學生們的考試表現，以及 TASA 測驗的結果，都不能支持學生在向量方面的學習成效。物理課程所須的向量，在數學的向量課題中僅佔極少的一部份。我們真的須要向量「絕招」嗎？

三、建議

矩陣的教學目標應更準確地為了線性代數之核心概念而發展，可考慮刪除不直接相關的課題。

可參考符合美國 CCSS 課程標準的教材，看看他們怎樣介紹了統計推論，卻避談技術性的信賴區間？或者，著實發展曲線下面積的概念，然後（在選修課程中）確實發展連續型隨機變數的分佈概念。

搭配空間概念的一貫性發展，思考「全體國民」該具備的空間概念與操作、溝通能力到哪裡？據以討論「向量外積」及其相關課題在必修課程中的份量。

請參閱單維彰（2013b）「向量在高中數學課程裡的份量」，檢視其他國家在必修教材中的向量課題。

柒、線性代數

一、問題

是否該在普通高中課程裡強化線性代數？它的關鍵概念有哪些？

二、說明

無須贅言，隨著計算工具的長足發展，人們蒐集並整理資料、分析數據作為任何判斷或決策之基礎的典範方法，已經跟著改變了。這是統計學變得更重要的理由，同時也是各種離散數學變得更重要的理由。或許，微積分以及連續數學的地位並不會因此而減損，但是下一個世代肯定更常以離散模型作為思考與計算的對象。泛屬於離散數學的古典機率、數據分析、排列組合本來就在我們的課程裡，而線性代數的內容是否足夠為學生做好準備？或者它的教學目標是否明確對準了升學與就業的需求？是這個議題想要請大家討論的。

如果要在高中階段極為珍貴的授課時數內，加入線性代數的核心觀念（Big Ideas），那麼有哪些是最高優先的？讓我們假設全部的線性代數課題都限於平面，那麼該是線性組合的形式和意涵嗎？線性映射保持線性組合的特性嗎？線性映射必可根據基底而以矩陣表達嗎？線性映射的合成關係與矩陣相乘的意涵嗎？

三、建議

在「線性代數」的大目標下，檢視向量與矩陣的教學目標，並討論如「轉移矩陣」課題的必要性。

將傳統的線性聯立方程式，放在線性代數的脈絡中檢視，發展必要的核心觀念。

請參閱單維彰（2013c）「美國各州共同數學課程標準」的高中階段（9—12年級），檢視其向量課題如何簡明地銜接上線性代數主題。

捌、多項式微積分

一、問題

是否該以多項式函數為限，提早學習微積分？如何切入？

二、說明

外國的數學課程都有將微積分提前到高中二年級的趨勢（美國的 AP 微積分課程多半被 11 年級學生選讀），而且，社會組當中，以商務、管理、經濟與金融為升學志向的學生，也亟需基礎的微積分知識。高中的微積分課程，最重要的存在價值，並不是為了大一微積分而準備，而是為了進入大學之後，同樣屬於一年

級必修的部分專業課程。越來越多的大一專業課程教科書，在很早的篇章裡，就自由地引用了微分或積分的觀念。在那個時期，大一微積分課程通常都還沒有完成微分學的章節。

數學界先進或許都能同意，(大一的)微積分並不難，難的是它的「嚴格性」。適度略過十九世紀的嚴格性，回到十七世紀的原初面貌，特別是將研習的範圍限於多項式時，微積分並不比複數平面、向量、乃至於推論統計困難。而且，提早引進多項式微分學，有三個令人期待的「副作用」：

微分學的大目標，為多項式除法（因式與餘式定理）找到了重要的著力點，為多項式求根與不等式求解找到了重要的應用，甚至為許多適合用數學歸納法處理的規律現象，找到了有趣而動機明顯的問題源頭。

透過多項式除法（綜合除法）對「極限」符號所做的初階認識，可以為將來進一步探索極限概念，提供具體的經驗和心象模型。

物理就能接著用了，並且可以將微分的物理（速度、加速度）意涵，交給物理課繼續發展，必要時數學再接回來發展微分均值定理，以及積分的位移意涵，並據以輕鬆地說明微積分基本定理。

三、建議

請參閱單維彰(2009)「高中課程需要怎樣的微積分」檢視較為詳細的論述，以及大一專業課程很早使用微積分的調查，文中也述及上述現象的可能原因。

請參閱單維彰(2013a)「日本高中數學課本簡報」檢視今年採集的一套日本高中數學教科書。日本的前九年數學課程，跟我國一樣編得較淺較緩，但是我們認為日本的高中數學課程是對準了微積分而設計的。在必修課程裡，他們為學生設想了一條從國中數學直達微積分的最短路徑。

第四節 數學領域與社會重要議題之融入模式

在素養導向的理念下，七大重要議題的融入，在數學領域主要採情境融入方式進行，以期使國民能了解數學在重要議題的適用時機，也潛移默化國民對重大議題的認知。例如，環境保護的真實統計相關資料，可以融入不確定性與資料等相關主題。使用資訊做為複雜數據的處理工具，或者呈現相關統計圖表，以利國民數學素養的養成。利用海洋相關的問題情境做為不確定性概念的素養脈絡。將性別平等、人權、生涯發展等議題，適度融入各主題適當單元的學習內容。

第五章 結論與建議

第一節 結論

壹、數學領域的理念與目標

一、課程架構

我們以中文的「知」、「行」、「識」來架構 12 年國教數學課程的內涵，如圖 4-1。

「知」就是「學什麼」或者「是什麼」，指的是數學內容；它包括數學素養所強調的改變與關係、空間與形狀、數量、不確定性和資料。

「行」就是「怎麼做」或者「怎麼用」，指的是學生所能展現出來的數學能力，包括程序執行、解題、溝通、論證等等現今數學教育主要的面向。

「識」就是「為什麼」、「你認為」、「是什麼」，指的是對數學的內在認知與情意涵養，包括概念理解、推理、連結、後設認知、以及欣賞數學的美。

二、基本理念

我們抽取出數學的特性，提出數學是一種語言，以及數學是一種規律的科學的基本理念。

簡單的數學語言融合在人類生活世界的諸多面向，宛如另一種母語。精鍊的數學語句，則是人類理性對話最精確的語言。從科學的發展史來看，數學更是理性與自然界對話時最自然的語言。

數學是規律的科學，指在探究現實世界的內在理路與規律，進而運用已了解的規律來解決現實世界的問題。

三、課程目標

12 年國教數學課程的願景是要達成為所有的人 (for all)，為了生活的品質 (for healthy life)，以為大學和職業做準備 (university and career readiness)。

為了達成數學課程的願景，本計畫提出在知、識、行之中滾動，以涵養出轉換性與結果性的課程目標。

轉換性目標的意思是主動學習數學內容 (知)，培養學童概念理解、推理、連結、後設認知 (識)，學生能進行演算、解題、推論及溝通 (行)。

結果性目標就是達成我們設想的願景，使我們的 18 歲國民在往後的十年內培養出數學素養與知能，讓他能在學習、工作、生活領域上產出成果與價值。

四、核心素養

未來依據所擬定之數學綱要發展教材時，應考量九大項目之核心素養之培養

機會。

五、學習重點

A.表現指標：包含認知、情意、技能

B.基本內容：包含事實知識、概念知識、程序知識以及後設認知知識

貳、數學領域的內容修改建議

本計畫針對八處數學學習內容，分別提出修改建議。這八處內容分別為不確定性與數據處理，12年國教課程修訂之建議：數的四則運算之概念性理解，直角三角比，論證，空間概念，轉移矩陣、信賴區間、插值多項式、外積、用向量處理平面幾何，線性代數，以及多項式微積分。

至於學習內容是否過量或者重覆，因涉及數學教學時數，以及全體國民的不同需求，因此需要更嚴謹的進行意見收集與分析。

參、學習階段與學習內容與組織方式

十二年國教課程綱要總綱，將十二年的學校教育區分為第一階段：一到二年級，第二階段：三到四年級，第三階段：五到六年級，第四階段：七到九年級，以及第五階段：十到十二年級（高中、高職）。但是，為搭配共同核心內容實施至十年級的構想，並關注十二年國教對九年級教學現場即將造成的關鍵性影響，建議在概念上，將數學課程的設計分為三個學習進程。根本進程（1—4年級）主要發展基本數學，奠定日後學習數學的基礎；核心進程（5—10年級）主要發展核心數學，以培養學生的數學素養；分流進程（11、12年級）主要學習分流的數學課程，為升學、就業做準備。

因為十二年國民基本教育以素養為核心，因此，我們將內容主題訂為**改變與關係、空間與形狀、數量、資料分析與不確定性**等四大主題。

依據本研究課程架構、理念與學習進程、以及四大主題，本研究認為可以思考在不同進程中，知、行、識有不同的權重分配，至於精確的比例分配，可以需要進一步深入研究。

肆、社會重要議題之編織

在素養導向的理念下，七大重要議題的融入，在數學領域主要採情境融入方式進行，以期使國民能了解數學在重要議題的適用時機，也潛移默化國民對重大議題的認知。

第二節 建議

在此十二年國教課程綱要總綱之研擬時期，數學領域最迫切、最核心、最關鍵的建議，就是

「數學」作為一種語言，是所有學習的共同基礎，至少在學校

教育的前期，應該被視為語文，而不宜與其他學習領域並列，平分學習時數。

更進一步闡述，數學領域為了

- 一、以基礎的數學語言教育，備妥所有學習領域所須的共同基礎
 - 二、以論證與說理的教育，協助形塑國民之理性與批判思考素養
 - 三、以合宜的授課時數，協助處理學習壓力過大與教育機會不公平之社會問題
- 務必在謹守「作為一種語言」的功能性原則之下，全面並審慎地，與社會各界及其他領域，共同安排數學課程的內容及進度。數學教育願負起責任達到社會與學術各界的期望，但請給予數學領域更適當的學習時數。

在十二年國教數學課程的內容上，本研究指出八個修訂方向，薦請未來的數學領綱同仁參考。但是，若教學時數之核心問題無法突破，數學領域將沒有足夠的實施條件。除非降低全國國民的共同核心能力，並且延後所有自然科學與社會科學（包括理財教育）須數學基礎的學習時間（或者由各領域教師自行補足），現在分配給數學領域的學習時數，將有本質上難以突破的障礙。

對於未來數學課程綱要的研修，研究團隊建議如下：

- 一、十二年國教數學課程的理念，應基於「數學是一種語言」與「數學是規律的科學」的本質來研擬。
- 二、十二年國教數學課程目標應根據上位目標來研擬「轉換性目標」與「結果性目標」。
- 三、未來在知、識、行課程架構的敘寫需要讓教學者、評量者、編教科書者都能了解，讓「意圖的課程」(intended curriculum)與「實施的課程」(implemented curriculum)之間能夠有良好的銜接。
- 四、未來課綱的研修在不同學習進程對於「知」、「識」、「行」的安排須有權重的做法。
- 五、八大學習內容的增添、刪除或移動應於十二年國教數學領綱研修時進行處理。
- 六、數學課程的內容表述方式，應該以培養學生數學素養的方式來表述，或者以提升學生數學知能、能力和素養的方式來表述。

參考文獻

- Cohen, L.、Manion, L.、Morrison, K.(2011)。*Research methods in education*。London：Routledge。
- Common Core State Standards Initiative (2010)。 *Common core state standards for mathematics*. Common Core State Standards Initiative. Retrieved 2013.11.02, from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.
- De Lange, J. (1999)。 *Framework for classroom assessment in mathematics*. *Unpublished manuscript*. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Department for Education (2013a)。 *The national curriculum in england: Framework document*. Retrieved 2013.11.18, from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/254336/MASTER_final_national_curriculum_11_9_13_2.pdf.
- Department for Education (2013b)。 *National curriculum in england: Mathematics programmes of study (statutory guidance)*. Retrieved 2013.11.18, from <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>.
- Finnish National Board of Education (2004)。 *National core curriculum for basic education 2004*. Retrieved 20130814, from http://www.oph.fi/download/47672_core_curricula_basic_education_3.pdf.
- Klieme, E.、Avenarius, H.、Blum, W.、Döbrich, P.、Gruber, H.、Prenzel, M.、...、Vollmer, H. J. (2004)。 *The development of national educational standards: An expertise (eng. Version)*. Berlin: Federal Ministry of Education and Research (BMBF).
- Lew, H.-C. (2012)。 *New challenge in the new 2011 revised curriculum of korea: Mathematics attitude*. Retrieved 2013.11.17, from <http://apec-lessonstudy.kku.ac.th/Apec%20Khon%20Kaen2012/documents/Hee-chan%20Lew.pdf>.
- Singapore Ministry of Education (2012)。 *Primary mathematics teaching and learning syllabus*. Ministry of Education, Singapore. Retrieved 20130814, from <http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-primary-2013.pdf>.
- Takahashi, A.、Watanabe, T.、Yoshida, M. (2008)。 *English translation of the japanese mathematics curricula in the course of study*. Retrieved 2013.11.17, from http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/Japanese_COS2008Math.pdf.
- 中華人民共和國教育部 (2011)。*義務教育數學課程標準 (2011 年版)*。中華人民共和國北京：北京師範大學出版集團。

- 李源順 (2013)。數學這樣教：國小數學感教育。台北市：五南出版社。
- 林宜臻 (2010)。中小學數學課程內涵與取向之研析。教育部「中小學課程發展之相關基礎性研究」，區塊研究二之「中小學課程內涵與取向的研析」整合型研究子計畫二。新北市：國家教育研究院籌備處。
- 林福來 (2012)。統計教育研究—人才培育與資訊整合總計畫。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (編號 98-2511-S-003-004-M)。台北市：國立台灣師範大學。
- 香港特別行政區政府教育局 (2013)。數學教育學習領域—數學課程指引。香港。2013.11.17 檢自
<http://www.edb.gov.hk/tc/curriculum-development/kl1a/ma/curr/index2.html>。
- 國家教育研究院 (2012)。建置十二年國民基本教育課程體系方案。新北市。2013.11.20 檢自
<http://www.naer.edu.tw/files/15-1000-1844,c442-1.php?Lang=zh-tw>。
- 國家教育研究院 (2013)。十二年國民基本教育課程綱要總綱 (草案)。新北市：國家教育研究院。
- 張春興 (1992)。張氏心理學辭典。臺北市：東華書局。
- 張春興 (1995)。教育心理學-三化取向的理論與實踐。臺北市：東華書局。
- 教育部 (2008)。97 年國民中小學九年一貫課程綱要。台北市：教育部。
- 教育部十二年國民基本教育網站 (2013)。十二年國民基本教育課程綱要研修的問與答。台北市。2014.11.17 檢自
<http://12basic.edu.tw/Detail.php?LevelNo=140>。
- 教育部提升國民素養專案辦公室 (2013a)。數學素養向度建議文。台北市。20130804 檢自
<http://literacytw.naer.edu.tw/data/cht/20130725/20130725ok8od1.pdf>。
- 教育部提升國民素養專案辦公室 (2013b)。關於我們：未來遠景。台北市。20130804 檢自 <http://literacytw.naer.edu.tw/index.php>。
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛 (2005)。中小學數學科課程綱要評估與發展研究。台北市：國立台灣大學。
- 黃毅英、韓繼偉、李秉彝 (2005)。數學課程：趨向全球化還是趨向西方化？載於 範良火等主編：華人如何學習數學。江蘇：江蘇教育出版社。
- 劉柏宏 (2004)。從美國「數學戰爭」看台灣的數學教育。數學傳播，28(4)，3-16。
- 單維彰 (2009)。高中課程需要怎樣的微積分。科學月刊，40 (2)，94。
- 單維彰 (2013a)。日本高中數學課本簡報。科學月刊，44 (7)，490。
- 單維彰 (2013b)。向量在高中數學課程的份量。科學月刊，40 (3)，127。
- 單維彰 (2013c)。美國各州共同數學課程標準。科學月刊，44 (9)，2-4。
- 游自達 (2013)。發展學生量感的數學教學檢自
http://140.128.213.4/qxesweb/uploads/tadnews/file/nsn_757_1.pdf。

附錄一 數學領域之理念與目標

壹、國小、國中、高中分別制定的年代

一、國小課程

(一) 64~89 年

民國 64 年，教育部正式公佈「國民小學數學課程標準」。其課程目標為

1. 養成數、量、形的正確觀念，進而考慮其形成的需要與功能。
2. 學習數、量、形的基本知識與原理，獲得其基本技能，進而有效地提高在生活上的實踐能力。
3. 能運用數、量、形之間的相互關係，及使用適當的數學語言，進而解決日常生活中有關的問題。
4. 養成從數學的觀點考慮日常事項的興趣與習慣，進而運用數學的知識與方法，發展其推理、組織與創造能力。

(二) 82~92 年

民國 82 年，教育部頒布「國民小學數學課程標準版課程標準」。教育目標為：

1. 養成運用數學知識與方法，解決問題的能力
2. 讓兒童從自己的經驗中，建構與理解數學概念
3. 培養使用數語言溝通、討論，講道理與批判事物的精神
4. 養成在日常生活中善用各種工具從事學習與問題解決。

二、國中課程

(一) 51 年

51 年修訂之中學數學課程標準，課程目標為：

1. 瞭解形與數之性質及關係，並熟悉運算之原則與方法。
2. 供給日常生活中數學之知識，並啟發學生研究自然環境中數量之問題。
3. 訓練關於計算測量之工具及作圖之技能，使有準確迅速及精密整潔之習慣。
4. 培養以簡取繁以已知推未知之能力。

(二) 57 年

57 年制定之國民中學數學課程標準，課程目標為：

1. 瞭解形與數之性質及關係，並熟悉運算之原則與方法。
2. 供給日常生活中數學之知識，並啟發學生研究自然環境中數量之問題。
3. 訓練關於簡單計算測量之工具及作圖之技能，使有準確迅速及精密整潔之習慣。
4. 培養以簡取繁以已知推未知之能力。
5. 使學生認識數學之特質。

(三) 61 年

61 年修訂之數學課程目標為：

1. 使瞭解形與數之性質及關係，並培養其對空間函數的直觀概念。
2. 訓練學生關於計算查表及基本做圖技能。
3. 培養以簡取繁以已知推未知之能力。
4. 供給學生日常生活中數學的知識，使其認識數學之應用價值，並啟發其研究自然環境中數量問題的興趣。

(四) 72 年

72 年修訂之數學課程目標為：

1. 引導學生認識數學的功用，以提高學習興趣。
2. 輔導學生以獲得數、量、形的基本知識與技能。
3. 培養學生思考、推理的基本能力。
4. 配合教育輔導，鑑別與試探學生數學的能力。

(五) 74 年

74 年修訂之數學課程目標為：

1. 引導學生認識數學的功用，以提高學習興趣。
2. 輔導學生以獲得數、量、形的基本知識與技能，以為日後研究的基礎。
3. 培養學生思考、推理、與創造的能力。
4. 配合教育輔導，鑑別與試探學生數學的能力。

(六) 83 年

83 年修訂之數學課程目標為：

1. 引導學生認識數學的功用，以提高學習興趣。
2. 輔導學生以獲得數、量、形的基本知識與技能，以提升數學素養。
3. 培養學生運用數學方法解決問題的習慣與能力。
4. 啟發學生思考、推理、與創造的能力。
5. 培養學生主動學習的態度及欣賞數學的能力。

三、高中課程

民國 18 年公布中學課程標準之後，曾歷經多次修訂。民國 60 年為配合國民中學首屆畢業生而修訂高級中學課程標準，民國 72 年為配合高級中學法而修訂高級中學課程標準，民國 84 年為因應社會變遷而修訂高級中學課程標準。

(一) 60 年

60 年的課程目標為：

1. 確立學生對數、空間、函數等基本概念，並使熟悉其基本性質與應用。
2. 闡述思考方法，培養學生思考能力。
3. 供給研究其他學科所必需的數學基本知識，以充實其探討自然現象與社會現

象的能力。

(二) 72 年

72 年的課程目標為：

1. 素養方面：了解數學的一般內容、方法與意義，以為立身於現代社會所需的基礎素養。
2. 訓練方面：熟悉以數、量、形與函數為中心的題材，增進基本的數學能力，並激發潛在的創造力。
3. 應用方面：了解數學具有描述自然與社會現象的功能，以備應用於實際生活與各種學科。

(三) 84 年

1. 引導學生瞭解數學的內容、方法與精神，培養學生用數學方法思考問題的素養與能力。
2. 增進學生的基本數學能力，奠定學習相關學科的基礎。
3. 提供學生在實際生活與未來生涯所需的數學知能。
4. 培養學生欣賞數學內涵簡明有效及結構嚴謹優美的特質。

貳、九年一貫與高中課程年代

一、九年一貫課程目標

(一) 89~98 年

民國 89 年，教育部頒佈「九年一貫課程數學領域暫行綱要」。數學科改稱為數學學習領域，同時將課程分為五大主題：數與量、幾何、統計與機率、代數、以及連結。課程目標為：

1. 掌握數、量、形的概念與關係。
2. 培養日常所需的數學素養。
3. 發展形成數學問題與解決數學問題的能力。
4. 發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。
5. 培養數學的批判分析能力。
6. 培養欣賞數學的能力。

九年一貫數學課程綱要能力指標將 1 至 3 年級規劃為第一階段，4 至 5 年級規劃為第二階段，6 至 7 年級規劃為第三階段，8 至 9 年級規劃為第四階段，沒有各個年級的分年指標。

(二) 92 年~104 年

民國 92 年 11 月 14 日，教育部頒佈「九年一貫數學領域課程綱要」。數學學習領域的教學總體目標為：

1. 培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力。
2. 學習應用問題的解題方法。

3. 奠定下一階段的數學基礎。
4. 培養欣賞數學的態度及能力。

其中，國民小學階段的目標為：

1. 在第一階段（一至三年級）能掌握數、量、形的概念。
2. 在第二階段（四至五年級）能熟練非負整數的四則與混合計算，培養流暢的數字感。
3. 在小學畢業前，能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單幾何形體的幾何性質、並理解其面積與體積公式；能報讀簡單統計圖形並理解其概念。

國民中學階段的目標則為：

1. 能理解坐標的表示，並熟練代數的運算及數的四則運算。
2. 能理解三角形及圓的基本幾何性質，並學習簡單的幾何推理。
3. 能理解統計、機率的意義，並認識各種簡易統計方法。

(三) 97 年之後

民國 97 年依據微調結果公布「97 年國民中小學九年一貫課程綱要」(教育部，2008)。數學學習領域的教學目標訂為：

1. 第一階段(國小一至二年級)：能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形之認識。
2. 第二階段(國小三至四年級)：在數方面要能熟練自然數的四則與混合計算，培養流暢的數字感；另外，應初步學習分數與小數的概念。在量上則以長度的學習為基礎，學習各種量的常用單位及其計算。幾何上則慢慢發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。
3. 第三階段(國小五至六年級)：在小學畢業前，應能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積或體積之計算；能製作簡單的統計圖形。
4. 第四階段(國中一至三年級)：在數方面，能認識負數與根號數之概念與計算方式，並理解坐標表示的意義。代數方面則要熟練代數式的運算、解方程式，並熟悉常用的函數關係。幾何方面要學習三角形及圓的基本幾何性質，認識線對稱與圖形縮放的概念，並能學習簡單的幾何推理。能理解統計與機率的意義，並認識各種簡易統計方法。

課程目標的達成，希望可以培養學童的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定高中階段的數學基礎，並希望能培養學童欣賞數學的態度及能力。

二、高中課程

民國 94 年配合九年一貫課程實施修訂高級中學課程暫行綱要。有關普通高中、高級職業學校、和綜合高中之數學課程目標如下：

(一) 普通高級中學之課程目標

普通高級中學必修科目「數學」課程欲達成的目標如下：

1. 培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。
2. 培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能。
3. 培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。

(二) 高職數學之課程目標

高職數學課程分為 A, B, C, S 四種

1. 引導學生瞭解數學概念與函數圖形，增進學生的基本數學知識。
2. 培養學生基本演算與識圖能力，以應用於解決日常實際問題及(A: 未來工作領域；A: 商業專業及資訊應用領域；C: 工程專業及資訊應用領域；S: 表現藝術之動、靜化相關物理及資訊應用領域)內實務問題。
3. 訓練學生運用電算器與電腦軟體解決日常實際問題及(A: 未來工作領域；B: 商業專業及資訊應用領域；C: 工程專業及資訊應用領域；S: 表現藝術之動、靜化相關物理及資訊應用領域)內實務問題。
4. 增強學生基礎應用能力，以培養學生未來就業、繼續進修、自我發展的能力。

(三) 綜合高中之課程目標

綜合高中必修科目「數學」課程欲達成之目標如下：

1. 引導學生了解數學的基本概念，以增進學生的基本數學知識。
2. 培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。
3. 訓練學生的演算與作圖能力，以應用於處理事務的技能。
4. 培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能。
5. 培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。
6. 造就學生的基本能力，以培養繼續進修、自我發展的能力。

附錄二 領域時數/學分數及學習內容

壹、國小、國中、高年課程年代

一、國小

林宜臻（2010）收集歷年數學課程綱要，本文摘錄 57-82 年版的國小數學教學時數、及課程學習內容，如表 2-6。

表2-6 57年-82年國小數學課程的教學時數與課程內容

年度	教學時間(每週)	課程內容
57	一、二年級 90 分鐘 三、四年級 180 分鐘 五年級 180 分鐘 六年級 210 分鐘	數、集合、實測、計算、簡易錢幣的認識
64	一、二年級 120 分鐘 三年級 160 分鐘 四年級 200 分鐘 五、六年級 240 分鐘	數與量、實測與計算、圖形與空間、統計與圖表、集合與關係、術語與符號
82	一、二年級 120 分鐘 三、四年級 160 分鐘 五、六年級 240 分鐘	數與計算、量與實測、圓形與空間、統計圖表、數量關係、術語與符號

二、國中

林宜臻（2010）收集歷年數學課程綱要，本文摘錄 57-82 年版的國中數學教學時數、及課程學習內容，如表 2-7。

表2-7 57年-82年國中數學課程的教學時數與課程內容

年度	教學時間(每週)	課程內容
57	第一、二、三學年：3-4 節	第一學年：集合之概念，數之計法，非量幾何，自然數與整數，有理數，度量，面積、體積、重量與時間，比例、小數、百分法，簡單之直線形，圓之簡單性質，統計圖表 第二學年：有理數與座標，方程式簡介，基本作圖，誤差，實數，相似三角形與變數法，直

		<p>線與圓之他種性質，非量立體幾何</p> <p>第三學年：數線，數字與變數，數學語句，實數之次序，算術級數與幾何級數，根數，多項式與有理式，開放語句之真集，一次式與二次式之函數，變數之開放語句，方程組，函數</p>
61	<p>第一、二、三學年：3-4 節</p> <p>第三學年另增選課 2 小時</p>	<p>第一學年：算術四則問題的複習；用符號代表未知數，如何把問題立式；文字 x 的引入，代數解法與算術解法的比較；負解、負數；整數與直線上的點；一元一次方程式；二元一次聯立方程式；多項式；因數分解、因式分解、因式分解法、二次方程式；最高公因式與最低公倍式；分式</p> <p>第二學年：簡單幾何圖形；開方法；近似值、誤差、查表法；比例與相似形；平面上的座標，一次方程式；二次方程式及複數；二次方程式的應用；二次函數的圖形，極值問題；分式方程式；統計圖表</p> <p>第三學年：三角形；四邊形；相似形；圓；簡易做圖；數值三角；等差數列與等比數列</p> <p>選修：一元二次方程式；根式與無理數；一元二次不等式；簡易二元二次聯立方程式；三角函數；指數與對數；三角形的心</p>
72	<p>就業取向者：</p> <p>第一學年：3-4 節</p> <p>第二學年：2 節</p> <p>升學取向者：</p> <p>第一學年：3-4 節</p> <p>第二學年：4 節</p> <p>第三學年：4-6 節</p>	<p>第一學年：</p> <p>第一冊：量與數；正負數的四則運算；簡單幾何圖形</p> <p>第二冊：一次方程式；平行；直角座標與二元一次聯立方程式的圖形</p> <p>第二學年：</p> <p>第三冊：乘法公式；二次三項式的因式分解及應用；近似值與開平方根</p> <p>第四冊：簡單立體圖形；比例及其應用；統計資料處理</p> <p>選修</p> <p>第二學年：比例與函數；乘法公式與多項式；方根與開方；一次不等式；簡單立體圖形；因式分解；方程式；等差數列與等比數列；資料的整理</p> <p>第三學年：幾何與證明；三角形；圓；相似形；</p>

		二次函數；數值三角及其應用；機率與統計
74	第一學年：3-4 節 第二學年：4 節 第三學年：4-6 節	第一學年：量與數；正負數的四則運算；簡單幾何圖形；一次方程式；平行；直角座標與二元一次聯立方程式的圖形 第二學年：近似值與開平方根；比例與線型函數；乘法公式與多項式；方根與用查表法求方根；一次不等式；因式分解；方程式；等差數列與等比數列；資料的整理 第三學年：三角形；四邊形；相似形；圓；二次函數；數值三角及其應用；機率與統計
83	第一學年：3 節 第二學年：4 節 第三學年：2 節+(2 節個別差異教學) 數學選修 第一學年：1-2 節 第二學年：1-2 節 第三學年：2 節	第一學年：數與數線；因數與倍數；直角座標與二元一次聯立方程式的圖形；比與比例；近似值與方根 第二學年：乘法公式與多項式；因式分解；一元一次方程式；一次與二次函數；簡單的幾何圖形；三角形的基本性質；平行 第三學年：相似三角形；四邊形；圓；等差數列與等比數列；資料的整理與機率

三、高中

年度	教學時間(每週)	課程內容
62	自然學科： 第一學年：4 第二、三學年：6 節 社會學科： 第一、二、三學年：4 節	自然學科 第一學年： 集合與數系大意、直線形、圓與球、比與相似形、面積、空間直線與平面之關係位置、角柱與圓柱、角錐與角柱、二度坐標與圓形、函數與反函數、三角函數、三角恒等式、任意角函數化為銳角函數、三角函數之圖形、複角函數、正弦定律與餘弦定律、三角形解法、測量問題、反三角函數、三角方程式 第二學年： 自然數、整數、有理數、實數、數體、多項式、質因式與因式分解、綜合除法、最高公因式與最低公倍式、分式、部份分式、根式、方程式、斜率與角、平面上直線之方程式、二次曲線、坐標變換、不等式、指數函數、對數函數、數

		<p>列、數學歸納法、排列組合、二項式定理、概率</p> <p>第三學年： 複數系、一元 n 次方程式、有理根之求法、向量與向量空間（以三維為限）、極坐標、複數之極式、無窮數列與極限、無窮級數、切線與法線、三度坐標、平面之方程式、空間直線之方程式、代數之結構、矩陣與其運算、行列式與其應用、向量之矩陣表示法</p> <p>社會學科</p> <p>第一學年： 集合與數系大意、直線形、圓與球、比與相似形、面積、空間直線與平面之關係位置、角柱與圓柱、角錐與角柱、二度坐標與圓形、函數與反函數、三角函數、三角恒等式、任意角函數化為銳角函數、三角函數之圖形、複角函數、正弦定律與餘弦定律、三角形解法、測量問題、反三角函數、三角方程式</p> <p>第二學年： 直線之斜率、直線之方程式、多項式、質因式與因式分解、綜合除法、最高公因式與最低公倍式、分式（包括部份分式）、根式、一次方程式、二次方程式、分式方程式與無理方程式、二元二方程式與二次曲線、坐標變換、不等式、指數函數與對數函數</p> <p>第三學年： 數列、數學歸納法、排列組合、二項式定理、概率、複數系、一元 n 次方程式、有理根之求法、代數之結構、極坐標、複數之極式、切線與法線、矩陣與其運算、行列式與其應用</p>
72	<p>第一學年：5 節 第二學年：4 節 第三學年： 理科數學：6 節 商科數學：6 節 普通數學：4-6 節</p>	<p>第一學年： 數、數列與級數、直線方程式與二元一次不等式、二次函數與二次不等式、多項式、指數與對數、三角函數、三角函數的性質、平面向量</p> <p>第二學年： 空間向量、一次方程組與行列式、圓與球面、圓錐曲線、排列組合、敘述統計</p> <p>第三學年：</p>

		<p>理科數學 極限與導數、導數的應用、積分及其應用、其他初等函數的微分與積分、數值方法、矩陣</p> <p>商科數學 極限與導數、導數的應用、積分及其應用、對數與指數的微分與積分、數值方法、矩陣</p> <p>普通數學 取材以基礎數學的內容為限</p>
84	<p>第一學年：5 節 第二學年：5 節 第三學年： 數學甲：6 節 數學乙：4-6 節 幾何第二學年或第三學年：2 節 邏輯第二或第三學年：2 節</p>	<p>第一學年： 基礎概念、數與坐標系、數列與級數、多項式、指數與對數、三角函數的基本概念、三角函數的性質與應用</p> <p>第二學年： 向量、空間中的直線與平面、一次方程組與矩陣的列運算、圓與球面、圓錐曲線、排列、組合、機率與統計(I)</p> <p>第三學年： 數學甲 機率與統計(II)、平面上的坐標變換、矩陣、不等式、極限的概念、極限的應用</p> <p>數學乙 矩陣、不等式、線性規劃、機率與統計(II)、圖形的伸縮與平移、幾何圖形</p>

貳、九年一貫和高中年代

一、九年一貫

89-97 年九年一貫數學課程每週上課時數與課程內容，如表 2-8。

表2-8 九年一貫課程教學時數與課程內容

年度	教學時間(每週)	課程內容
89	<p>一、二年級 2-3 節 三、四年級 2.5-3.75 節 五、六年級 2.7-4.05 節 七、八年級 2.8-4.2 節 九年級 3-4.5 節</p>	<p>數與量、圓形與空間、統計與機率、代數、連結</p>

附錄二

92	一、二年級 2-3 節 三、四年級 2.5-3.75 節 五、六年級 2.7-4.05 節 七、八年級 2.8-4.2 節 九年級 3-4.5 節	數與量、幾何、代數、統計與機率、連結
97	一、二年級 2-3 節 三、四年級 2.5-3.75 節 五、六年級 2.7-4.05 節 七、八年級 2.8-4.2 節 九年級 3-4.5 節	數與量、幾何、代數、統計與機率、連結

二、高中

(一) 普通高中

	一	二	三
95	每週授課四節	每週授課四節	選修 I 第三學年擇一學期每週授課三節。 選修 II 第三學年擇一學期每週授課三節。
99	數學 I (函數)、4 學分 數與式、多項式函數、指數、對數函數 數學 II (有限數學)、4 學分 數列與級數、排列、組合、機率、數據分析	數學 III (平面坐標與向量)、4 學分 三角、直線與圓、平面向量 數學 IV (線性代數)、4 學分 空間向量、空間中的平面與直線、矩陣、二次曲線	數學甲 I 4 三上 數學甲 II 4 三下 數學乙 I 3 三上 數學乙 II 3 三下

A. 標準課程

名稱	學分數	建議年級	課程內容
數學甲 I	4	三上	機率統計 II、三角函數
數學甲 II	4	三下	極限與函數、多項式函數的微積分
數學乙 I	3	三上	機率統計 II、三角函數
數學乙 II	3	三下	極限與函數

註：對學習超前的學生可提前修習數學甲 I，以接續選修微積分 I、II。

B. 基礎課程

名稱	建議學分數	建議年級
基礎數學 I	1	一上
基礎數學 II	1	一下

C. 統整課程

名稱	建議學分數	建議年級
統整數學	2~3	三年級任一學期
數學演習	1	各學期

D. 進階課程

名稱	建議學分數	建議年級
微積分 I	3~4	三上
微積分 II	3~4	三下
選修代數	2	一、二年級任一學期
選修幾何	2	二、三年級任一學期
數學軟體	2	二、三年級任一學期
數學建模	2	二、三年級任一學期

(二) 綜合高中(99 年 10 月 22 日台技(一)0990170469B)

數學：含部定必修科目數學 I – II，各 4 學分，共計 8 學分。另由學校視需要開設必修、選修科目。開設於一年級。

課程主題內容為

- (1) 數列與級數
- (2) 排列、組合
- (3) 機率
- (4) 數據分析

(三) 職業學校(97 年 3 月 31 日台技(三)字 0970027618C)

「數學領域」包括「數學 I -IV」，建議開設於第一學年第一、二學期及第二學年第一、二學期，每學期 2 學分，各校可依群科屬性、學生生涯發展、學校發展特色彈性調減至多 4 學分，合計為 4-8 學分。

「數學」、「社會」、「自然」等三領域之各科，學校可依群科屬性、學生生涯規劃、社會需求和學校發展特色，經由課程發展委員會決議，擇定開設科目、學分數及授課學期。

● 數學 A

學分數：8(2/2/2/2)，建議開課學期：第一、二學年第一、二學期。

課程內容為：(1)直線方程式、(2)三角函數及其應用、(3)向量、(4)式的運算、(5)指數與對數及其運算、(6)不等式及其應用、(7)圓與直線、(8)數列與級數、(9)排列組合、(10)機率與統計等。

● 數學 B

學分數：12(3/3/3/3)，建議開課學期：第一、二學年第一、二學期。

課程內容為：(1)直線方程式、(2)三角函數、(3)向量、(4)指數與對數及其運算、(5)數列與級數、(6)式的運算、(7)方程式、(8)不等式及其應用、(9)排列組合、(10)機率與統計、(11)三角函數的應用、(12)二次曲線、(13)微積分及其應用等。

● 數學 C

學分數：16(4/4/4/4)，建議開課學期：第一、二學年第一、二學期。

課程內容為：(1)直線方程式、(2)三角函數及其應用、(3)向量、(4)式的運算、(5)方程式、(6)複數、(7)不等式及其應用、(8)數列與級數、(9)指數與對數及其運算、(10)排列組合、(11)機率與統計、(12)二次曲線、(13)微積分及其應用等

● 數學 S(專供藝術群科使用)

學分數：4(2/2)~6(3/3)，建議開課學期：第一學年第一、二學期。

課程內容為：(1)直線方程式、(2)式的運算、(3)方程式與不等式、(4)數列與級數、(5)三角函數、(6)向量、(7)指數與對數及其運算；(8)圓與直線、(9)三角函數的應用、(10)排列組合、(11)機率與統計等。

附錄三 歷年課程綱要的內容表述方式

壹、國小 64 年版的內容表述方式 – 分段目標

<p>貳、分段目標：</p> <p>一、第一學年</p> <p>(一) 養成一百以內各數的數數、認數、記數的能力，形成數的概念。</p> <p>(二) 理解使用加法、減法的情境及加減法間的關係，熟練基本計算技能。</p> <p>(三) 從比較具體物的長短、闊狹的活動中，獲得量的概念。</p> <p>(四) 從日常生活起居作息的經驗中，獲得有關日期、時刻的基本知識，以及使用日曆和時鐘的能力。</p> <p>(五) 從具體事物的觀察、比較、辨別、繪製及操作等活動中，獲得有關圖形、空間的基本概念與知識。</p> <p>二、第二學年</p> <p>(一) 認識一千以內各數，增進數的概念及記數法的理解。</p> <p>(二) 加深理解使用加、減法的情境，並鞏固基本計算的基礎。</p> <p>(三) 理解使用乘法的情境進而構成乘法九九。</p> <p>(四) 理解使用長度單位的情境，獲得長度、容量、時間的概念及有關的實測能力。</p>

貳、國中 72 年版的表述方式 – 詳列內容

<p>第一學年（共計六個單元，上學期三個單元，下學期三個單元）</p> <p>一、第一冊（共計48節）</p> <p>(一) 量與數（約13節）</p> <p>量與單位，量的數化，數量的大小關係，數線，加法與減法在數線上的圖示，負正、負數在數線上的位置關係，絕對值與數線。</p> <p>(二) 正、負數的四則運算（約13節）</p> <p>整數的四則運算，因數與倍數，分數的加法和減法，分數的乘法和除法，分數與整則運算。</p> <p>(三) 簡單幾何圖形（約22節）</p> <p>實物與圖形、點、線、角的記法與畫法，三角形的全等，垂直與平分，三角形的內</p> <p>二、第二冊（共計48節）</p> <p>(一) 一次方程式（約24節）</p> <p>由實例引入未知數及文字式，一元一次式之加、減法及乘以分數之運算，方程式的法則，解一元一次方程式，由實例說明恆等式及無解方程式，一元一次方程式之由實例引入二元一次方程式，代入消去法與加減消去法解二元一次聯立方程式，簡題，方程式解法的流程圖形式。</p> <p>(二) 平行（約12節）</p> <p>補角與餘角、同位角、內錯角、同側內角，平行線的性質，平行四邊形的性質。</p>
--

參、國小 82 年版的表述方式 – 領域目標和分段目標

<p>貳、領域目標</p> <p>一、需要獲得的概念、知識、思考和技能：</p> <p>(一)數與計算：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 獲得各種數，如：自然數與零、小數、分數等的概念。 2. 能瞭解數的十進記數結構。 3. 能瞭解各種數的數線表示方式。 4. 能瞭解數的分解合成。 5. 能瞭解加、減、乘、除的意義。 6. 能瞭解各種計算過程的意義，並用以解決問題。 7. 能運用現代化的計算工具。 <p>參、分段目標</p> <p>一、低年級目標</p> <p>(一)形成一千以內各數的概念，認識進位與位值。</p> <p>(二)理解加減法的意義，使用二位數加減法解決問題，進而察覺其相</p>
--

肆、九年一貫 89 年版能力指標的表述方式

◎數與計算	
N-1-1	能初步掌握非負整數數詞序列的規律，並能以具體的量、聲音、圖像、數字，進行說、讀、聽、寫、做的活動，表徵 2000 以內的數。
N-1-2	能掌握 10、100、1000 和 1 及 100 和 10 之間的關係，做數的二階單位化聚。
N-1-3	能理解加法、減法的意義，解決生活中有關三位數以內的加、減法問題，並運用電算器加以檢驗。

伍、九年一貫 97 年版分年細目的表述方式

數與量		
分年細目		對照指標
1-n-01	能認識 100 以內的數及「個位」、「十位」的位名，並進行位值單位的換算。	N-1-01
1-n-02	能認識 1 元、5 元、10 元等錢幣幣值，並做 1 元與 10 元錢幣的換算。	N-1-01
1-n-03	能運用數表達多少、大小、順序。	N-1-01

1-n-04	能從合成、分解的活動中，理解加減法的意義，使用 $+$ 、 $-$ 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。	N-1-02 A-1-01
--------	---	------------------

陸、高中 72 年的課程內容表述方式

貳、教材內容 一、基礎數學（第一學年）	
教材大綱	備
(一)數 1. 整數。 2. 有理數、實數。 3. 複數及其運算。 4. 一元二次方程式的根的討論。 (二)級數與數列 1. 等差數列與等比數列。 2. 無窮等比級數與循環小數。 3. 數學歸納法。 (三)直線方程式與二元一次不等式 1. 平面坐標系。 2. 直線的斜率與方程式。 3. 二元一次聯立不等式與線性規畫。 4. 線型函數。 (四)二次函數與二次不等式 1. 二次函數及其圖形。	1. 不可介紹實數系的完備性。 2. 應介紹虛根與判別式。 應介紹 ∞ 符號。 線型函數以單變數為限。 應介紹二次不等式的圖解。

柒、高中 84 年課綱內容的表述方式

教材大綱	備註
一、基礎概念 1. 簡單的邏輯概念 2. 集合的基本概念 3. 函數的基本概念	1. 利用國中平面幾何知識來介紹簡單的邏輯概念—包含充分條件、必要條件、充要條件及反證法的例子(約二至三節課) 2. 集合的表示法、屬於、交集、聯集、子集、補集，以將來要用到的實例為主，不涉及抽象的集合(約二節課) 3. 以變量的對應關係說函數的意義(約二節課)

捌、高中 95 課程內容的表述方式

主題	主要內容	說明
坐與	1. 整數	1-1 含因數、倍數與輾轉相除法。

	2.有理數與實數	2-1 介紹無理數如 \sqrt{n} 和 π ，其中 n 為非完全平方的正整數。含 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。
	3.平面坐標系*	2-2 介紹基本的根式運算如 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ， $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 等。含分母為 $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ 時的有理化，其中 n, m 為正整數。
	4.複數與複數平面	3-1 複習平面坐標系，直線方程式，並介紹斜率。 3-2 以兩直線的關係說明二元一次方程組求解的幾何意義。
		4-1 介紹 i 的由來，含一元二次方程式根的討論，特別是判別式小於 0 之情形。 4-2 介紹複數平面和複數的四則運算。複數平面只是強調一一對應關係。
級數	1.等差級數與等比級數	1-1 含數列與級數的基本概念。
二、數列與	2.無窮等比級數與循環小數	2-1 介紹最基本的極限概念。
	3.數學歸納法*	3-1 介紹數學歸納法並應用於證明。

玖、高中 99 課程內容的表述方式(有負面表列，此與 95 課綱不同)

主題	子題	內容	備註
一、數與式	1.數與數線	1.1 數線上的有理點及其十進位表示法 1.2 實數系：實數的十進位表示法、四則運算、絕對值、大小關係 1.3 乘法公式、分式與根式的運算	1.2 不含非十進位的表示法
	2.數線上的幾何	2.1 數線上的兩點距離與分點公式 2.2 含絕對值的一次方程式與不等式	
二、多項式函數	1.簡單多項式函數及其圖形	1.1 一次函數 1.2 二次函數 1.3 單項函數：奇偶性、單調性和圖形的平移	1.3 僅介紹 4 次(含)以下的單項函數
	2.多項式的運算	2.1 乘法、除法(含除式為一次式的綜	2.1 不含最高公因

與應用	合除法)、除法原理(含餘式定理、因式定理)及其應用、插值多項式函數及其應用	式與最低公倍式、插值多項式的次數不超過三次
3.多項式方程式	3.1 二次方程式的根與複數系 3.2 有理根判定法、勘根定理、 $\sqrt[n]{a}$ 的意義 3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理	3.1 不含複數的幾何意涵
4.多項式函數的圖形與多項式不等式	4.1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題	4.1 不含複雜的分式不等式

壹拾、97 年高職機械群的內容表述方式

單元主題	內容綱要	分配節數	備註
1.直線方程式	1.直角坐標。 2.距離公式。 3.分點坐標。 4.直線的斜率與方程式。	8	第一學年第一學期本單元宜複習線型函數與二次函數的坐標圖形。
2.三角函數及其應用	1.有向角及其度量。 2.三角函數的定義與圖形★。 3.三角函數的應用。	28	

壹拾壹、97 綜合高中的課程內容表述方式

主題	子 題	內 容	備 註
一、數與式	1.數與數線	1-1 數線上的有理點及其十進位表示法 1-2 實數系：實數的十進位表示法、四則運算、絕對值、大小關係 1-3 乘法公式、分式與根式的運算	1-2 不含非十進位的表示法
	2.數線上的幾何	2-1 數線上的兩點距離與分點公式 2-2 含絕對值的一次方程式與不等式	

<p>二、 多項式函數</p>	<p>1.簡單多項式函數及其圖形</p> <p>2.多項式的運算與應用</p> <p>3. 多項式方程式</p> <p>4.多項式函數的圖形與多項式不等式</p>	<p>1-1 一次函數</p> <p>1-2 二次函數</p> <p>1-3 單項函數：奇偶性、單調性和圖形的平移</p> <p>2-1 乘法、除法（含除式為一次式的綜合除法）、除法原理（含餘式定理、因式定理）及其應用、插值多項式函數及其應用</p> <p>3-1 二次方程式的根與複數系</p> <p>3-2 有理根判定法、勘根定理、$\sqrt[n]{a}$的意義</p> <p>3-3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理</p> <p>4-1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題</p>	<p>1-3 僅介紹4次（含）以下的單項函數</p> <p>2-1 不含最高公因式與最低公倍式、插值多項式的次數不超過三次</p> <p>3-1 不含複數的幾何意涵</p> <p>4-1 不含複雜的分式不等式</p>
---------------------	---	---	--