綜合高級中學

數學科銜接教材

C

國家教育研究院

黃嘉男、黃敏哲、陳吳煜、馬雅筠 編 著

前言

綜合高中是我國後期中等教育的一種學制，其課程之規劃，在一年級採用普通高中課程，二年級以後，則按學生對於專門學程的選擇而依循高職或高中的課程。然而，高中與高職的數學課程綱要由兩組專家學者分別制訂，各自適應該學制的學習需求，導致部分綜合高中學生，從一年級轉銜二年級時，缺乏適當的市售數學教科書，而教師必須經常性地負起自編教材的責任。

針對上述現象，教育部於民國 102 年 9 月發佈綜合高中課綱微調的命令，自 103 學年起逐年實施。對於微調之後，仍在二年級職業專門學程的數學課程中存在的少數重複或需補強內容，則由國家教育研究院以「綜合高級中學數學科銜接教材」專案計畫，委託具數學教育專業與實務教學經驗的教師與學者，為二年級分流後銜接高職 A 版、B 版、或 C 版數學課程的綜高師生，分別編撰一份可開放下載列印的銜接教材，搭配職業學校之第三冊或第四冊數學教科書使用。現在這份銜接教材，就是該計畫的產出。

此「銜接教材」根據上述「微調」後的綜合高中數學課程編制，由鄭英豪教授整理出重複的課題與需補強的內容，經蕭建華老師和曾政清老師推薦資深數學教師李惠雯、馬雅筠、黃淑娟、黃敏哲、黃嘉男、陳吳煜、蔡淇茂、與蕭文婷，依照現行各版本之教學習慣編撰而成。然後由鄭章華博士、單維彰、與前述所有同仁共同審閱校定。本衛接教材之經費與行政資源，皆由國家教育研究院支持，謹此一併致謝。

計畫主持人 單維彰

誌於中壢中央大學

民國 103 年 4 月 17 日

主編

單維彰／國立中央大學

編著者

黃嘉男／國立大甲高級中學

黃敏哲／國立竹北高級中學

陳吳煜／台北市立大安高級工業職業學校

馬雅筠／台北市立大安高級工業職業學校

審閱委員

曾政清／台北市立建國高級中學

蕭建華／國立溪湖高級中學

鄭英豪／臺北市立大學

鄭章華／國家教育研究院

編輯

郭潔如／國立中央大學

莊珺涵／國立中央大學

目錄

使用須知

本銜接教材依據教育部於民國 102 年 9 月 17 日發佈之臺教技 (一) 字第 1020131965*A* 號令「微調」之後的綜合高級中學數學課程綱要而作，自 103 學年度起，於綜合高級中學逐年實施，至十二年國教的新課綱實施止。

這份銜接教材應搭配經審訂之高職數學 *C* 版第三冊教科書使用。假設學生在一年級時，按照綜高數學課程綱要，學習了普通高中《數學Ⅰ》和《數學Ⅲ》的內容，則以下課題可以從高職數學教科書中省略或擇要複習：

- （第三冊）等比數列與等比級數
- （第三冊）指數與對數及其運算的意義
- （第三冊）指數函數及其圖形、對數函數及其圖形
- （第三冊）常用對數與其應用
- （第四冊）圓方程式、圓與直線的關係

由上述課題的節略，教師約有 28－34 節課可用以實施本銜接教材，並不須要額外加課。

雖然這本教材有部分的彩色頁面，但都經過實驗，確保改以黑白（灰階）列印時，不至於影響閱讀。所以，此教材可以用彩色或者黑白列印。

這本書從封面到封底，已經安插適當的空白頁，讓讀者可以採用「雙面輸出」的方式列印。原稿的空白頁，就造成雙面輸出時的單面頁。

第一章 三角函數的定義及圖形

三角學的概念起源甚早，古文獻「萊因德紙草書」顯示古埃及人己有實用三角學的粗略概念，來保持金字塔每邊都有相同的斜度，只是當時並沒有使用餘切這個名詞而已。至西元前 150 年至 100 年間，希臘人熱衷天文學，開始研究三角學，於是三角學漸漸有了雛形。

後來印度人吸收了希臘人在三角學方面的知識，再加以改進，也把它當成研究天文學的利器。長久以來，三角學就這樣依附著天文學發展，直到十三世紀，才自天文學中脫離成一門獨立的學問。十六世紀的歐洲，由於航海、曆法計算的需要，更增加三角學的重要性。如今它不但應用於天文、地理，舉凡航海、航空、建築、工程、體育等…，都需要這門基礎學問；甚至在我們日常生活中，三角也成為不可欠缺的知識。

1-1 三角函數的定義及基本性質

我們已經在調整後的綜高高一下數學課程 (數學 III) 裡學習到三角函數中的正弦函數 $\sin\theta$ 、餘弦函數 $\cos\theta$ 、正切函數 $\tan\theta$，事實上三角函數總共有六個。對於一個角，之前我們習慣用「度」來衡量；在本節中，我們將引進數學和物理中較自然的「弧度」來測量角。度及弧度可視為衡量角的兩種單位。利用弧度的概念，我們可以導出求圓弧長及扇形面積的公式。本節將深入學習有向角概念、角的度量及六個三角函數的定義；下一節將畫出六個三角函數的圖形，並且認識三角函數圖形特性及其週期。

1-1.1 角的度量

為了說明角的大小，我們常用來測量角的單位有兩種，分別介紹如下：

① 度

這是我們從國小國中使用到現在的度量單位，即將圓周分做 360 等分，每一等分所對應的圓心角稱為一度，使用 1° 表示之。

將 1° 分為 60 等分，每一等分所對之圓心角稱為一分，使用 $1'$ 表示之，記為 $1^\circ=60'$

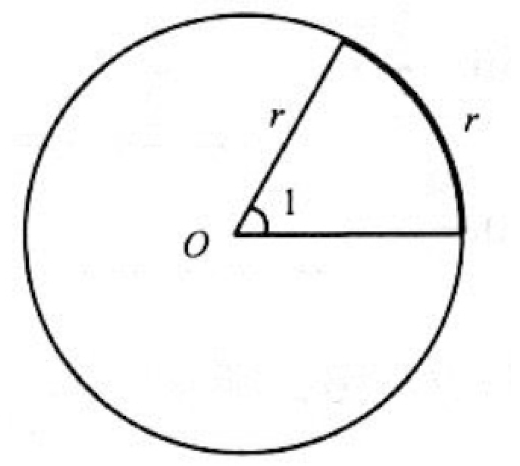
將 $1'$ 分為 60 等分，每一等分所對之圓心角稱為一秒，使用 $1''$ 表示之，記為 $1'=60''$

② 弧度

數學上還有一種常用的度量單位，稱為弧度。在圓周上，與半徑等長之弧所對的圓心角稱為一弧度，以弧度為單位，通常省略單位不寫。

【定義】

弧度：一圓的弧長等於半徑時，此弧所對應的圓心角稱為 1 弧度



$$1\ (\text{弧度})=\frac{r\ (\text{弧長})}{r\ (\text{半徑})}$$

若 S 為弧長，r 為半徑，則弧度 $\theta=\dfrac{S}{r}$

如果一角以弧度制表示時，其角度之單位「弧度」可以省略不寫，例如 8 弧度僅寫 8；但六十分制之角度單位「∘」就不可省略，例如 8° 的單位「∘」不可省略，不寫就無法分辨是 8 弧度還是 8°。

度與弧度的單位轉換

半徑為 r 的圓周長為 $2\pi r$，利用弧度公式可得一周角 $360^\circ=2\pi$（弧度）。同理可得：一平角 $180^\circ=\pi$（弧度），一直角 $90^\circ=\dfrac{\pi}{2}$（弧度），$60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$（弧度），負角 $-30^\circ=-\dfrac{\pi}{6}$（弧度）。

現在，角的度量單位除了原有的「度」，又增加了新的度量單位「弧度」，兩種單位之間可以換算，其關係為

$$1\ \text{弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}\doteq 57.3^\circ\text{；}1^\circ=\frac{\pi}{180}\ \text{弧度}$$

【整理】度與弧度的單位轉換基本公式

$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度 $\doteq 0.01745$ 弧度

1 弧度 $=\dfrac{180^\circ}{\pi}\doteq 57.3^\circ$

例題 1

將下列角度化成弧度制 ①$120^\circ$ ②-225° ③$1110^\circ$ ④-252°

解：

根據上述基本公式 $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度，所以

① $120^\circ=120\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2}{3}\pi$（弧度）

② $-225^\circ=-225\times\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{5}{4}\pi$（弧度）

③ $1110° = 1110 \times \frac{\pi}{180} = \frac{37}{6}\pi$ (弧度)

④ $-252° = -252 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{5}\pi$ (弧度)

隨堂練習 1

① $260°$　② $-750°$　③ $135°$　④ $-300°$

答：① $\frac{13}{9}\pi$　② $-\frac{25}{6}\pi$　③ $\frac{3}{4}\pi$　④ $-\frac{5}{3}\pi$

例題 2

將下列各弧度改成度 ① $\frac{14}{3}\pi$　② 3π　③ $-\frac{12}{5}\pi$　④ 3

解：

① $\frac{14}{3}\pi = \frac{14}{3} \times 180° = 840°$

② $3\pi = 3 \times 180° = 540°$

③ $-\frac{12}{5}\pi = -\frac{12}{5} \times 180° = -432°$

④ 3 (弧度) $= 3 \times (\frac{180°}{\pi}) \doteqdot 3 \times 57.3° = 171.9°$

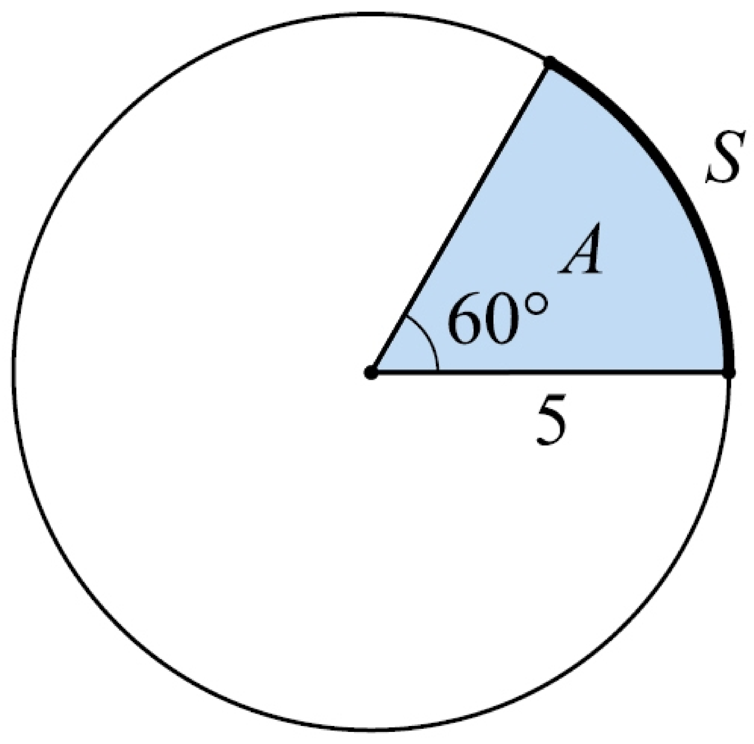
隨堂練習 2

將下列各弧度改成度 ① $\frac{5}{6}\pi$　② $-\frac{16}{3}\pi$　③ $\frac{7}{5}\pi$　④ -3

答：① $150°$　② $-960°$　③ $252°$　④ $-171.9°$

扇形的弧長與面積

國中的時候，我們就學過如何計算扇形的面積與弧長，基本原理是先算出一個完整的圓形的面積與周長，然後看看扇形的圓心角，就知道扇形的面積與弧長各是多少，舉例來說：



上圖中的扇形半徑為 5，圓心角是 60°，因此佔了整個圓的 $\frac{60^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{6}$，所以可得：

$$A=\pi r^2\times\frac{1}{6}=\frac{25\pi}{6}$$

$$S=2\pi r\times\frac{1}{6}=\frac{10\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}$$

因此若以弧度制表示角度時，扇形所佔的比例就從 $\frac{60^\circ}{360^\circ}$ 改為 $\frac{\theta}{2\pi}$(分子與分母的單位須相同)，套用前面的例子，60° 以弧度制表示為 $\frac{\pi}{3}$

$$A=\pi r^2\times\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=25\pi\times\frac{1}{6}=\frac{25\pi}{6}$$

$$S=2\pi r\times\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=10\pi\times\frac{1}{6}=\frac{5\pi}{3}$$

所以若以弧度制表示角度 θ 時，可得到以下更簡單的扇形面積與弧長公式：

$$A=\pi r^2\times\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta$$

$$S=2\pi r\times\frac{\theta}{2\pi}=r\theta$$

以上圖的扇形作為例子驗證：

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times25\times\frac{\pi}{3}=\frac{25\pi}{6}$$

$$S=r\theta=5\times\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

因此利用弧度制表示角度時，計算扇形面積與弧長將更為簡便。

【整理】

扇形半徑 r，圓心角 θ，此扇型的面積 A 與弧長 S 為 $A=\frac{1}{2}r^2\theta$ ， $S=r\theta$

例題 3

求半徑為 $r=6$ ，圓心角 $\theta=135°$ 的扇形，其面積 A 與弧長 S。

解：

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{3\pi}{4}=\frac{27\pi}{2}$$

$$S=r\theta=6\times\frac{3\pi}{4}=\frac{9\pi}{2}$$

隨堂練習 3

求半徑 $r=4$ ，圓心角 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 扇形的面積 A 與弧長 S。

答：$A=\frac{16\pi}{3}$ ， $S=\frac{8\pi}{3}$

1-1.2 銳角三角函數的定義

在國中的時候，我們已經知道：相似三角形的對應邊長成比例。由這個關係我們可以得到：相似的三角形，其三邊長的比例是固定的，不因三角形的大小不同而改變。我們已經在調整後的綜高高一下數學課程 (數學 III) 裡學習到三角函數中的正弦函數 $\sin\theta$、餘弦函數 $\cos\theta$、正切函數 $\tan\theta$，現在我們將六個三角函數的定義整理如下：

$\angle A$ 的正弦函數：$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$ (sine)

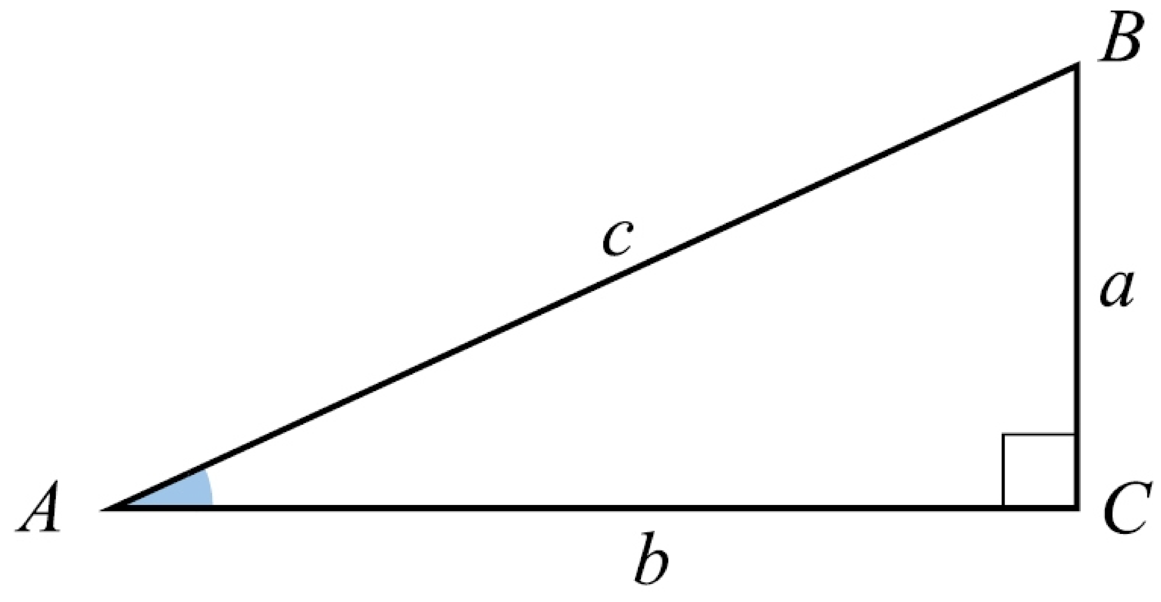
$\angle A$ 的餘弦函數：$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$ (cosine)

$\angle A$ 的正切函數：$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$ (tangent)

$\angle A$ 的餘切函數：$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{b}{a}$ (cotangent)

$\angle A$ 的正割函數：$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$ (secant)

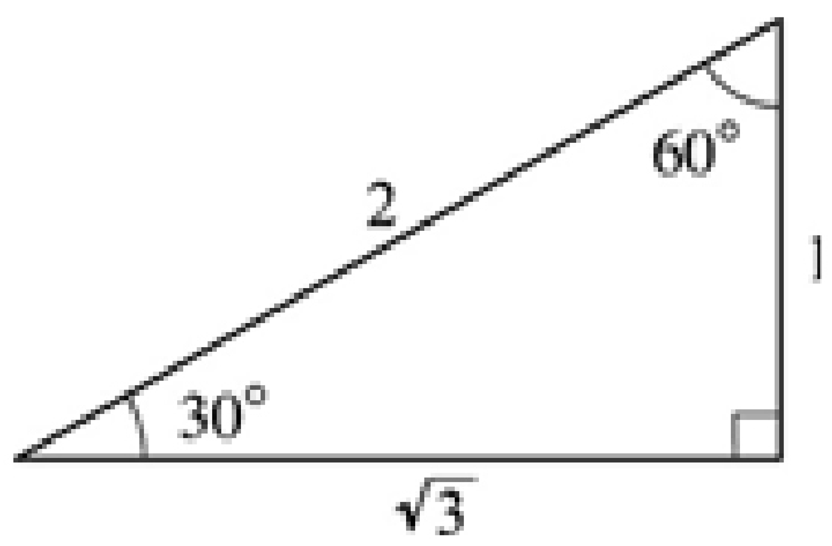
$\angle A$ 的餘割函數：$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{c}{a}$ (cosecant)



在這裡我們要注意到，一旦銳角 θ 給定，因為直角三角形的邊長都是具長度單位的正數，所以 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 、 $\tan\theta$ 、 $\cot\theta$ 、 $\sec\theta$ 、 $\csc\theta$ 在 θ 為銳角時，都是不具單位的正數。

例題 4

求 $\sin 30°$ 、 $\cos 30°$ 、 $\tan 30°$ 、 $\cot 30°$ 、 $\sec 30°$ 、 $\csc 30°$ 的值。



解：

在 $30°-60°-90°$ 的直角三角形中，三邊長的比例為 $1:\sqrt{3}:2$，由定義可得

$\sin 30°=\dfrac{30°\text{的對邊長}}{\text{斜邊長}}=\dfrac{1}{2}$　　$\cos 30°=\dfrac{30°\text{的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30°=\dfrac{30°\text{的對邊長}}{30°\text{的鄰邊長}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$\cot 30°=\dfrac{30°\text{的鄰邊長}}{30°\text{的對邊長}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

$\csc 30°=\dfrac{\text{斜邊長}}{30°\text{的對邊長}}=\dfrac{2}{1}=2$　　$\sec 30°=\dfrac{\text{斜邊長}}{30°\text{的鄰邊長}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

隨堂練習 4

求 $\sin 45^\circ$，$\cos 60^\circ$，$\tan 45^\circ$，$\cot 60^\circ$，$\sec 45^\circ$，$\csc 60^\circ$ 的值。

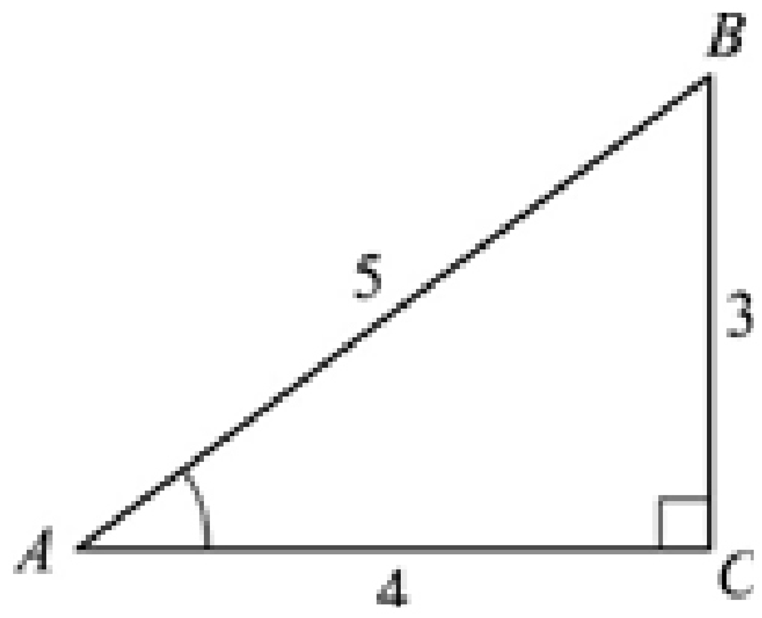
答：$\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\tan 45^\circ = 1$，$\cot 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$，$\csc 60^\circ = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

例題 5

設直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，三邊長 $\overline{AB} = 5$，$\overline{BC} = 3$，$\overline{CA} = 4$，試求 $\sin A$，$\cos B$，$\tan B$，$\cot A$，$\sec B$，$\csc A$ 之值。

解：

畫出直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角



$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊長}} = \frac{3}{5} \qquad \cos B = \frac{\angle B \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊長}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan B = \frac{\angle B \text{ 的對邊}}{\angle B \text{ 的鄰邊}} = \frac{4}{3} \qquad \cot A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\angle A \text{ 的對邊}} = \frac{4}{3}$$

$$\sec B = \frac{\text{斜邊長}}{\angle B \text{ 的鄰邊}} = \frac{5}{3} \qquad \csc A = \frac{\text{斜邊長}}{\angle A \text{ 的對邊}} = \frac{5}{3}$$

隨堂練習 5

已知銳角$\triangle ABC$ 中，$\cos A = \dfrac{12}{13}$，求 $\sin A$，$\tan A$，$\cot A$，$\csc A$ 的值。

答：$\sin A = \dfrac{5}{13}$，$\tan A = \dfrac{5}{12}$，$\cot A = \dfrac{12}{5}$，$\csc A = \dfrac{13}{5}$

特殊角的三角函數

在前面的討論中，我們曾分別計算過 $30°$，$45°$ 及 $60°$ 的正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割的值，我們把這些值列表如下：

函數 / θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

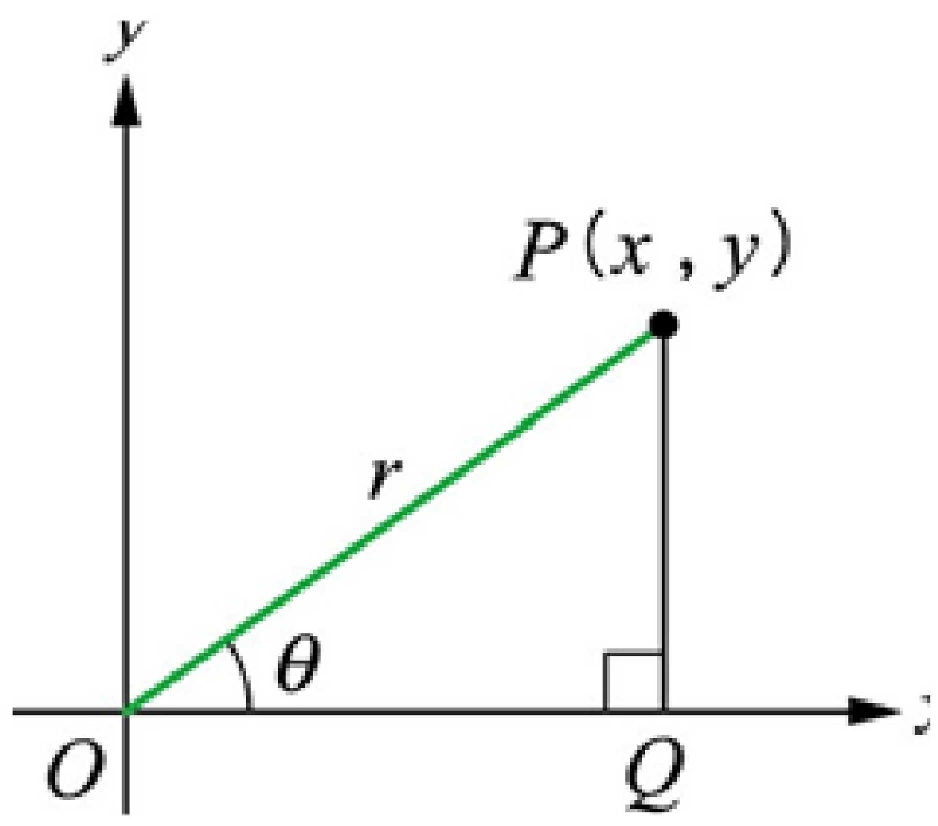
1-1.3 廣義角三角函數的定義

取銳角 θ 終邊上的一點 $P(x,y)$，令 $\overline{OP}=r$，$r>0$，如圖示，則由 $P(x,y)$ 的 x、y 座標值定義銳角三角函數如下：

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \qquad \cot\theta=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x} \qquad \csc\theta=\frac{r}{y}$$

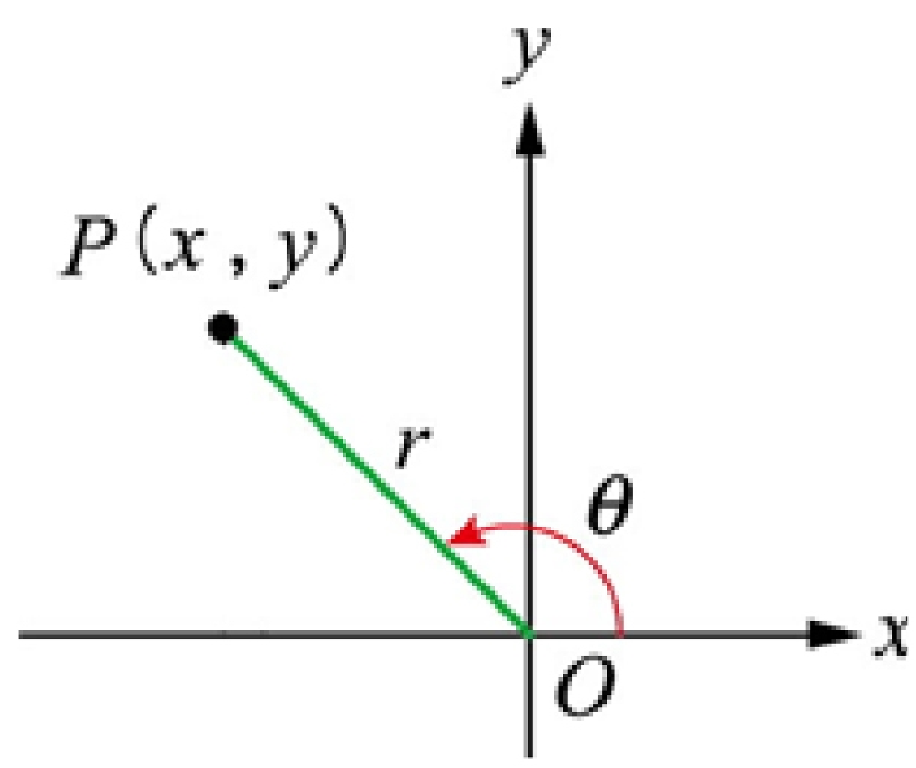


我們利用這個方法來定義廣義角的三角函數，以 $\overline{OP}=r$，$r>0$，如圖示，則由 $P(x,y)$ 的 x、y 座標值定義如下：

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \qquad \cot\theta=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x} \qquad \csc\theta=\frac{r}{y}$$



其中，我們不難從定義中看出 $\sin\theta$、$\csc\theta$ 互為倒數，$\cos\theta$、$\sec\theta$ 互為倒數，$\tan\theta$、$\cot\theta$ 互為倒數。

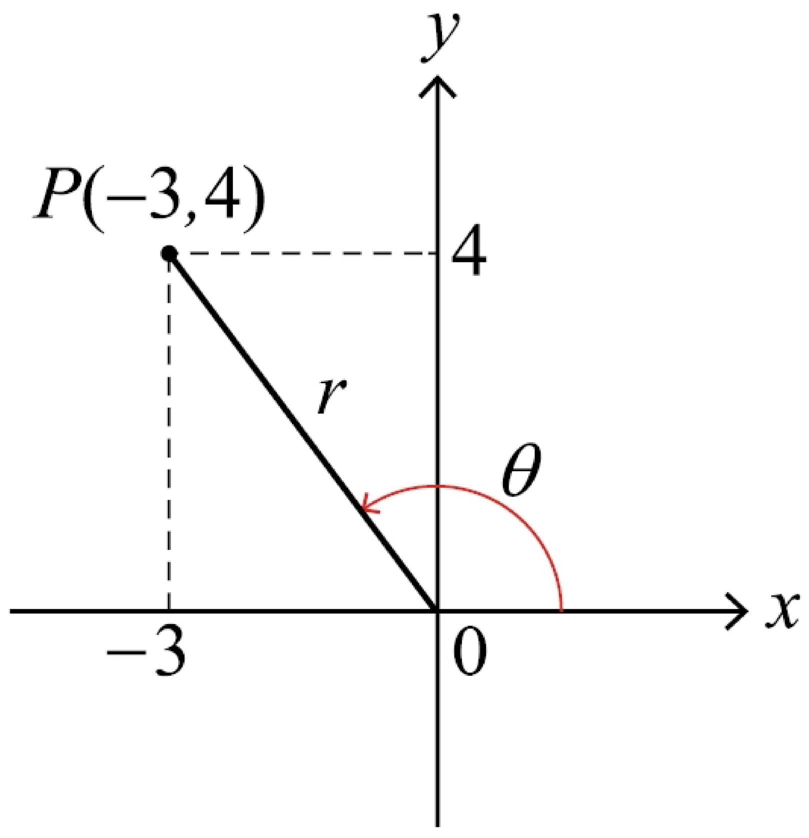
我們由廣義角的三角函數定義可知，廣義角的三角函數值的正負會隨著 θ 終邊上一點 P 的 x、y 座標值正負而有所不同。我們可以將三角函數在四個象限的正負整理如下表：

θ	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−
$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$	+	+	−	−
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$	+	−	−	+
$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$	+	−	+	−

例題 6

已知 $P(-3, 4)$ 是標準位置角 θ 終邊上的一點，試求 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$，$\cot\theta$，$\sec\theta$，$\csc\theta$ 的值。

解：



$r=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

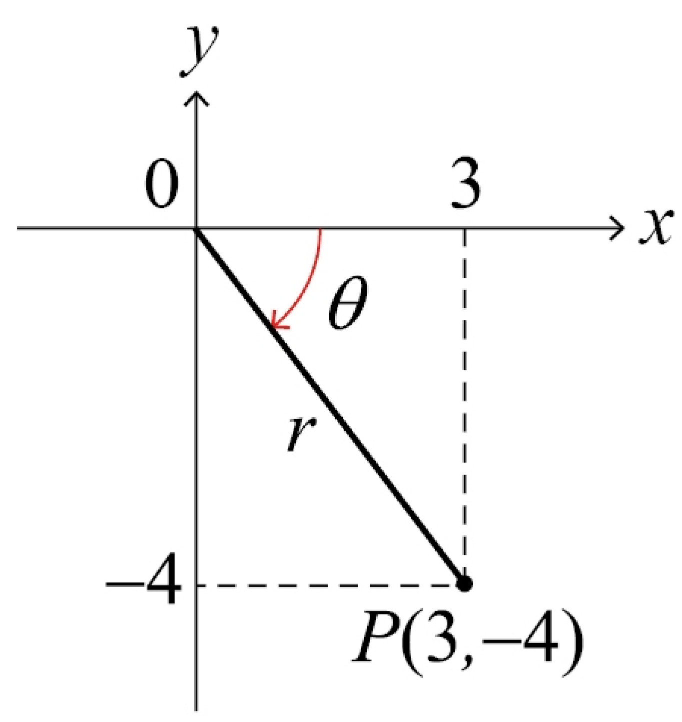
$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-3}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{-3}$，$\cot\theta=\dfrac{x}{y}=\dfrac{-3}{4}$

$\sec\theta=\dfrac{r}{x}=\dfrac{5}{-3}$，$\csc\theta=\dfrac{r}{y}=\dfrac{5}{4}$

隨堂練習 6

如右圖，求 θ 的六個三角函數值。



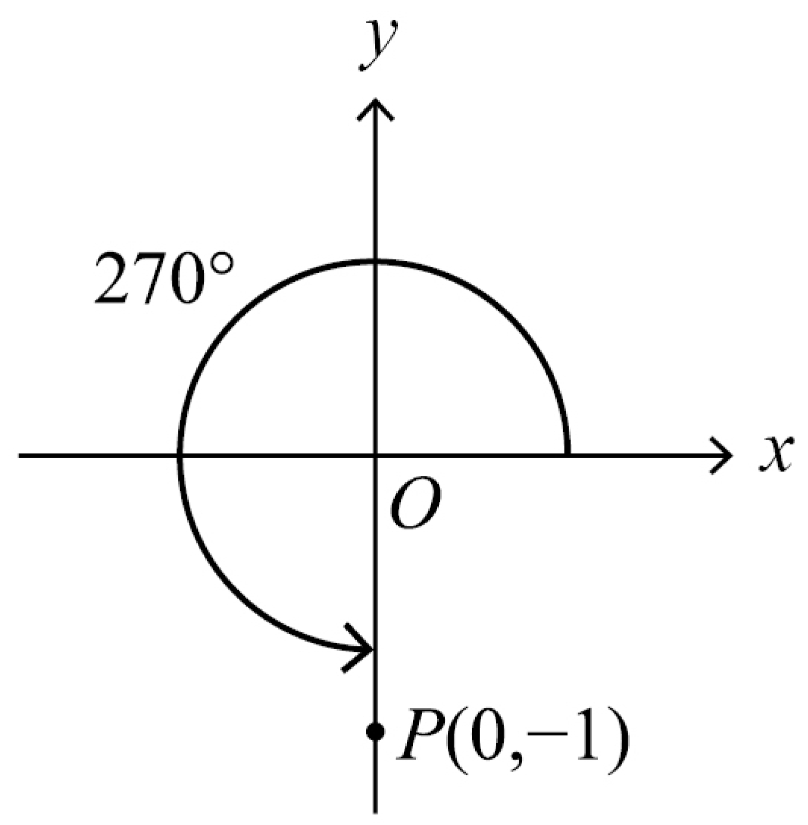
答：$\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$

$\cot\theta=-\dfrac{3}{4}$，$\sec\theta=\dfrac{5}{3}$，$\csc\theta=-\dfrac{5}{4}$

例題 7

求 $\theta=270^\circ$ 的六個三角函數值。

解：



$\theta=270^\circ$ 是象限角，終邊在 y 軸的負向上，取一點 P，

使 $\overline{OP}=1$，則點 P 的坐標是 $(0,-1)$ 故

$\sin\theta=-1$，$\cos\theta=0$，$\sec\theta$ 與 $\tan\theta$ 沒有意義，

$\csc\theta=\frac{1}{-1}=-1$，$\cot\theta=\frac{0}{-1}=0$

隨堂練習 7

求 $\theta=180^\circ$ 的六個三角函數值。

答：$\sin\theta=0$，$\cos\theta=-1$，$\tan\theta=0$，$\cot\theta$ 沒有意義，$\sec\theta=-1$，$\csc\theta$ 沒有意義

例題 8

點 $P(-5\sqrt{3},y)$ 在角 θ 之終邊上，若 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，則 $\csc\theta$ 之值為何？

解：

因為 $\tan\theta>0$，而 $-5\sqrt{3}<0$ 所以 $P(-5\sqrt{3},y)$ 在第三象限

又 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{y}{x}=\frac{-y}{5\sqrt{3}}$ 所以 $y=-5$，而 $r=\sqrt{75+25}=10$，所以 $\csc\theta=\frac{10}{-5}=-2$

隨堂練習 8

坐標平面上，O 表原點，θ 為第二象限角，$P(x,2)$ 是終邊上一點，且 $\overline{OP}=\sqrt{13}$，求 x 及 $\cos\theta$ 之值。

答：$x=-3$，$\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{13}}$

角 0°、90°、180°、270° 終邊皆在 x 軸，y 軸上，我們稱之為象限角。象限角的六個三角函數值依定義整理如下表：

函數 \ θ	0°	90°	180°	270°
x	1	0	-1	0
y	0	1	0	-1
$\sin\theta=\frac{y}{r}$	0	1	0	-1
$\cos\theta=\frac{x}{r}$	1	0	-1	0
$\tan\theta=\frac{y}{x}$	0	無意義	0	無意義
$\cot\theta=\frac{x}{y}$	無意義	0	無意義	0
$\sec\theta=\frac{r}{x}$	1	無意義	-1	無意義
$\csc\theta=\frac{r}{y}$	無意義	1	無意義	-1

例題 9

求 $\sin 270^\circ+\cos 180^\circ\tan 45^\circ+\cot 90^\circ\cos 30^\circ$ 之值。

解：

原式 $=-1+(-1)\times 1+0\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-2$

隨堂練習 9

求 $\sec 0+\csc\frac{\pi}{2}+\sec\pi+\csc\frac{3\pi}{2}$ 之值。

答：0

1-1.4 三角函數的基本性質

以前我們學習過三角函數之間的基本關係式，在計算三角函數時，往往不是簡單的按照定義就可以得到結果，因此我們有一些基本的轉換，可以幫助未來在計算或應用上可以方便的適當簡化。以前那些基本轉換只說明了銳角的情況，但其實任意角的三角函數都適用，且不僅是前三個三角函數，六個三角函數的關係會更加完整。例如

餘角關係：$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 或 $\tan\theta\cdot\cos\theta=\sin\theta$

對廣義角 θ 皆成立。我們可以把六個三角函數都納進來，只要把各個三角函數都化為 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 表示，就可以將上述基本關係式擴充，詳述於後。

餘角關係

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\tan(90^\circ-(90^\circ-\theta))=\tan\theta$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

$$\csc(90^\circ-\theta)=\sec(90^\circ-(90^\circ-\theta))=\sec\theta$$

【整理】餘角關係

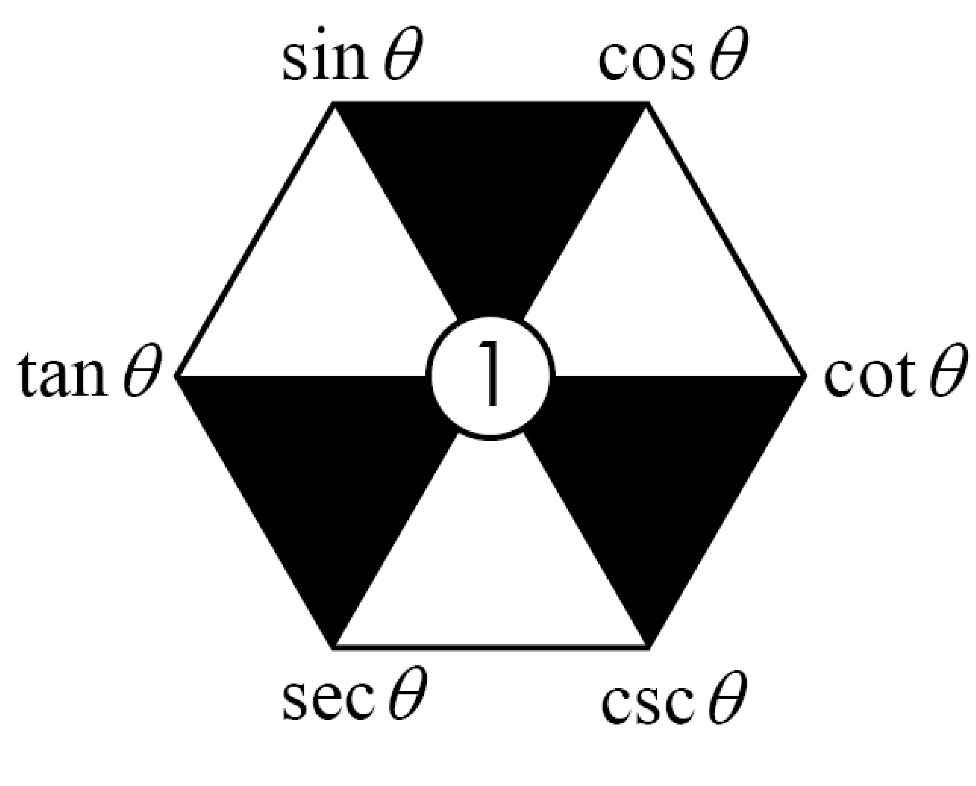
我們可以利用右圖的正六邊形來幫助記憶：

在左右兩端的函數互為餘角關係

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$　　$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$

$\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta$　　$\csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$



平方關係

$$\tan^2\theta+1=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

$$1+\cot^2\theta=1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}=\csc^2\theta$$

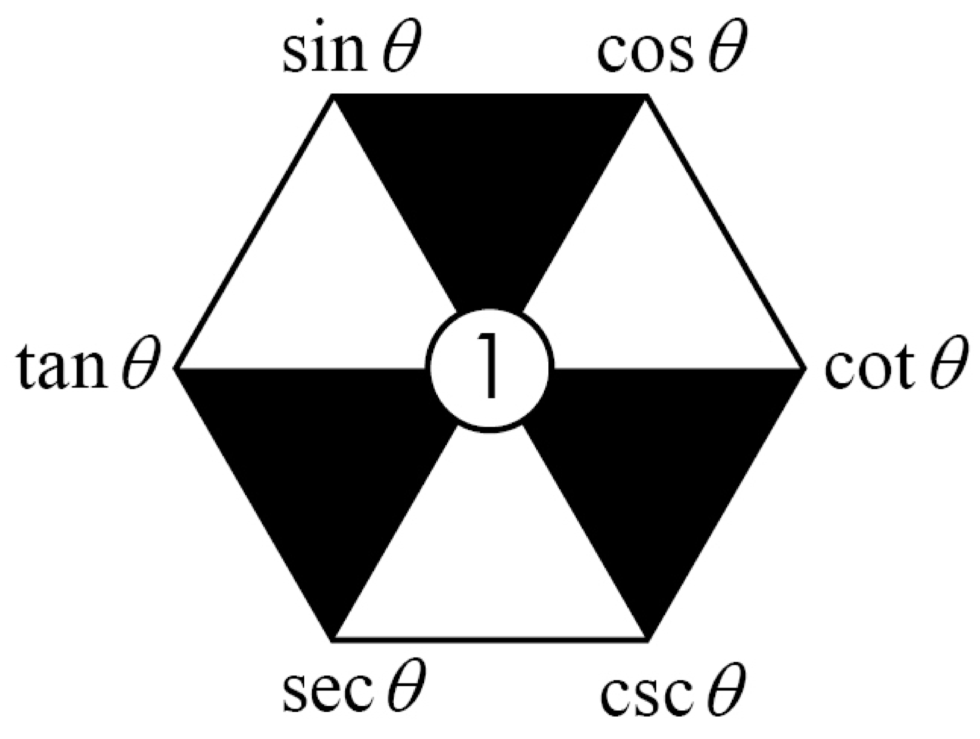
【整理】**平方關係**

在六邊形中的每個倒三角形，位於上方兩頂點的三角函數平方和會等於位於下方頂點的平方

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\tan^2\theta+1^2=\sec^2\theta$

$1^2+\cot^2\theta=\csc^2\theta$



商數關係

$$\sin\theta\cdot\cot\theta=\sin\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cos\theta$$

$$\cos\theta\cdot\csc\theta=\cos\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\cot\theta\cdot\sec\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

$$\csc\theta\cdot\tan\theta=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

$$\sec\theta\cdot\sin\theta=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

【整理】**商數關係**

六邊形上每個頂點的三角函數

是位於相鄰兩頂點函數的乘積

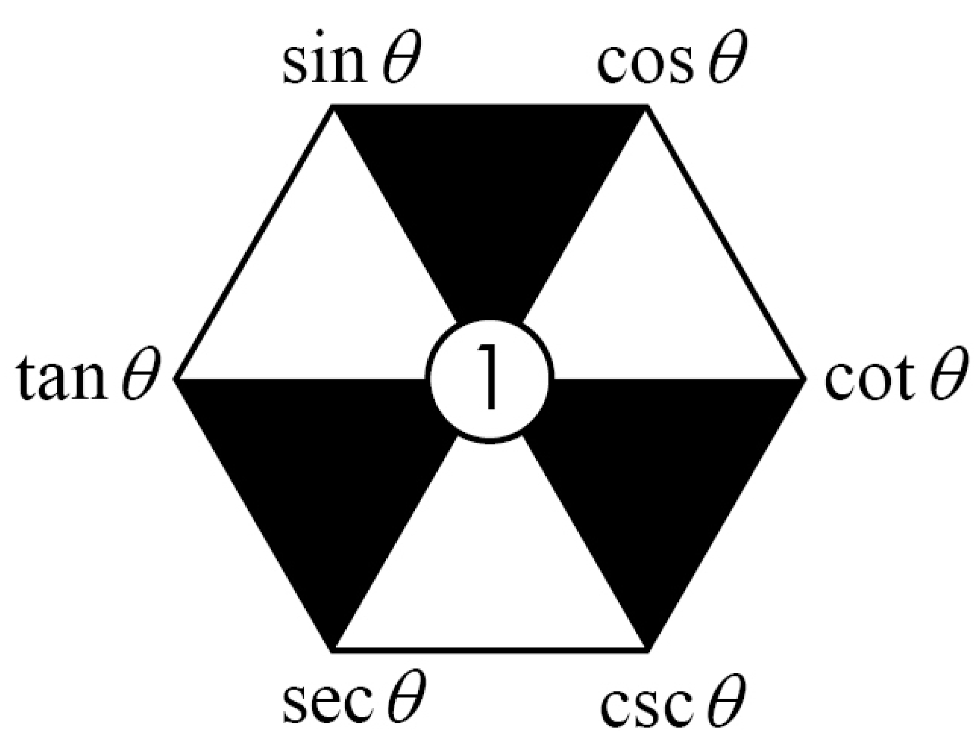
$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta$ $\cos\theta=\sin\theta\cdot\cot\theta$

$\tan\theta=\sin\theta\cdot\sec\theta$ $\cot\theta=\cos\theta\cdot\csc\theta$

$\sec\theta=\tan\theta\cdot\csc\theta$ $\csc\theta=\sec\theta\cdot\cot\theta$

經過變形可得以下常用的關係：

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$



另外，我們時常需要轉換三角函數內的角度：

$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta \qquad \cos(90°-\theta)=\sin\theta$$
$$\sin(90°+\theta)=\cos\theta \qquad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$$
$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$
$$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(180°+\theta)=-\cos\theta$$
$$\sin(270°-\theta)=-\cos\theta \qquad \cos(270°-\theta)=-\sin\theta$$
$$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta \qquad \cos(270°+\theta)=\sin\theta$$
$$\sin(-\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta$$

利用這些現有的轉換關係，可以得到其他三角函數的轉換關係，舉例來說：

$$\cot(270°-\theta)=\frac{\cos(270°-\theta)}{\sin(270°-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\sec(180°+\theta)=\frac{1}{\cos(180°+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

【整理】我們把每個三角函數中，涉及到角度轉換的關係寫出來，供同學參考：

$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(180°-\theta)=\sin\theta \qquad \sin(270°-\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(90°-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta \qquad \cos(270°-\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan(90°-\theta)=\cot\theta \qquad \tan(180°-\theta)=-\tan\theta \qquad \tan(270°-\theta)=\cot\theta$$
$$\cot(90°-\theta)=\tan\theta \qquad \cot(180°-\theta)=-\cot\theta \qquad \cot(270°-\theta)=\tan\theta$$
$$\sec(90°-\theta)=\csc\theta \qquad \sec(180°-\theta)=-\sec\theta \qquad \sec(270°-\theta)=-\csc\theta$$
$$\csc(90°-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(180°-\theta)=\csc\theta \qquad \csc(270°-\theta)=-\sec\theta$$

$$\sin(90°+\theta)=\cos\theta \qquad \sin(180°+\theta)=-\sin\theta \qquad \sin(270°+\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(90°+\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(180°+\theta)=-\cos\theta \qquad \cos(270°+\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90°+\theta)=-\cot\theta \qquad \tan(180°+\theta)=\tan\theta \qquad \tan(270°+\theta)=-\cot\theta$$
$$\cot(90°+\theta)=-\tan\theta \qquad \cot(180°+\theta)=\cot\theta \qquad \cot(270°+\theta)=-\tan\theta$$
$$\sec(90°+\theta)=-\csc\theta \qquad \sec(180°+\theta)=-\sec\theta \qquad \sec(270°+\theta)=\csc\theta$$
$$\csc(90°+\theta)=\sec\theta \qquad \csc(180°+\theta)=-\csc\theta \qquad \csc(270°+\theta)=-\sec\theta$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta \qquad \cot(-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(-\theta)=-\csc\theta$$

以上的轉換規則可以利用口訣「奇變偶不變，正負看象限」來記憶，這裡的奇偶看的是函數內$90°$的倍數，例如$180°$是兩個$90°$，是偶數個；而$270°$是三個$90°$，是奇數個。「奇變」的意思是「正」，「餘」三角函數互換。正負指的是轉換前函數所在象限的正負，例如

$$\sec(180°-\theta)=-\sec\theta$$
$$\cos(270°+\theta)=\sin\theta$$

上式中，$\sec(180°-\theta)$ 有兩個$90°$，不需改變三角函數，且$180°-\theta$視為第二象限角(考慮θ為銳角)，而$\sec x$在第二象限是小於零的，因此 $\sec(180°-\theta)=-\sec\theta$。而 $\cos(270°+\theta)$ 有三個$90°$，因此從$\cos x$變成$\sin x$，而$270°+\theta$視為第四象限角，$\cos x>0$，因此 $\cos(270°+\theta)=\sin\theta$ 成立。

例題 10

利用三角函數的性質，化簡下列各式：

① $\sin 23°\cdot\csc 23°$

② $\tan^2 47°-\sec^2 47°$

③ $\cos 35°\cdot\csc 55°$

④ $\sin^2 66°+\sin^2 24°$

解：

① $\sin 23°\cdot\csc 23°=1$

② $\tan^2 47°-\sec^2 47°=\tan^2 47°-(\tan^2 47°+1^2)=-1$

③ $\cos 35°\cdot\csc 55°=\cos 35°\cdot\sec 35°=1$

④ $\sin^2 66°+\sin^2 24°=\cos^2 24°+\sin^2 24°=1$

隨堂練習 10

利用三角函數的性質，化簡下列格式：

① $\sin\theta\cdot\csc\theta+\tan\theta\cdot\cot\theta+\cos\theta\cdot\sec\theta$

② $\sin^2 51°+\cos^2 51°$

③ $\sin^2 13°+\sin^2 77°+\cos^2 24°+\cos^2 66°$

④ $\csc^2\dfrac{\pi}{5}-\cot^2\dfrac{\pi}{5}$

答：① 3　② 1　③ 2　④ -1

例題 11

已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$，試求下列各式的值：

① $\sin\theta\cdot\cos\theta$ ② $\tan\theta+\cot\theta$ ③ $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

解：

① 將題目中等式兩邊平方可得：$(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\frac{7}{5})^2$

因此 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{49}{25}$

因為 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

所以 $2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{24}{25}$，故 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{12}{25}$

② $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{25}{12}$

③ $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cdot\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=(\frac{7}{5})^3-3\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{7}{5}=\frac{91}{125}$

隨堂練習 11

已知 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{2}{3}$，求下列各式的值：

① $\sin\theta\cdot\cos\theta$ ② $\tan\theta+\cot\theta$ ③ $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

答：① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{18}{5}$ ③ $-\frac{23}{27}$

例題 12

已知 $\tan\theta=4$，試求 $\dfrac{4\cos\theta+3\sin\theta}{3\sin\theta-4\cos\theta}$ 的值。

解：

$$\frac{4\cos\theta+3\sin\theta}{3\sin\theta-4\cos\theta}=\frac{4+3\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{3\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-4}=\frac{4+3\tan\theta}{3\tan\theta-4}=\frac{16}{8}=2$$

隨堂練習 12

已知 $\cot\theta=\dfrac{3}{2}$，試求 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$ 的值。

答：-5

例題 13

化簡 $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}+\dfrac{1}{1+\sec^2\theta}+\dfrac{1}{1+\csc^2\theta}$。

解：

$$\frac{1}{1+\sin^2\theta}+\frac{1}{1+\cos^2\theta}+\frac{1}{1+\sec^2\theta}+\frac{1}{1+\csc^2\theta}$$

$$=\frac{1}{1+\sin^2\theta}+\frac{1}{1+\cos^2\theta}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^2\theta}}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{1}{1+\sin^2\theta}+\frac{1}{1+\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+1}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+1}$$

$$=\frac{1+\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}+\frac{1+\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}=2$$

隨堂練習 13

化簡 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1+\tan\theta}+\dfrac{1}{1+\cot\theta}+\dfrac{1}{1+\sec\theta}+\dfrac{1}{1+\csc\theta}$。

答：3

例題 14

化簡 $\left(\sin^2\theta+\cos\theta\cdot\cos(-\theta)\right)\left(\tan\theta\cdot\tan(270^\circ-\theta)+\csc(90^\circ+\theta)\cdot\cos\theta\right)$。

解：

$\left(\sin^2\theta+\cos\theta\cdot\cos(-\theta)\right)\left(\tan\theta\cdot\tan(270^\circ-\theta)+\csc(90^\circ+\theta)\cdot\cos\theta\right)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\tan\theta\cdot\cot\theta+\sec\theta\cdot\cos\theta)$

$=1\cdot(1+1)=2$

隨堂練習 14

化簡 $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\pi-\theta)}+\dfrac{\tan(-\theta)}{\tan(\pi+\theta)}+\dfrac{\sec(\frac{3}{2}\pi-\theta)}{\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)}$。

答：-3

1-1 習題

1. 換算下列各角的度數：

① $\frac{2\pi}{3}=$______ ② $-\frac{5}{12}\pi=$______ ③ $\frac{7}{6}\pi=$______ ④ $\frac{4}{5}\pi=$______ ⑤ $-\frac{11}{12}\pi=$______

2. 換算下列各角的弧度：

① $15°=$ ______ ② $-315°=$ ______ ③ $225°=$ ______ ④ $20°=$ ______ ⑤ $105°=$ ______

3. 若半徑為 $r=9$ 的扇形，其弧長為 $S=6\pi$，求此扇形的面積。

4. 若 $A(x,-6)$ 為角 θ 終邊上一點且 $\tan\theta=3$，則：① $x=$ ______ ② $\sin\theta\cos\theta=$ ______。

5. 設 $0\le\theta<2\pi$，試求下列各式的值：

① 若 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，則 $\theta=$ ______ ② 若 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，則 $\theta=$ ______

③ 若 $\tan\theta=1$，則 $\theta=$ ______。

6. 已知 $\sin\theta=\frac{-5}{13}$，$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，求 $\frac{\tan\theta+\sec\theta}{1+\cos\theta}$ 之值。

7. 求 $\cos 0°+\sin 90°+\tan 180°-\csc 270°$ 之值。

8. 第二象限角 θ 的正弦函數值為 $\frac{4}{5}$，求 θ 角的餘切函數值。

9. 已知 θ 為第三象限角，且 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，試求 $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 之值。

10. 計算 $\tan\frac{\pi}{4}+\sec 120°\cdot\cot\frac{7\pi}{4}-\csc(-150°)$。

11. 化簡 $\tan\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\csc\theta$ 為一個三角函數。

12. 若 $\tan\theta$、$\cot\theta$ 是方程式 $2x^2+3x+2=0$ 的兩根，求 $\sin\theta\cdot\cos\theta$ 的值。

13. 已知 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，求 $\frac{2\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$ 的值。

14. 化簡 $\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{1+\sec\theta}{1+\csc\theta}$。

15. 若 $\tan 20°=k$，試以 k 表示 $\sec 110°$ 的值。

16. 化簡 $\frac{\sin(180°-\theta)\cdot\tan^2(360°-\theta)}{\cos(270°+\theta)}+\frac{\cos(90°-\theta)\cdot\csc^2(270°-\theta)}{\sin(180°-\theta)}$。

簡答

1. ① 120° ② -75° ③ 210° ④ 144° ⑤ -165°

2. ① $\frac{\pi}{12}$ ② $-\frac{7}{4}\pi$ ③ $\frac{5}{4}\pi$ ④ $\frac{\pi}{9}$ ⑤ $\frac{7}{12}\pi$

3. 27π

4. ① $x=-2$ ② $\frac{3}{10}$

5 ① $\theta=45^\circ$ or 135° ② $\theta=60^\circ$ or 300° ③ $\theta=45^\circ$ or 225°

6. $\frac{-26}{3}$ 7. 3 8. $-\frac{3}{4}$ 9. $-\frac{7}{5}$

10. 5 11. $\sin\theta$ 12. $-\frac{2}{3}$ 13. $\frac{4}{3}$

14. $\tan\theta$ 15. $-\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$ 16. -1

1-2 三角函數的圖形

我們知道廣義角的三角函數是一個角對應到一個數的函數，例如 $\sin\theta$ 正弦函數是一個把角 θ 對應到 $\sin\theta$ 的函數。在 1-1 節中，我們介紹了角的另一個單位：弧度，而且還強調角度為 x 弧度時可以把單位省略不寫。對於任一個實數 x，必有一個 x 弧度的角與它對應，因此，我們可將三角函數看成把實數對應到實數的函數。換句話說，對於任意實數 x，我們先取 x 弧度的角，然後再考慮此角的三角函數值，便可以試著描繪三角函數的圖形。

正弦函數 $y=\sin x$

我們先就特別的 x 值求出函數值，並列表如下：

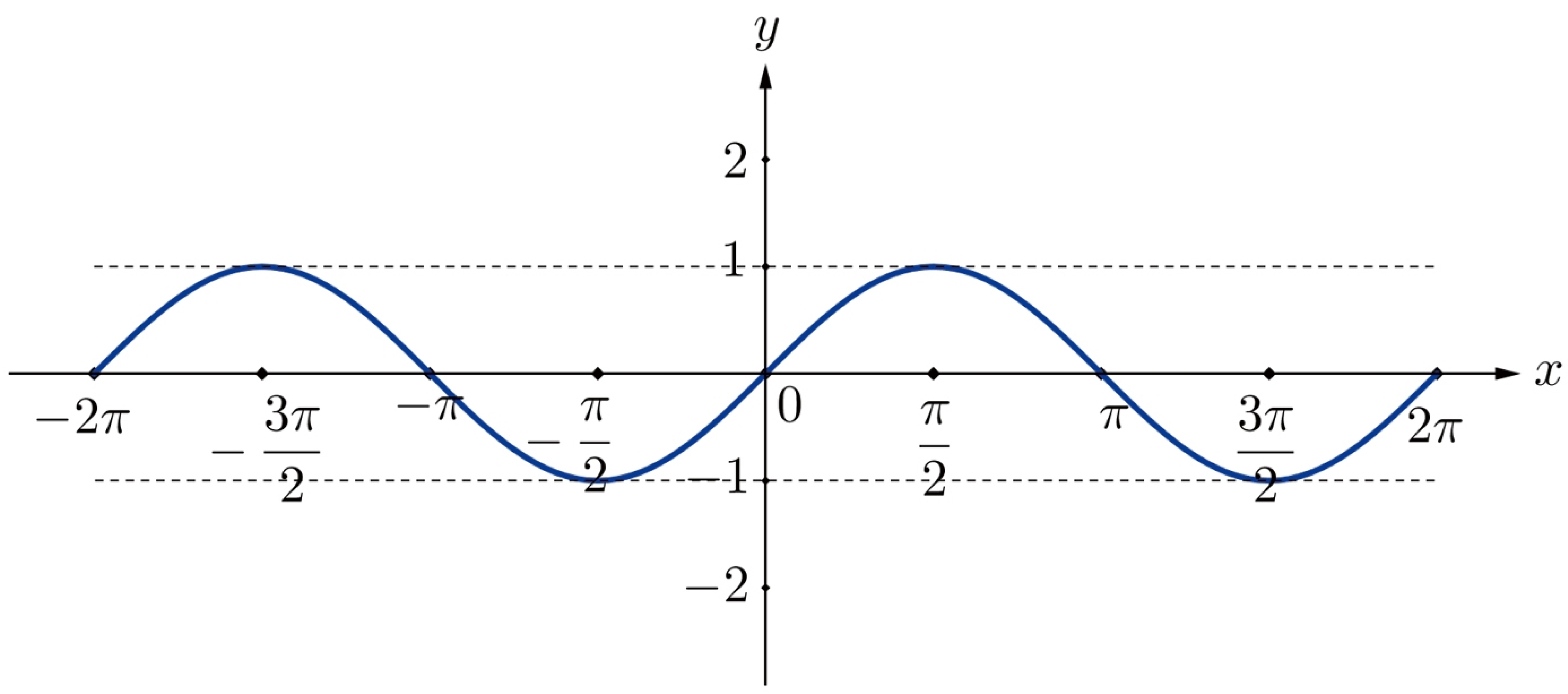
x	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\cdots$
y	$\cdots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\cdots$

由上表中可觀察到：

①x 由 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 時，y 由 0 增加到 1
②x 由 $\frac{\pi}{2}$ 到 π 時，y 由 1 減少到 0
③x 由 π 到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，y 由 0 減少到 -1
④x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π 時，y 由 -1 增加到 0

又因為 $\sin(x+2\pi)=\sin x$，此式表示函數圖形經過 2π 單位後會重複出現，2π 便稱為此函數的**週期**；因此只要描繪 $0\le x\le 2\pi$ 時的圖形即可，而 $2\pi\le x\le 4\pi$ 時的圖形可將 $0\le x\le 2\pi$ 的圖形複製，向右平移即可，以此類推。我們亦可看出此圖形連續不間斷且在 $y=\pm 1$ 之間擺動，故也稱正弦函數的**振幅**為 1。

綜合以上所述，可描繪正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形如下：



★ 正弦函數有以下特性：

★ 正弦函數有以下特性：

① $y=\sin x$ 的週期為 2π 且 x 可代入任意實數。

② $y=\sin x$ 的函數值範圍：$-1\le y\le 1$，即 $-1\le \sin x\le 1$（或 $|\sin x|\le 1$）。

③ $y=\sin x$ 在 $0°<x<90°$、$270°<x<360°$ 為遞增函數
（當變數 x 數值漸增加時，其函數值 y 亦漸增加）。

④ $y=\sin x$ 在 $90°<x<270°$ 為遞減函數
（當變數 x 數值漸增加時，其函數值 y 卻漸減少）。

餘弦函數 $y=\cos x$

仿照處理正弦函數的作法，先就特別的 x 值求出函數值，並列表如下：

x	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\cdots$
y	$\cdots$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cdots$

由上表中可觀察到：

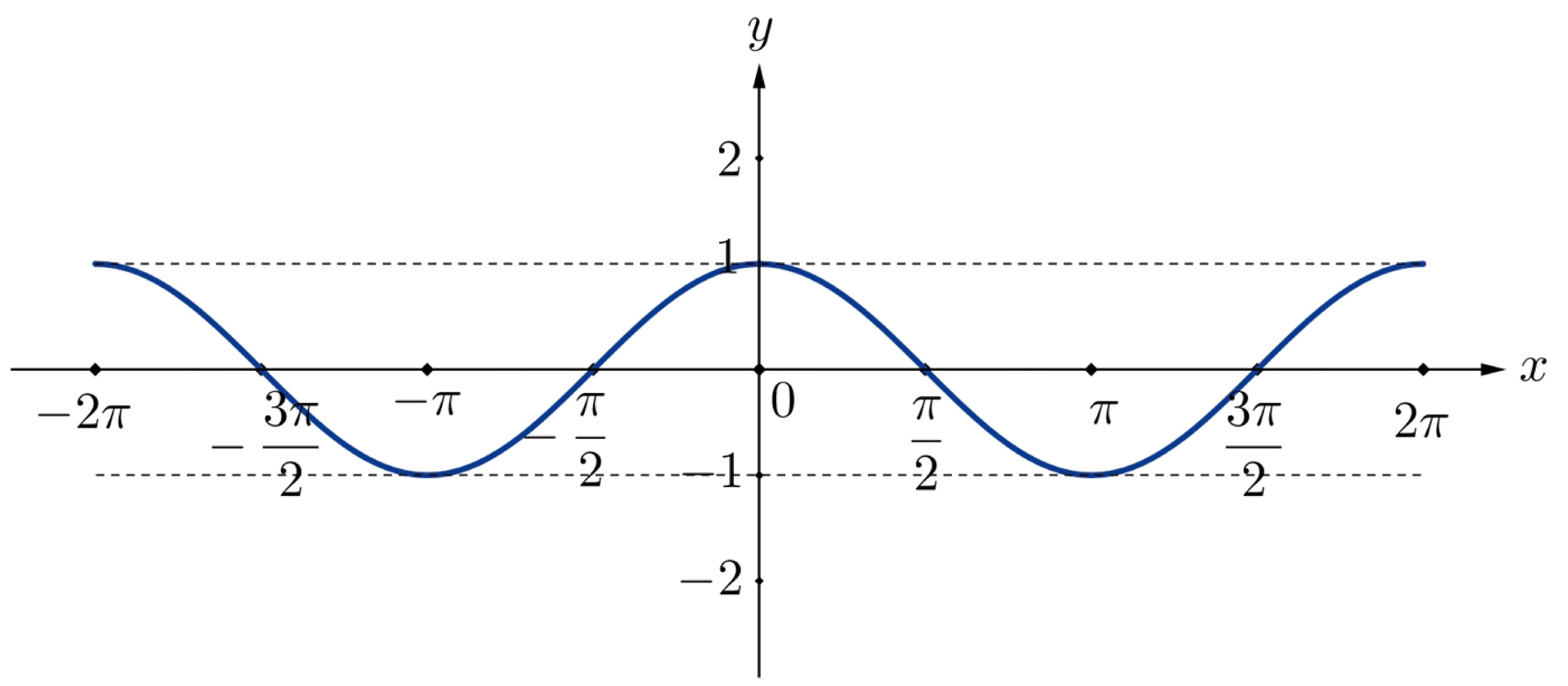
①x 由 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 時，y 由 1 減少到 0

②x 由 $\frac{\pi}{2}$ 到 π 時，y 由 0 減少到 -1

③x 由 π 到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，y 由 -1 增加到 0

④x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π 時，y 由 0 增加到 1

又因為 $\cos(2\pi+x)=\cos x$，故餘弦函數也有週期 2π，因此只要描繪 $0\le x\le 2\pi$ 時的圖形即可。綜合以上所述，餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形如下：



★ 餘弦函數有以下特性：

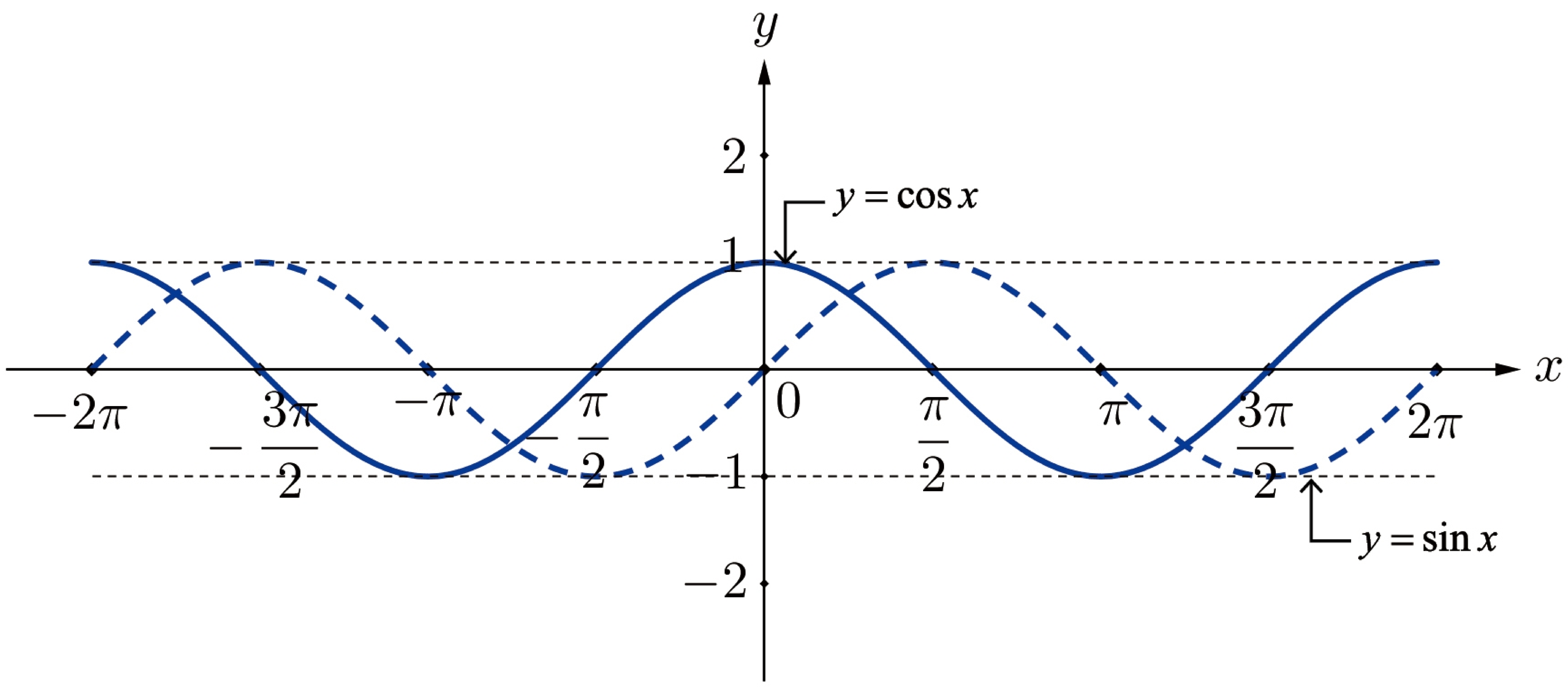
① $y=\cos x$ 的週期為 2π 且 x 可代入任意實數。

② $y=\cos x$ 的函數值範圍：$-1\le y\le 1$，即 $-1\le \cos x\le 1$（或 $|\cos x|\le 1$）。

③ $y=\cos x$ 在 $0°<x<180°$ 為遞減函數。

④ $y=\cos x$ 在 $180°<x<360°$ 為遞增函數。

⑤ 正弦與餘弦函數圖形關連性：將餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，就是正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形，將正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，就是餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形，即 $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$，這觀念在電子學中經常使用。



正切函數 $y=\tan x$

仿照正餘弦函數的作法，一樣先就特別的 x 值求出函數值，並列表如下。注意到 $\tan(\pi+x)=\tan x$，因此 $y=\tan x$ 週期為 π。

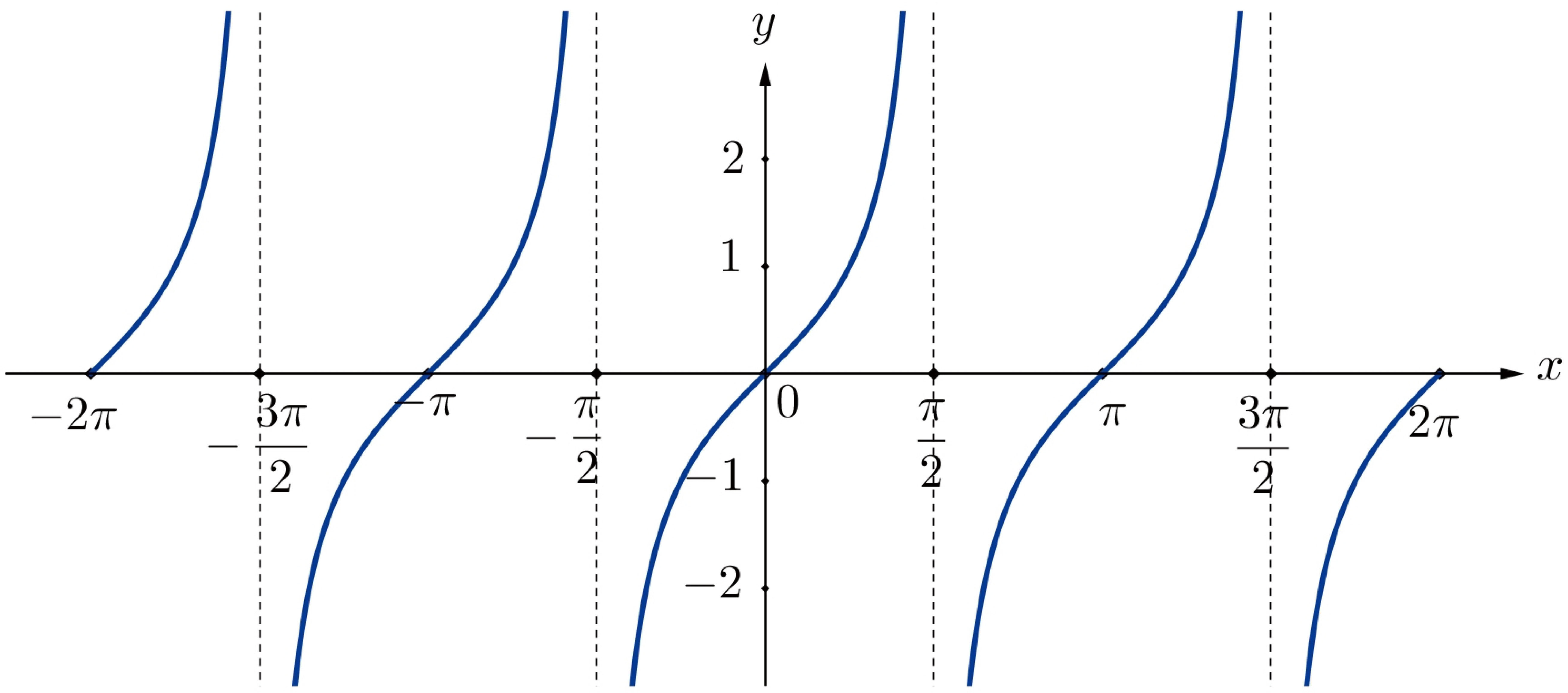
x	$\cdots$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$
y	$\cdots$	1	$\sqrt{3}$	無意義	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	無意義	$-\sqrt{3}$	-1	$\cdots$

由上表可觀察到：

① $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 時，$y=\tan x$ 為遞增函數

② $x=0$ 時，$\tan x=0$

綜合以上所述，正切函數 的圖形如下：



★ 正切函數有以下特性：

① $y=\tan x$ 的週期為 π 且當 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ （n 為整數），$y=\tan x$ 無意義。

② $y=\tan x$ 的函數值範圍為任意實數。

③ $y=\tan x$ 均為遞增函數。

④ $y=\tan x$ 的圖形會漸漸靠近直線 $x=\dfrac{k\pi}{2}$ （k 為奇數），像這種為函數圖形漸漸逼近的直線，稱為該圖形的**漸近線**。

餘切函數 $y=\cot x$

同前面所述，先就特別的 x 值求函數值後列表。因 $\cot(\pi+x)=\cot x$，故 $y=\cot x$ 週期為 π，並列表如下：

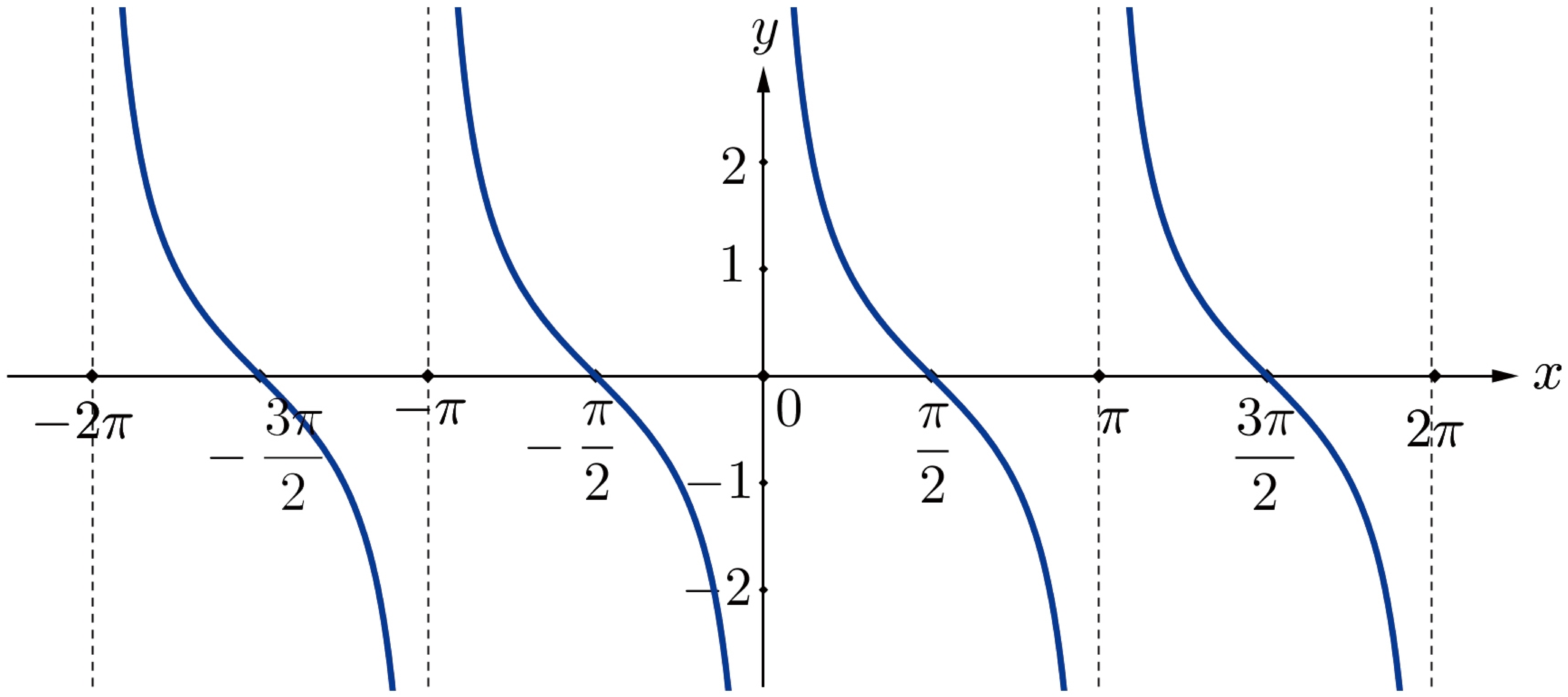
x	$\cdots$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$
y	$\cdots$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	無意義	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\cdots$

由上表可觀察到：

① $0<x<\pi$ 時，$y=\cot x$ 為遞減函數。

② $x=\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\cot x=0$

綜合以上所述，餘切函數 $y=\cot x$ 的圖形如下：



★ 餘切函數有以下特性：

① $y=\cot x$ 的週期為 π 且當為 $x=n\pi$ （n 為整數），$y=\cot x$ 無意義。

② $y=\cot x$ 的函數值範圍為任意實數。

③ $y=\cot x$ 為遞減函數且 $x=n\pi$ （n 為整數）為其漸近線。

正割函數 $y=\sec x$

同上，先找特殊點再求值並列表。因為 $\sec(x+2\pi)=\sec x$，$y=\sec x$ 週期為 2π，列表如下：

x	$\cdots$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
y	$\cdots$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	無意義	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

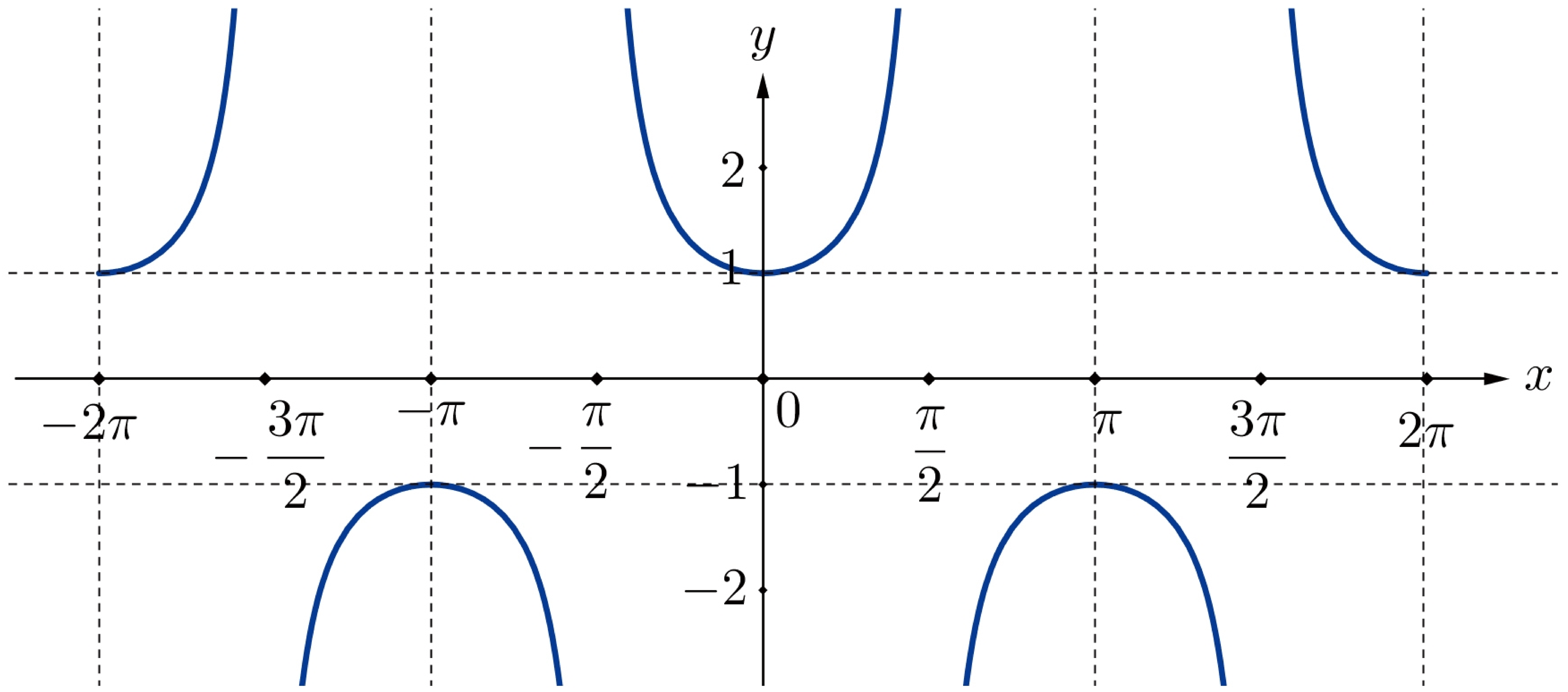
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$
y	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	無意義	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$

由上表可觀察到：

① $0<x<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 時，$y=\sec x$ 為遞增函數。

② $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 時，$y=\sec x$ 為遞減函數。

綜合以上所述，正割函數 $y=\sec x$ 的圖形如下：



★ 正割函數有以下特性：

① $y=\sec x$ 的週期為 2π 且當 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$（n 為整數），$y=\sec x$ 無意義。

② $y=\sec x$ 的函數值範圍為 $\sec x \geq 1$ 或 $\sec x \leq -1$，即 $|\sec x| \geq 1$。

③ 圖中亦用虛線畫出 $y=\sec x$ 的圖形，亦可利用倒數關係 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 得到 $y=\sec x$ 的圖形。

餘割函數 $y=\csc x$

同上，因為 $\csc(x+2\pi)=\csc x$，$y=\csc x$ 週期為 2π，並列表如下：

x	…	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
y	…	無意義	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	無意義

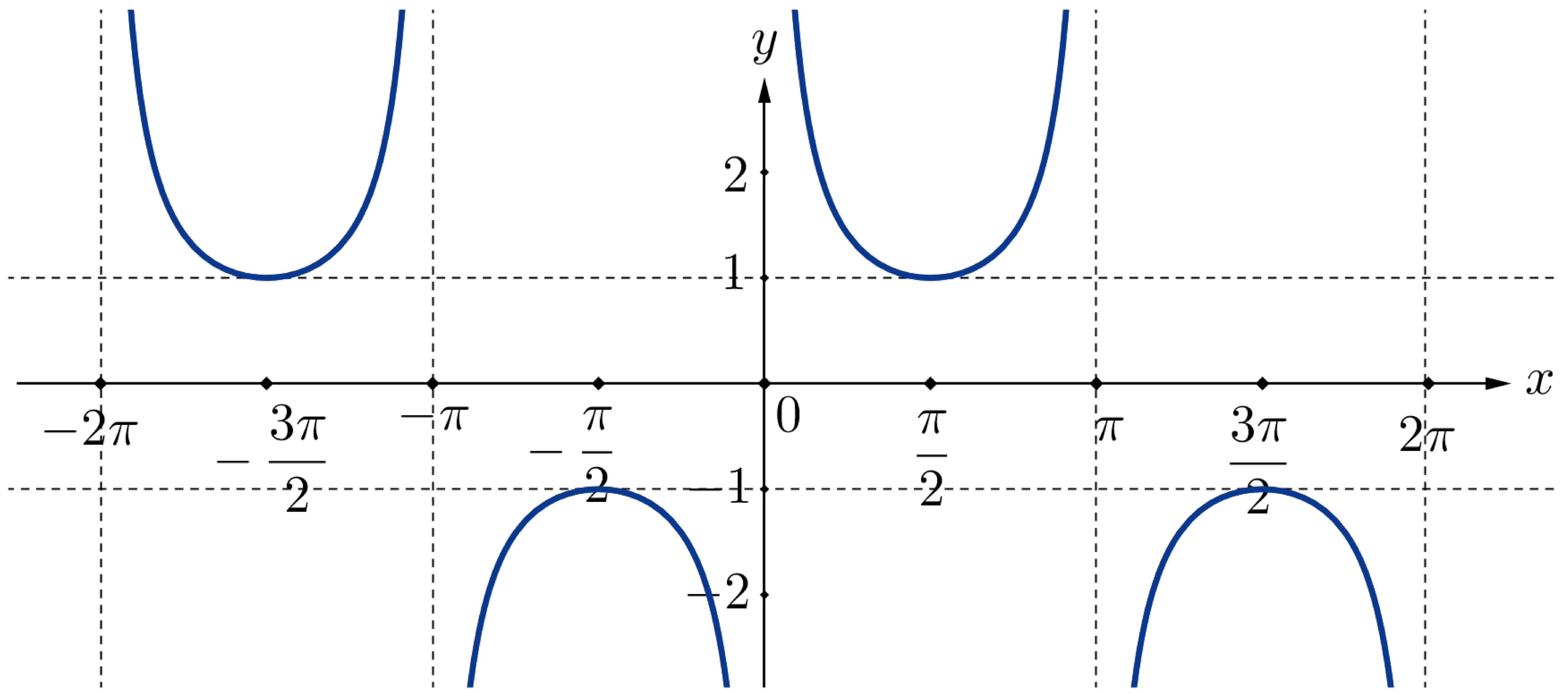
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	…
y	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	無意義	-2	…

由上表可觀察到：

① $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 或 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 時，$y=\csc x$ 為遞減函數。

② $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 或 $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$ 時，$y=\csc x$ 為遞增函數。

綜合以上所述，餘割函數 $y=\csc x$ 的圖形如下：



★ 餘割函數有以下特性：

① $y=\csc x$ 的週期為 2π 且當 $x=n\pi$，n 為整數，$y=\csc x$ 無意義。

② $y=\csc x$ 的函數值範圍為 $\csc x\geq 1$ 或 $\csc x\leq -1$，即 $|\csc x|\geq 1$。

③ 圖中亦用虛線畫出 $y=\sin x$ 的圖形，亦可利用倒數關係 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 得到 $y=\csc x$ 的圖形。

三角函數圖形的解讀中，我們都談到週期，讓我們來談一下週期函數，再次整理一下三角函數的週期。

【整理】週期函數

函數 $y=f(x)$ 的圖形若每隔一固定單位的形態皆相同，亦即可找到固定的正數 p，使得對於其定義域中的每一個元素 x，恆有 $f(x+p)=f(x)$，我們就稱這個函數為一週期函數，而滿足上述性質的最小正數 p，就稱為這個週期函數的週期。而 6 個三角函數皆為週期函數。其中

$y=\sin x$ ，$y=\cos x$ ，$y=\sec x$ ，$y=\csc x$ 的週期皆為 2π

$y=\tan x$ ，$y=\cot x$ 的週期為 π

例題 1

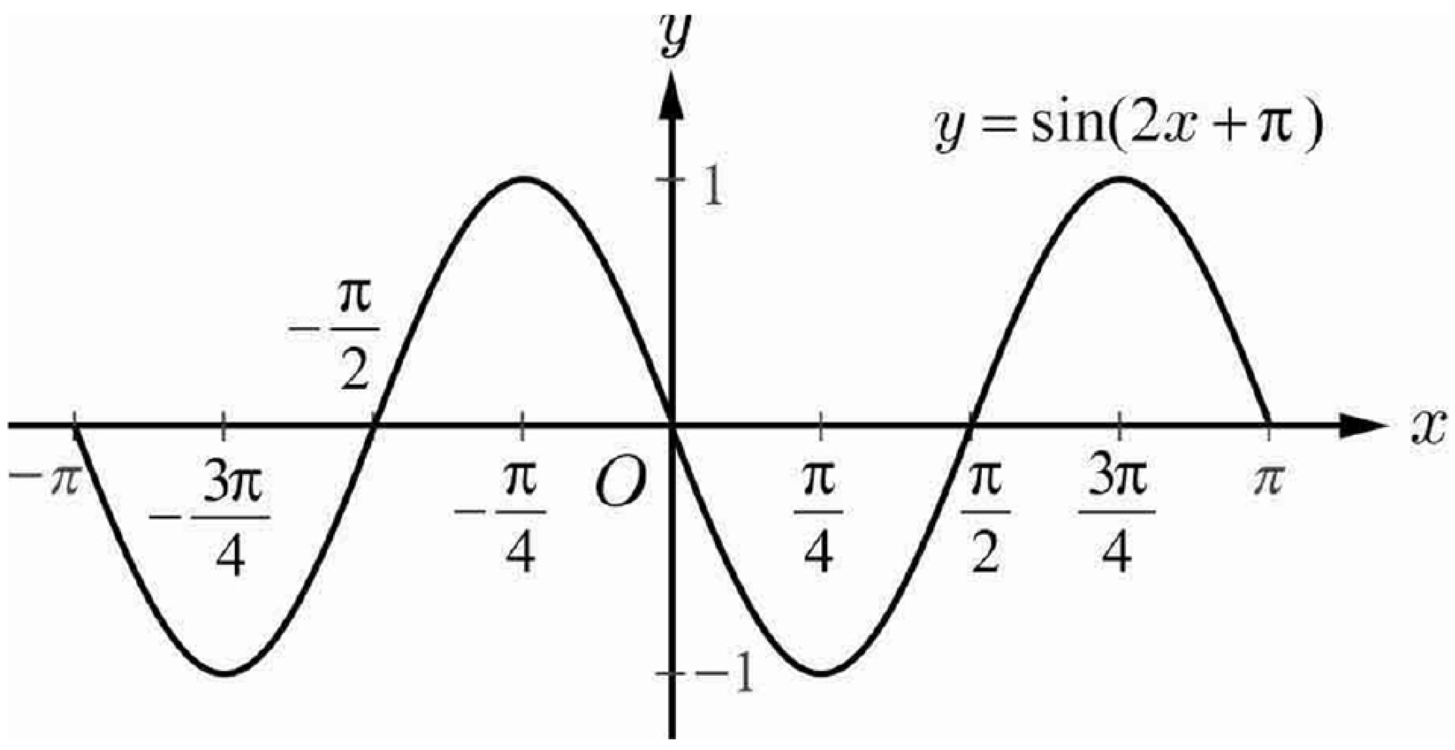
試繪出 $y=\sin(2x+\pi)$ 圖形並求出：① 函數的週期為多少？ ② 函數值 y 的範圍為何？

解：

$y=\sin(2x+\pi)$，利用描點法圖形如下：

所以週期 $y=\sin(2x+\pi)=\pi$

$y=\sin(2x+\pi)$ 的範圍為 $-1\le y\le 1$



隨堂練習 1

試畫函數 $y=\frac{1}{2}\sin 4x$ 的圖形並求出：① 函數的週期為多少？ ② 函數值 y 的範圍為何？

答：① $\frac{1}{2}\pi$ ② $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\sin 4x\le\frac{1}{2}$

我們可從上述範例可得下列結論：

對於 $y=a\sin(kx+h)$，其中

a 可將 $y=\sin x$ 振幅放大 $|a|$ 倍，k 可將 $y=\sin x$ 週期伸縮 $\left|\frac{1}{k}\right|$ 倍

例題 2

求下列三角函數的週期：

① $y=\sin 2x$　② $y=\cos 3x$　③ $y=2\tan x-3$　④ $y=8\sec\frac{x}{2}+1$

解：

① $y=\sin 2x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$　② $y=\cos 3x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$

③ $y=2\tan x-3$ 的週期為 π　④ $y=8\sec\frac{x}{2}+1$ 的週期為 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

隨堂練習 2

求下列三角函數的週期：

① $y=3\sin 4x+1$　② $y=\cos\frac{x}{5}$　③ $y=\frac{3}{5}\tan\frac{3x}{4}-7$

答：① $\frac{\pi}{2}$　② 10π　③ $\frac{4}{3}\pi$

例題 3

比較下列各函數值的大小：① $\sin 171°$ 與 $\sin 172°$　② $\tan 320°$ 與 $\tan 321°$

解：

① 由 $y=\sin x$ 的圖形知：在第二象限內，$\sin x$ 恆為遞減函數，所以 $\sin 171° > \sin 172°$

② 由 $y=\tan x$ 的圖形知：在第四象限內，$\tan x$ 恆為遞增函數，所以 $\tan 320° < \tan 321°$

隨堂練習 3

比較下列各函數值的大小：① $\cos 338°$ 與 $\cos 339°$　② $\cot 268°$ 與 $\cot 269°$

答：① $\cos 338° < \cos 339°$　② $\cot 268° > \cot 269°$

例題 4

求 $f(x)=4\sin x+3$ 的最大值與最小值。

解：

由 $y=\sin x$ 圖形可知，$-1\le\sin x\le 1$，我們將此式乘上 $4\Rightarrow -4\le 4\sin x\le 4$

同時加上 $3\Rightarrow -1\le 4\sin x+3\le 7$，所以最大值為 7，最小值為 -1

隨堂練習 4

求 $f(x)=2\cos x-5$ 的最大值與最小值。

答：最大值為 -3，最小值為 -7

例題 5

將 $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 的圖形畫在同一平面上，並利用圖形回答下列問題：

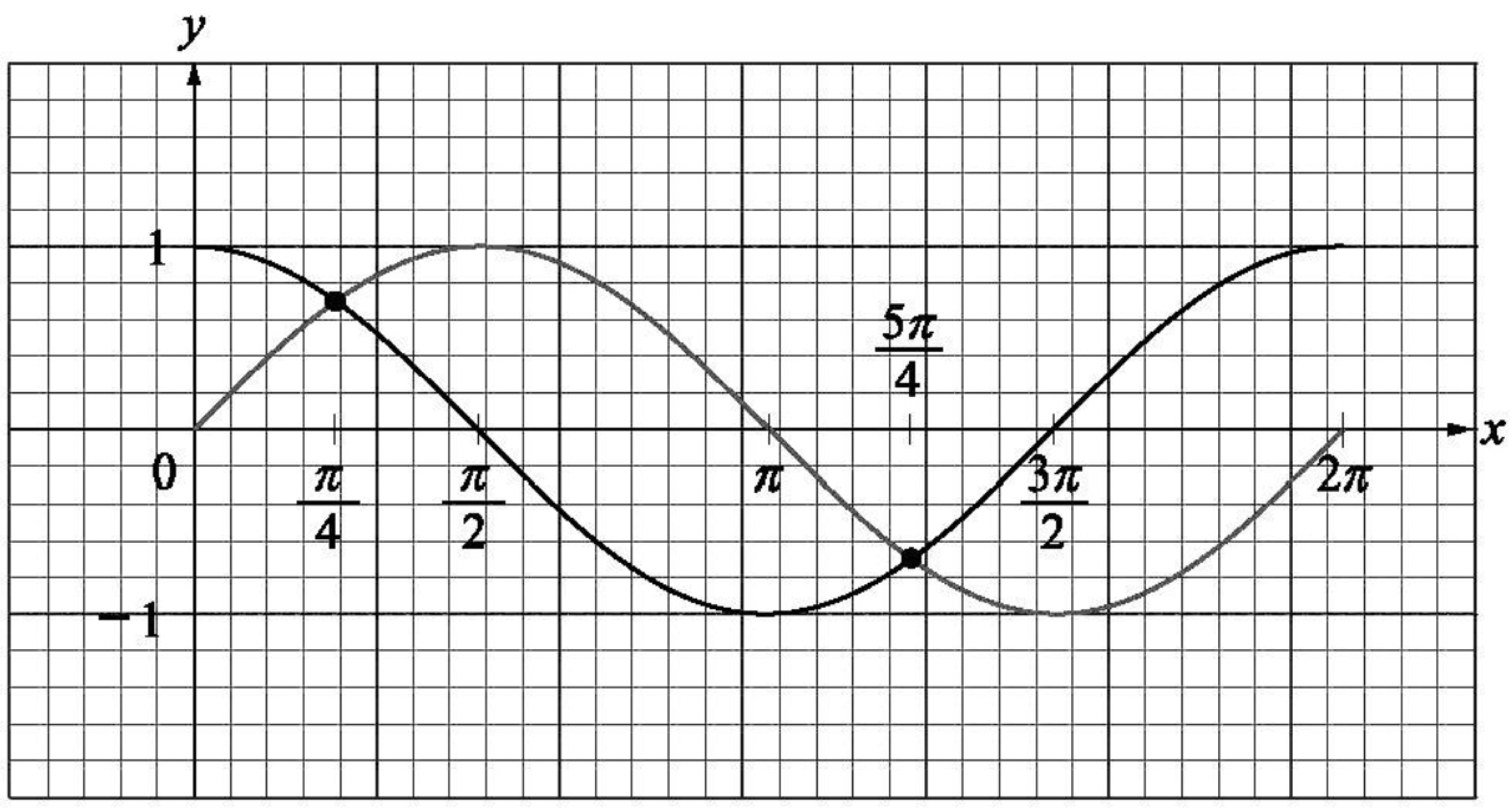
① 在 $0\le x\le 2\pi$ 時，$y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 的圖形有幾個交點？

② 在 $0\le x\le 2\pi$ 時，解 $\sin x=\cos x$。

③ 在 $0\le x\le 2\pi$ 時，何時 $\sin x\le\cos x$ ？

解：

將 $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 的圖形畫在同一平面上，如下圖所示：



觀察圖形可得：

① 在 $0\le x\le 2\pi$ 時，兩圖形有 2 個交點

② 上述二個交點的 x 坐標是 $x=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\frac{5\pi}{4}$，故 $\sin x=\cos x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 的解為 $x=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\frac{5\pi}{4}$

③ 在 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}\le x\le 2\pi$ 時，$\sin x\le\cos x$

隨堂練習 5

試問坐標平面上，當 $-\pi\le x\le\pi$ 時，函數 $y=\tan x$ 的圖形和 $y=1-x$ 的圖形有多少個交點？

答：3

例題 6

若 $3\cos^2\theta-7\cos\theta+2=0$，則 $\cos\theta$ 之值為何？

解：

$3\cos^2\theta-7\cos\theta+2=0\Rightarrow(\cos\theta-2)(3\cos\theta-1)=0$

$\cos\theta=2$（不合）或 $\frac{1}{3}$，故 $\cos\theta=\frac{1}{3}$

隨堂練習 6

$3\sec^2 x+5\sec x-2=0$，則 $\cos x$ 之值為何？

答：$\cos x=-\frac{1}{2}$

1-2 習題

1. 比較下列函數值的大小：

   ① $\sin 171°$ ， $\sin 172°$　② $\cos 309°$ ， $\cos 310°$　③ $\tan 230°$ ， $\tan 240°$

2. 試判斷下列函數是否有解？ ① $\sec x = \frac{1}{2}$　② $\tan x = -2$

3. 求下列各函數之週期 ：

   ① $y = |\cos x|$　② $y = \sin 3x$　③ $y = \tan 2x$　④ $y = 6\sin\left(\frac{x}{3} + 10°\right)$　⑤ $y = 7\tan(4x - 72°)$

4. $f(x) = 3\cos x + 2$ 的最大值為何？

5. 求方程式 $\sin x = \frac{1}{3}$ 在 $0 \le x \le 4\pi$ 範圍內，根之個數有多少個？

6. 若 $0 \le \theta < 2\pi$ ，則滿足方程式 $2\cos^2\theta - 11\cos\theta + 5 = 0$ 的 θ 值為何？

7. 若 $2\sin^2\theta + 5\cos\theta - 4 = 0$ ，則 $\sec\theta$ 之值為何？

簡答

1. ① $\sin 171° > \sin 172°$　② $\cos 309° < \cos 310°$　③ $\tan 230° < \tan 240°$
2. ① 無解　② $\tan x = -2$
3. ① $P = \pi$　② $P = \frac{2\pi}{3}$　③ $P = \frac{\pi}{2}$　④ $P = 6\pi$　⑤ $P = \frac{\pi}{4}$
4. 5
5. 4 個
6. $\theta = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5}{3}\pi$
7. $\sec\theta = 2$

☙ 第二章 複數 ❧

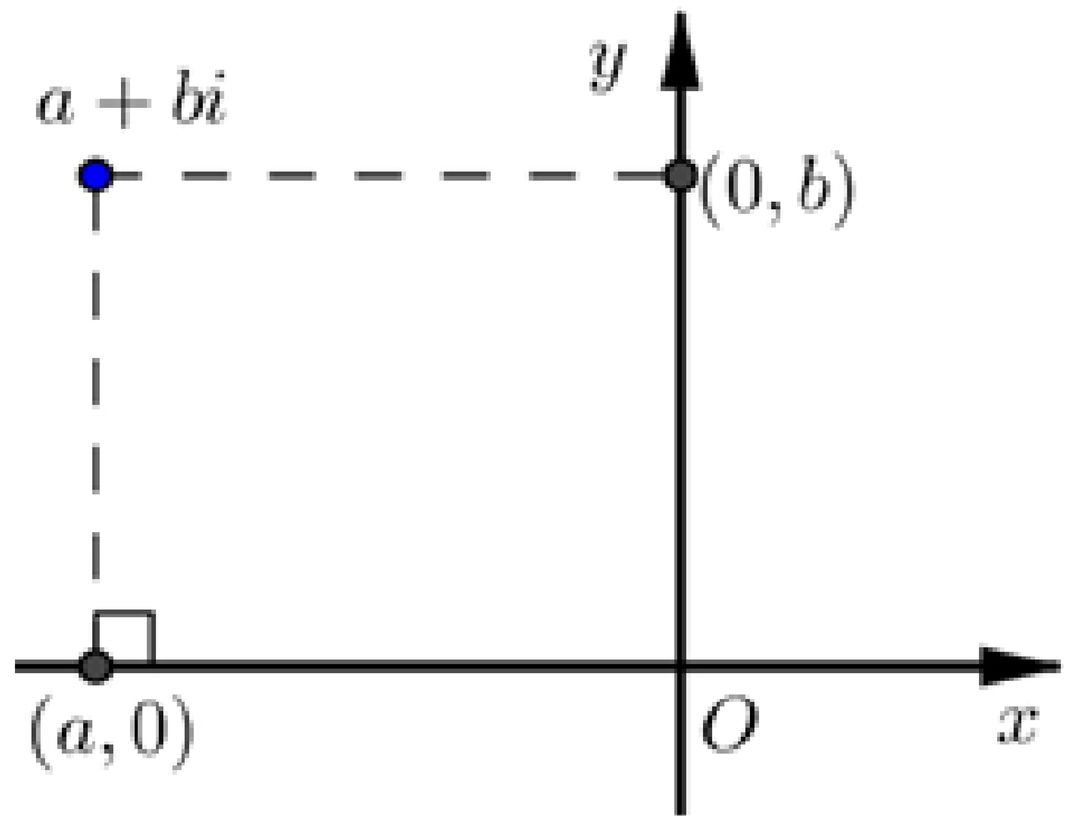
由於任一實數的平方必為正實數或 0，因此一元二次方程式 $x^2+1=0$ 無實數解。過去一年我們曾學到複數的定義與運算性質等有關複數的內容，至此我們對「數系」的認識擴大到複數了。因為複數在工程領域的學科（如：基本電學）佔有不可或缺的地位，所以本單元希望讓同學們對於複數的應用能有更深入的認識。

首先我們將認識由極坐標、直角坐標及三角函數結合而成的複數之極式，進一步再來學習極式的乘除運算，並利用棣美弗定理簡易地計算出一個複數的 n 次方根或 n 次乘冪。

2-1 複數平面與極式

我們知道，直角坐標系中的任一點皆可使用實數的數對來表示，例如 (a,b) 可以當作一個橫坐標為 a、縱坐標為 b 的點坐標；當然，作為點坐標的實數數對 (a,b) 也對應至坐標平面上唯一的一點。

在高中數學第一冊曾提到，若 a、b 兩數皆為實數，且虛數單位 $i=\sqrt{-1}$，則 $a+bi$ 稱為複數的標準式，其中 a 稱為此複數的實部、b 為虛部，它們恰好可以組成一個對應到坐標平面上一點的實數數對 (a,b)，複數和坐標平面即藉此建立了「1 對 1」的對應關係，如圖一。

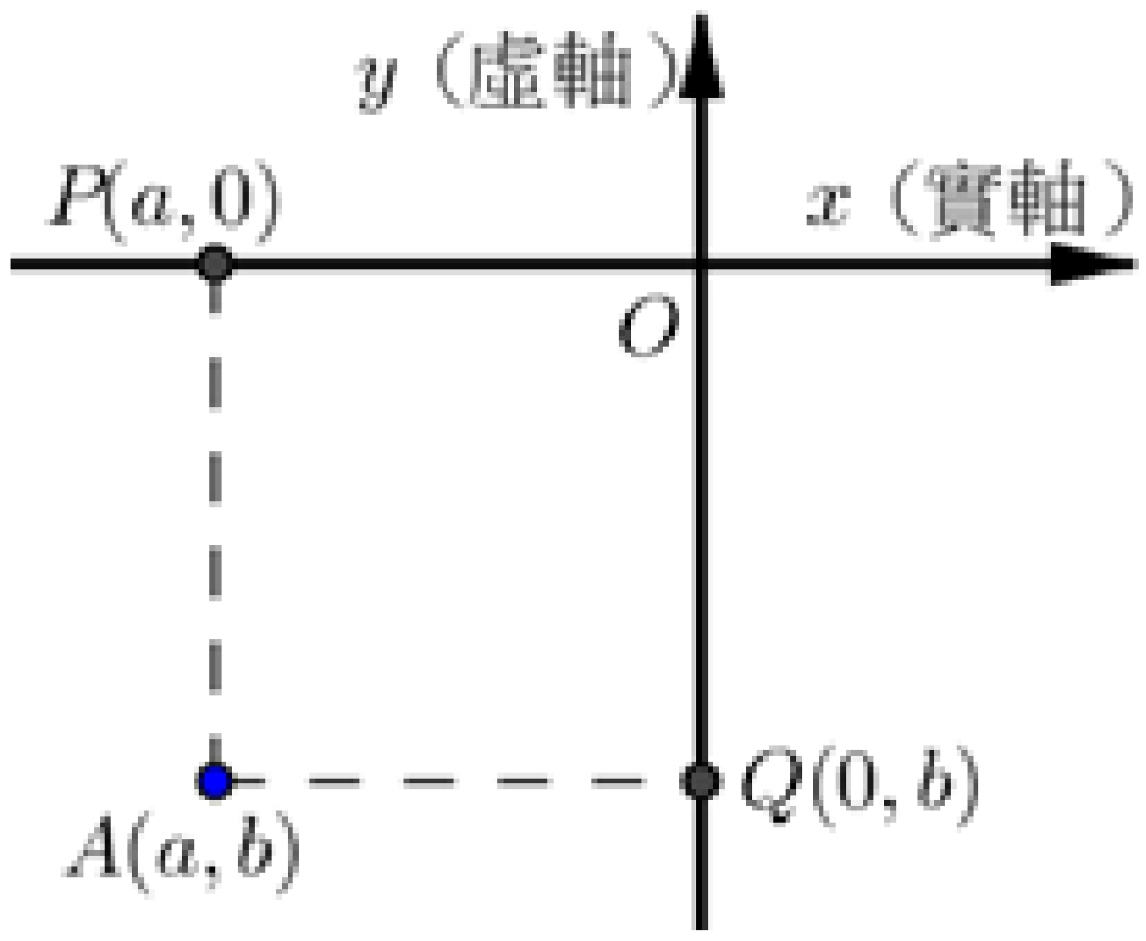


〈圖一〉

2-1.1 複數平面

數學家高斯 (*Carl Friedrich Gauss*，1777 ～ 1855) 在十八世紀末期即已採用實數數對 (a,b) 作為複數 $a+bi$ 的表示方法，並且將數對 (a,b) 對應至坐標平面上的點。這樣的坐標平面，稱為**複數平面**（後人為紀念高斯，亦稱為**高斯平面**）。複數平面上橫軸稱為**實軸**，實軸上的點代表了實數的全體；縱軸稱為**虛軸**，虛軸上的點除了原點外都代表著純虛數的全體。

如圖二，在複數平面上的一點 A 作垂直線至 x 軸，其垂足 P 的坐標為 $(a,0)$，再作一垂直線至 y 軸，垂足 Q 點的坐標為 $(0,b)$。A 點的坐標即為 (a,b)，其代表的複數為 $a+bi$。

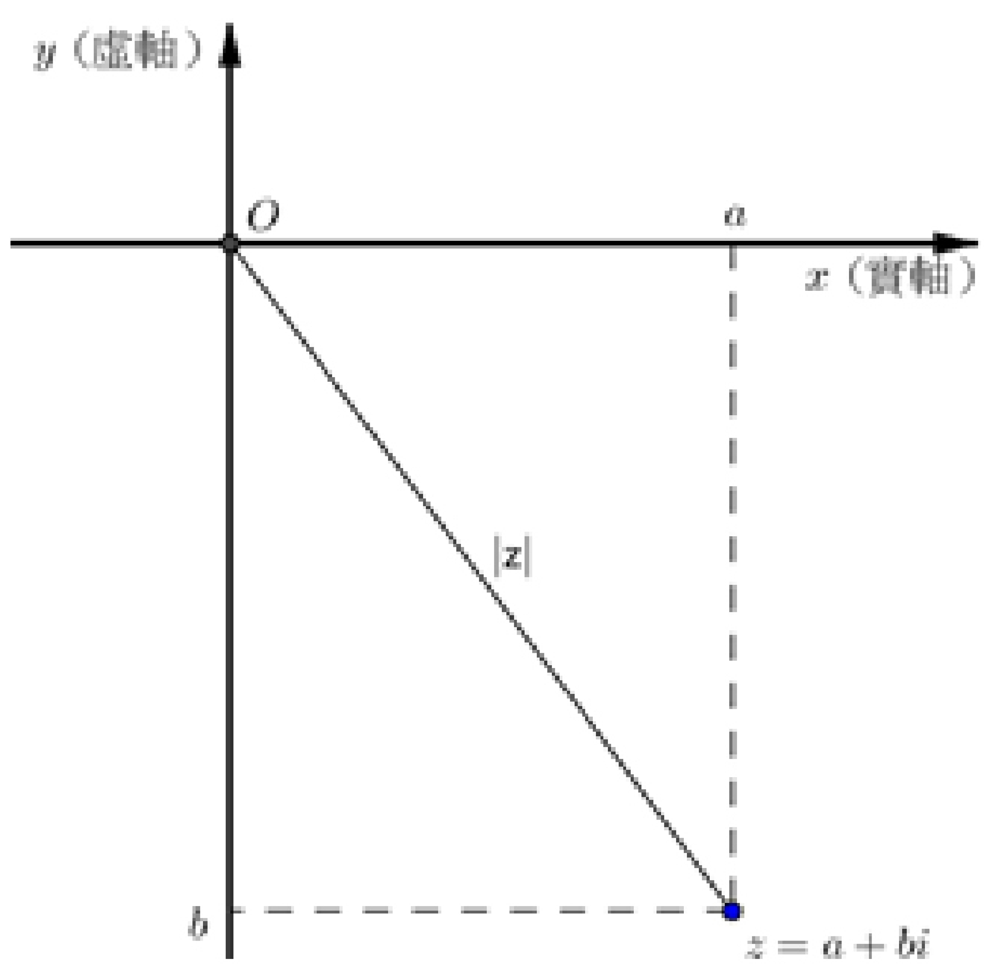


〈圖二〉

複數的絕對值

設 a、b 為實數，複數 $z=a+bi$ 在複數平面上的點到原點 O 的距離，稱為複數 z 的絕對值，以 $|z|$ 表示。如圖三，利用兩點之間的距離公式可知，

$$|z|=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$



〈圖三〉

由於 $z=a+bi$ 的共軛複數 $\bar{z}=a-bi$，不難發現

$$|\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|\geq 0$$

且 $$z\times\bar{z}=(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=|z|^2$$

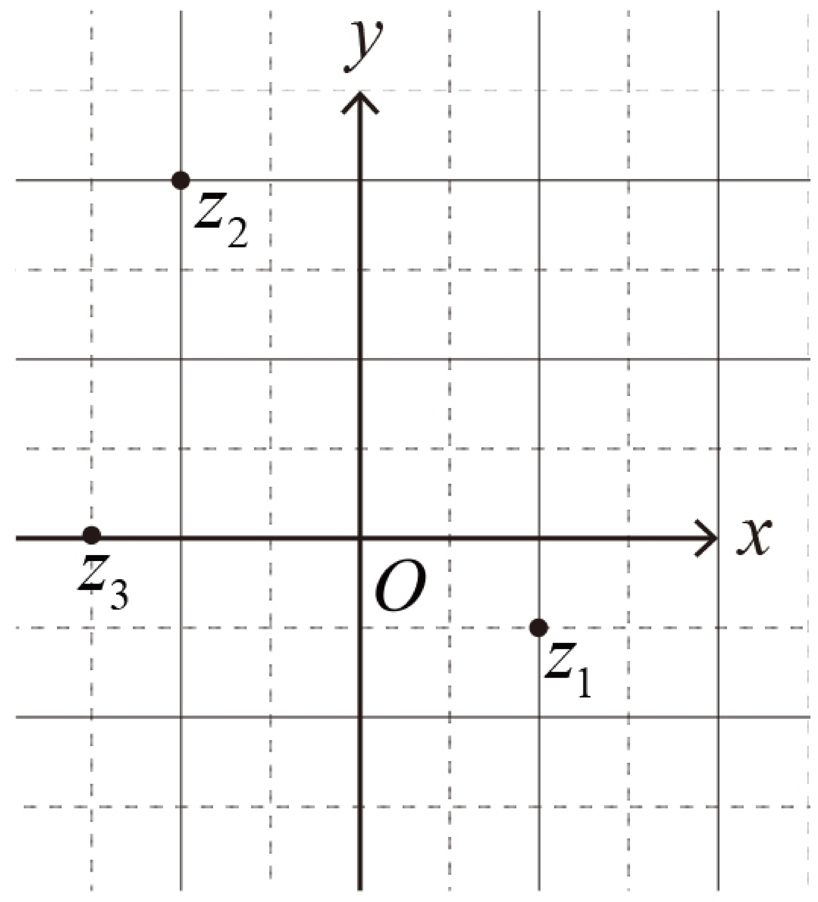
例題 1

請在複數平面上描繪下列三個複數所代表的點，並求出各複數的絕對值：

① $z_1 = 2 - i$ ② $z_2 = -2 + 4i$ ③ $z_3 = -3$

解：

三個複數 $z_1 = 2 - i$、$z_2 = -2 + 4i$ 及 $z_3 = -3$ 在複數平面上對應的點分別為 $(2, -1)$、$(-2, 4)$ 及 $(-3, 0)$，如圖。而這三個複數的絕對值分別為：



$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$，

$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$，

$|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$。

隨堂練習 1

請在複數平面上描繪下列三個複數所代表的點，並求出各複數的絕對值：

① $z_1 = -2 - 2i$ ② $z_2 = -3 + 2i$ ③ $z_3 = -4i$

答：圖略。 ① $|z_1| = 2\sqrt{2}$ ② $|z_2| = \sqrt{13}$ ③ $|z_3| = 4$

複數的絕對值具有以下的運算性質，可供我們在做絕對值得計算時更為便利。

【整理】複數絕對值的運算性質

設 z_1、z_2 為兩複數，n 為自然數，

1. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
2. $|z_1^{\,n}| = |z_1|^n$
3. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0)$

◎說明

設 $z_1 = a + bi$、$z_2 = c + di$，其中 a、b、c、d 皆為實數，

1. 因為 $z_1 \times z_2 = (a+bi)\times(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$，

所以 $|z_1 \times z_2| = |(ac-bd)+(ad+bc)i| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$
$= \sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2}$
$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$

又 $|z_1| \times |z_2| = \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)\times(c^2+d^2)}$
$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$

故 $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$。

2. 由 $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ 可知 $|z_1^{\,2}| = |z_1 \times z_1| = |z_1| \times |z_1| = |z_1|^2$，

$|z_1^{\,3}| = |z_1^{\,2} \times z_1| = |z_1^{\,2}| \times |z_1| = |z_1|^2 \times |z_1| = |z_1|^3$，……，依此類推可得到，

$|z_1^{\,n-1}| = |z_1^{\,n-2} \times z_1| = |z_1^{\,n-2}| \times |z_1| = |z_1|^{n-2} \times |z_1| = |z_1|^{n-1}$，

$|z_1^{\,n}| = |z_1^{\,n-1} \times z_1| = |z_1^{\,n-1}| \times |z_1| = |z_1|^{n-1} \times |z_1| = |z_1|^n$。

3. 假設 $z \neq 0$，因為 $z \times \dfrac{1}{z} = 1$，且 $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$，所以 $\left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$，

移項可得到 $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$，

因此 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \times \dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \left|\dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \dfrac{1}{|z_2|} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$。

例題 2

設 $z_1=-3+5i$ 、 $z_2=-2+i$，試計算下列各絕對值：

①$\left|z_1-z_2\right|$ ②$\left|\overline{z_2}\right|$ ③$\left|z_1\times\overline{z_2}\right|$ ④$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ ⑤$\left|{z_2}^6\right|$

解：

① 因為 $z_1-z_2=\left[(-3)-(-2)\right]+(5-1)i=-1+4i$ ，

所以 $\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$

②$\left|\overline{z_2}\right|=\left|z_2\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

③$\left|z_1\times\overline{z_2}\right|=\left|z_1\right|\times\left|\overline{z_2}\right|=\left|z_1\right|\times\left|z_2\right|=\sqrt{(-3)^2+5^2}\times\sqrt{5}=\sqrt{34}\times\sqrt{5}=\sqrt{170}$

④$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}=\dfrac{\sqrt{34}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{170}}{5}$

⑤$\left|{z_2}^6\right|=\left|z_2\right|^6=\sqrt{5}^6=125$

隨堂練習 2

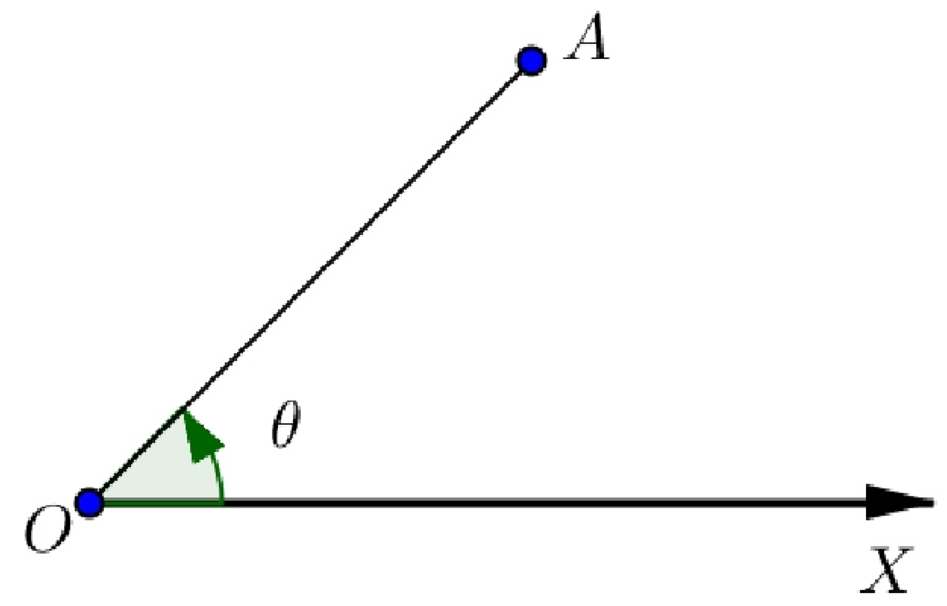
設 $z_1=-4-3i$ 、 $z_2=3+i$ ，試計算下列各絕對值：

①$\left|\overline{z_1+z_2}\right|$ ②$\left|\overline{z_1}\times z_2\right|$ ③$\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$ ④$\left|{z_2}^6\right|$

答：① $\sqrt{5}$ ② $5\sqrt{10}$ ③ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ④1000

2-1.2 極坐標

標示平面上一個點的位置，除了大家熟知的直角坐標之外，極坐標也是個常見的方法。如圖四，我們在平面上取一定點 O，並自 O 點向右作一水平射線 OX。另有異於 O 點的一定點 A，連接 $\overline{OA}$ 並令 $\overline{OA}=r$；另外假設角 θ 是以水平射線 OX 為始邊、$\overline{OA}$ 為終邊的有向角。有序的實數數對 $[r,\theta]$ 即可做為表示 A 點的位置的極坐標。

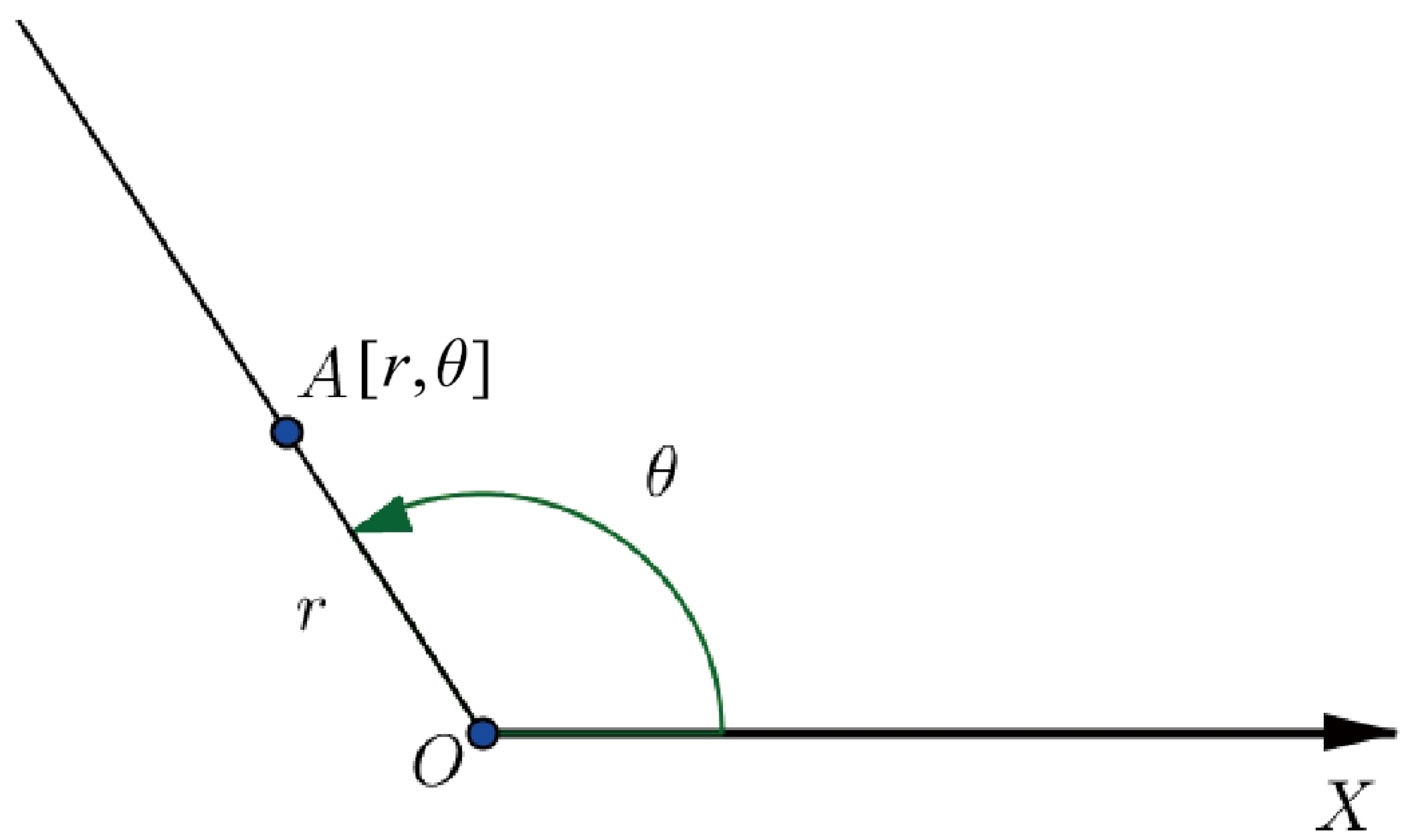


〈圖四〉

這種以距離與方向來表示平面上任一點位置的極坐標系中，定點 O 稱為**極點**、水平射線 OX 稱為**極軸**，而極坐標 $[r,\theta]$ 中的 r 稱為**向徑**、有向角 θ 稱為輻角，當 $0\le\theta<2\pi$ 時，輻角 θ 可稱為**主輻角**。

若 n 為整數，則 θ 與 $\theta+2n\pi$ 為始邊與終邊相同的同界角，因此當 n 為整數時，$[r,\theta]$ 與 $[r,\theta+2n\pi]$ 都是同一點的極坐標。

特別地，因為極點 O 的向徑為 0，所以極點 O 的極坐標為 $(0,\theta)$，其中 θ 為任意角。給定一個點的極坐標 $[r,\theta]$ 時，我們可以在極坐標平面上找到它所對應之點的位置。例如 $r>0$ 時，以極軸 OX 為始邊，繪出有向角 θ 的終邊，於終邊上取一點 A，使得 $\overline{OA}=r$，此時 A 點的極坐標即為 $[r,\theta]$。如圖五。



〈圖五〉

另外當 $r=0$ 時，如前所述，$(0,\theta)$ 恰為極點。

例題 3

請依照下列兩點的極坐標，將其描繪於極坐標平面上：① $A[2,\frac{\pi}{4}]$ ② $B[4,-\frac{2\pi}{3}]$

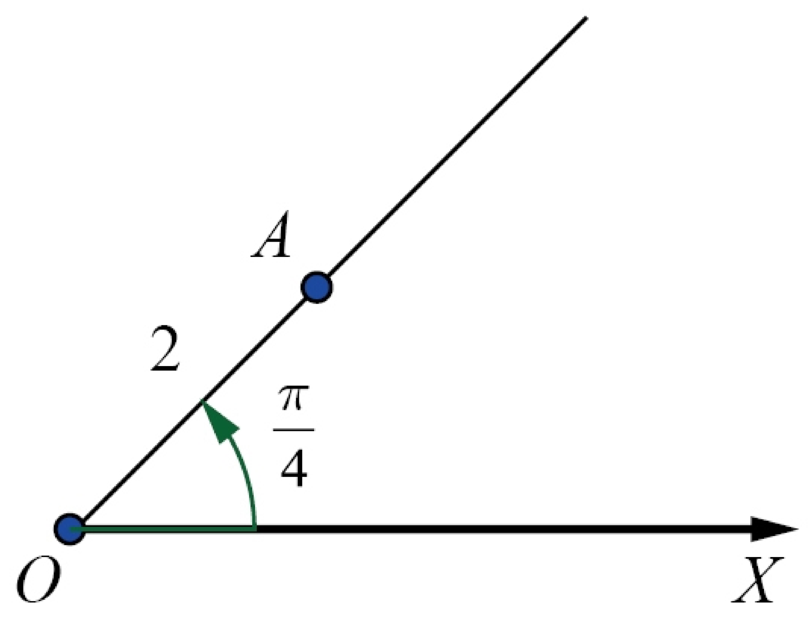
解：

利用前述在極坐標平面上描繪點的方式，可繪出下列結果：

① 以極軸 OX 為始邊，繪出有向角 $\frac{\pi}{4}$ 的終邊，

在終邊上取一點 A，使得 $\overline{OA}=2$，

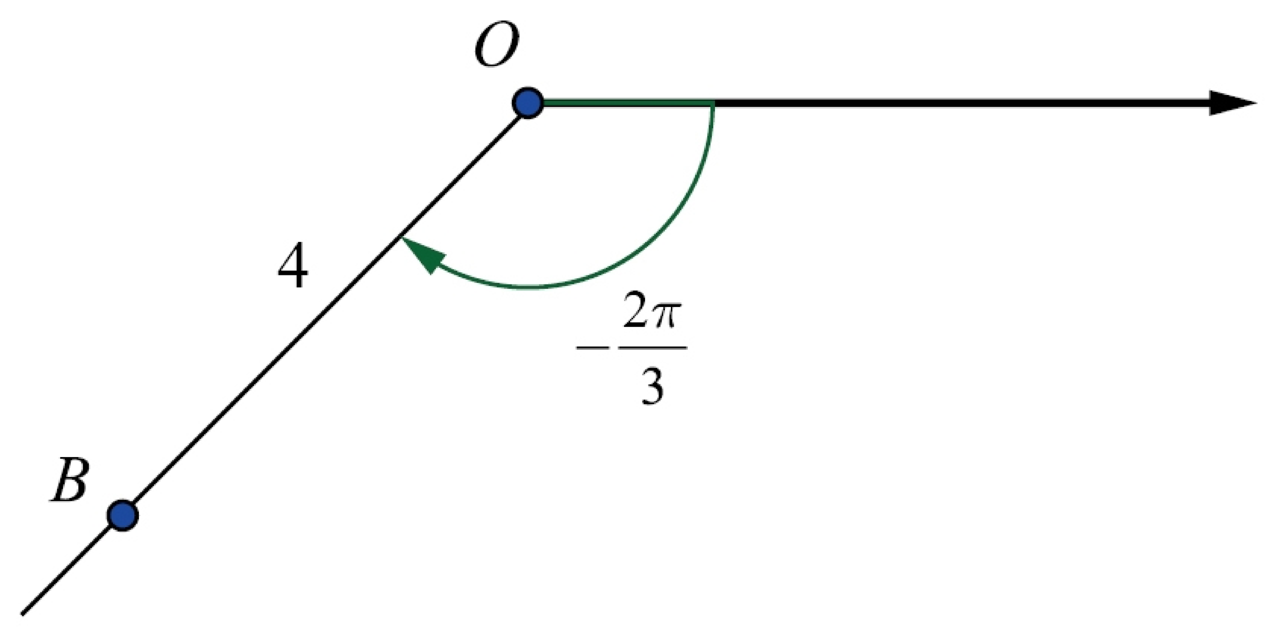
此時 A 點的極坐標即為 $[2,\frac{\pi}{4}]$。



② 以極軸 OX 為始邊，繪出有向角 $-\frac{2\pi}{3}$ 的終邊，

在終邊上取一點 B，使得 $\overline{OB}=4$，

此時 B 點的極坐標即為 $\overline{OB}=4$。



隨堂練習 3

請依照下列兩點的極坐標，將其描繪於極坐標平面上：① $A[2,\frac{\pi}{6}]$ ② $B[2,-\frac{\pi}{3}]$

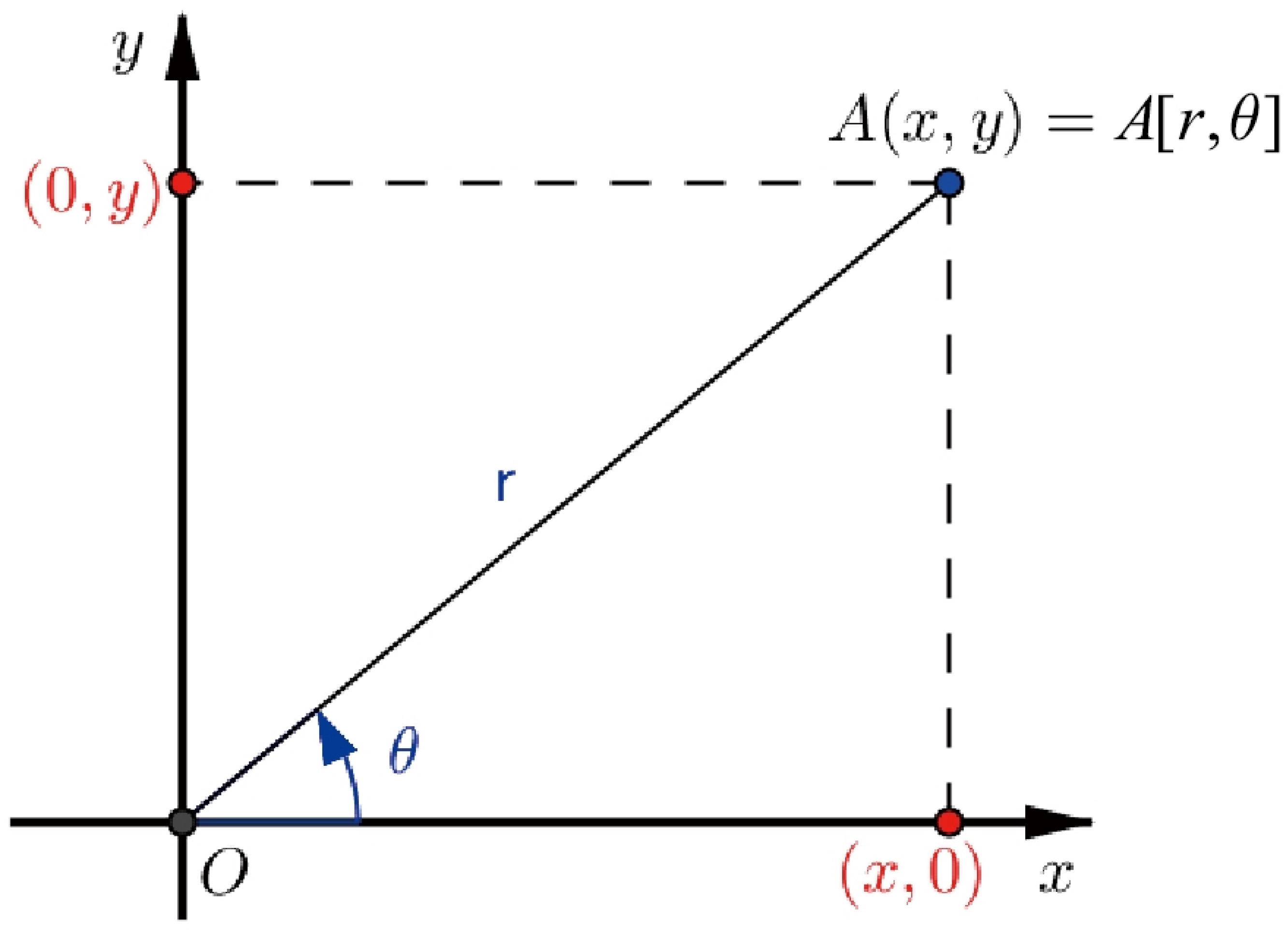
答：圖略

極坐標與直角坐標的關係

當我們將直角坐標系的原點 O 和極坐標系的極點 O 重合，並且使極軸（水平射線 OX）與直角坐標系的 x 軸正向重合，並設定相同長度作為單位長時，如圖六，任何一個異於原點之 A 點的直角坐標 (x,y) 與極坐標 $[r,\theta]$ 有以下關係：

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ 、 } \cos\theta=\frac{x}{r} \text{ 、 } \sin\theta=\frac{y}{r} \text{ ，}$$

$$\text{或 } r^2=x^2+y^2 \text{ 、 } x=r\cos\theta \text{ 、 } y=r\sin\theta \text{ 。}$$



〈圖六〉

例題 4

試將下列兩點的極坐標化成直角坐標：① $A[4,\frac{\pi}{4}]$　② $B[2,\frac{2\pi}{3}]$

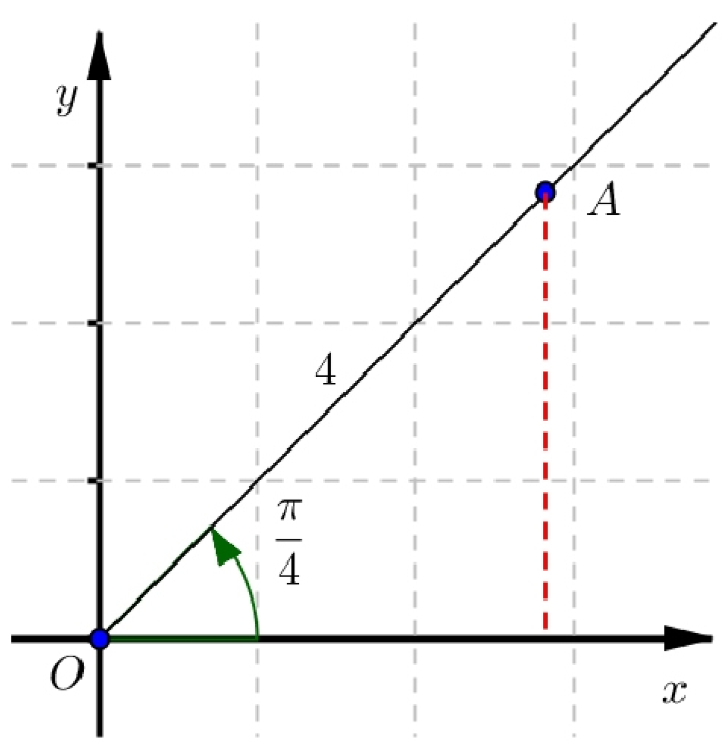
解：

由上可知，當一點的極坐標為 $[r,\theta]$ 且其直角坐標為 (x,y) 時，$x=r\cos\theta$ 、 $y=r\sin\theta$ 。

① $r=4$ ，$\theta=\frac{\pi}{4}$ ，

$$x=4\cos\frac{\pi}{4}=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2} \text{ ， } y=4\sin\frac{\pi}{4}=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

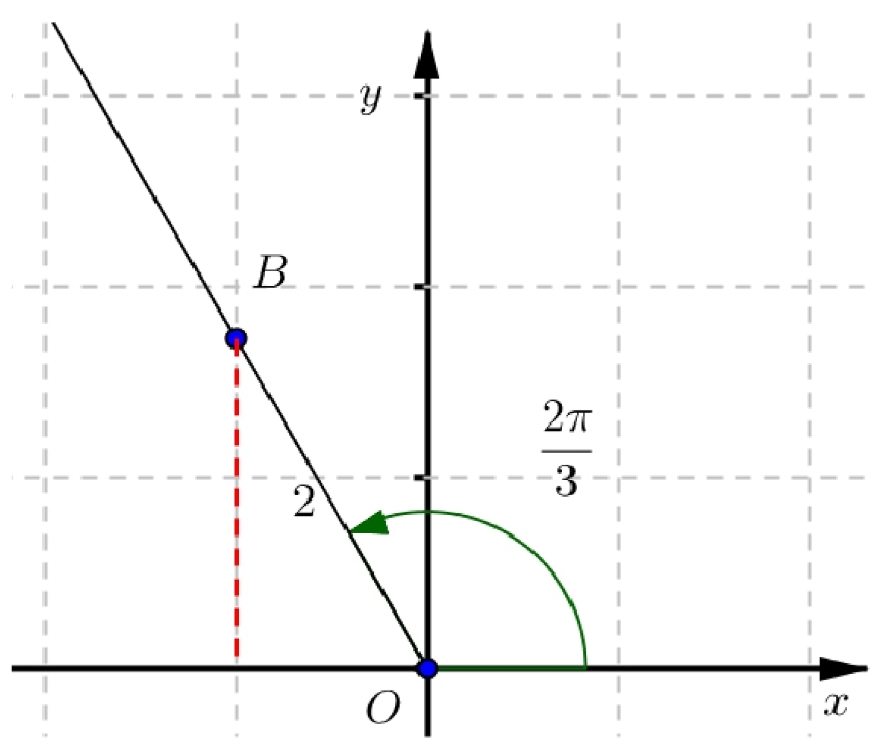
故 A 點的直角坐標為 $\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$ 。



② $r=2$ ，$\theta=\frac{2\pi}{3}$ ，

$$x=2\cos\frac{2\pi}{3}=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \text{ ， } y=2\sin\frac{2\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

故 B 點的直角坐標為 $\left(-1,\sqrt{3}\right)$ 。



隨堂練習 4

試將下列兩點的極坐標化成直角坐標：① $A[2,-\frac{\pi}{6}]$　② $B[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}]$

答：① $\left(\sqrt{3},-1\right)$　② $\left(-2,-2\right)$

例題 5

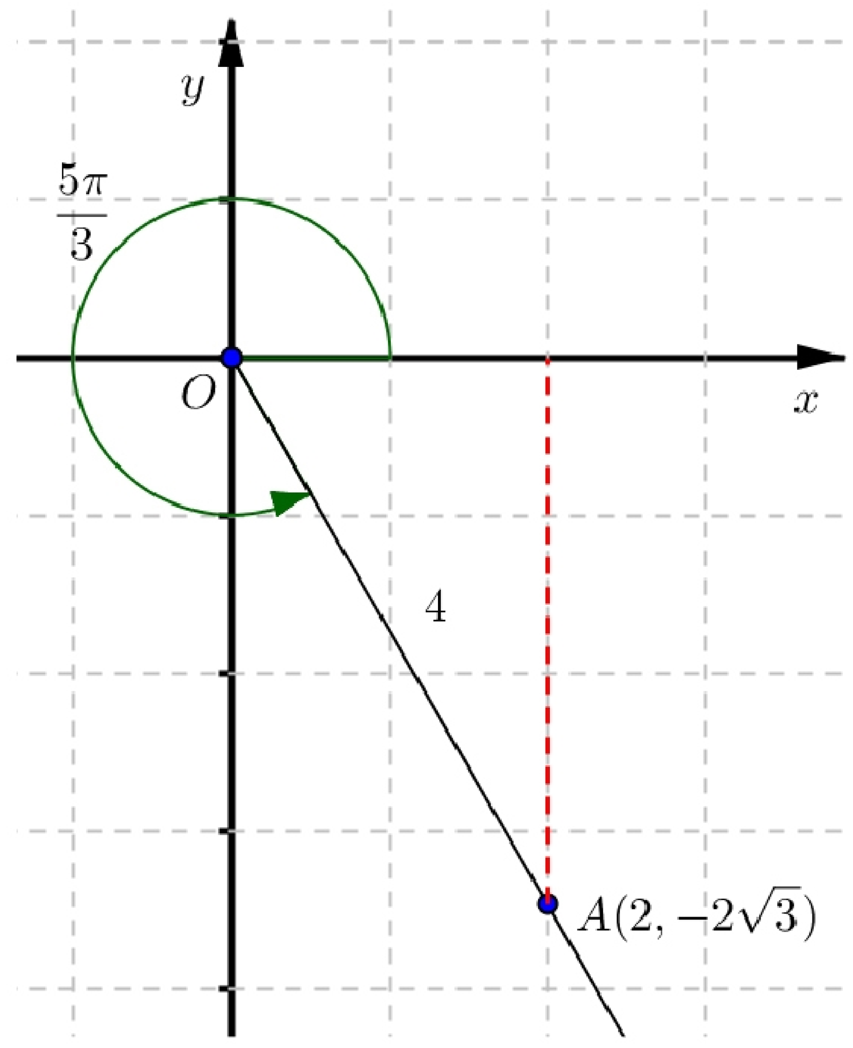
試將下列兩點的直角坐標化成極坐標，並將其輻角以主輻角表示：

① $A(2,-2\sqrt{3})$　② $B(-2,2)$

解：

由上可知，當一點的直角坐標為 (x,y) 且其極坐標為 $[r,\theta]$ 時，

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 、 $\cos\theta=\frac{x}{r}$ 、 $\sin\theta=\frac{y}{r}$ 。

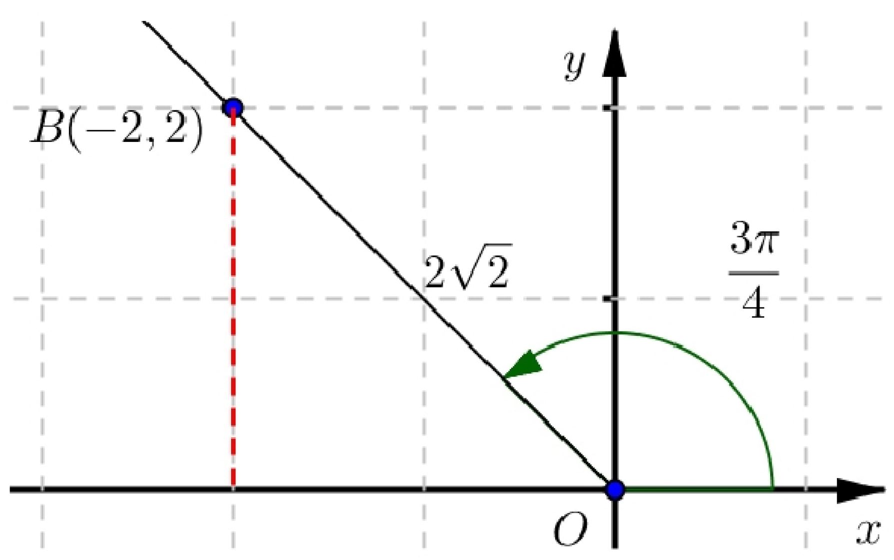


① $r=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=4$ ，

又 $\cos\theta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ， $\sin\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

可以得知 $\theta=\frac{5\pi}{3}$ ，

故 A 點的極坐標為 $[4,\frac{5\pi}{3}]$ 。



② $r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ，

又 $\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

可以得知 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ ，

故 B 點的極坐標為 $[2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}]$ 。

隨堂練習 5

試將下列兩點的直角坐標化成極坐標，並將其輻角以主輻角表示：

① $A(-1,\sqrt{3})$　② $B(0,5)$

答：① $[2,\frac{2\pi}{3}]$　② $[5,\frac{\pi}{2}]$

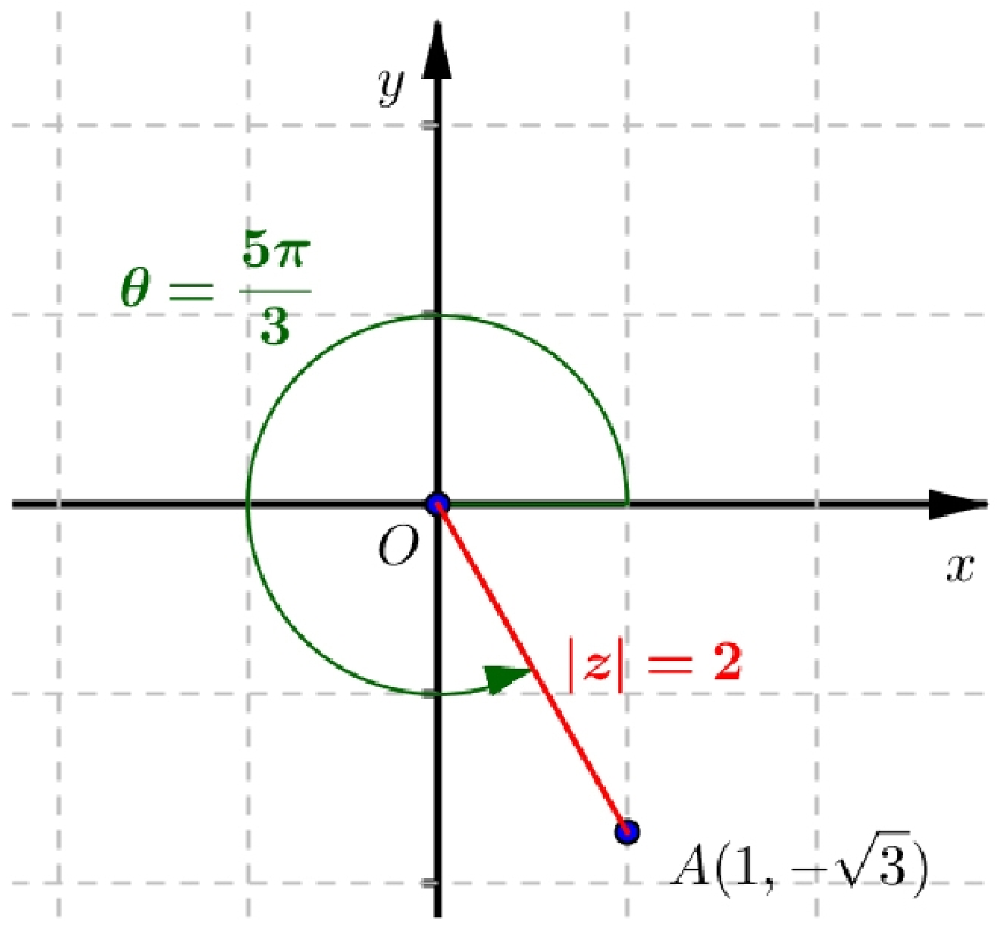
2-1.3 複數的極式

如圖七，複數 $z=1-\sqrt{3}i$ 在複數平面上對應到一點 $A(1,-\sqrt{3})$。連接 $\overline{OA}$，不難發現複數 z 的絕對值 $|z|=\overline{OA}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，且輻角 $\theta=\dfrac{5}{3}\pi$。

又由三角函數的定義可知，$\cos\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{1}{2}$、$\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $z=1-\sqrt{3}i=2(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=2(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi)$。

將複數 $z=1-\sqrt{3}i$ 寫成如 $2(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi)$ 的表示法，就稱為複數的**極式**。

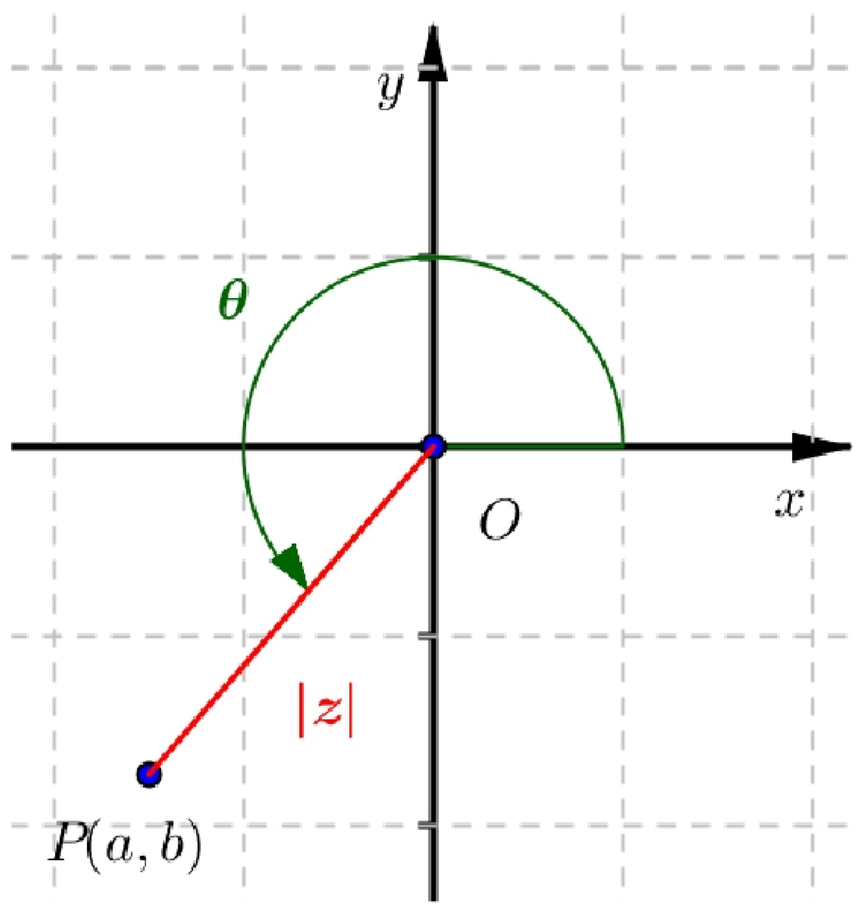


〈圖七〉

設 a、b 為實數，複數 $z=a+bi$ 在複數平面上對應的點為 $P(a,b)$，如圖八。其中 P 點與原點 O 的距離，即複數 z 的絕對值 $|z|=\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$，且由 x 軸正向旋轉至 $\overline{OP}$ 的有向角 θ 即為 z 的輻角。由三角函數的定義可知：

$$\cos\theta=\frac{a}{|z|} \text{ 且 } \sin\theta=\frac{b}{|z|}\text{；移項可得 } a=|z|\cos\theta \text{、} b=|z|\sin\theta\text{，}$$

所以 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ 即為複數 z 的極式。



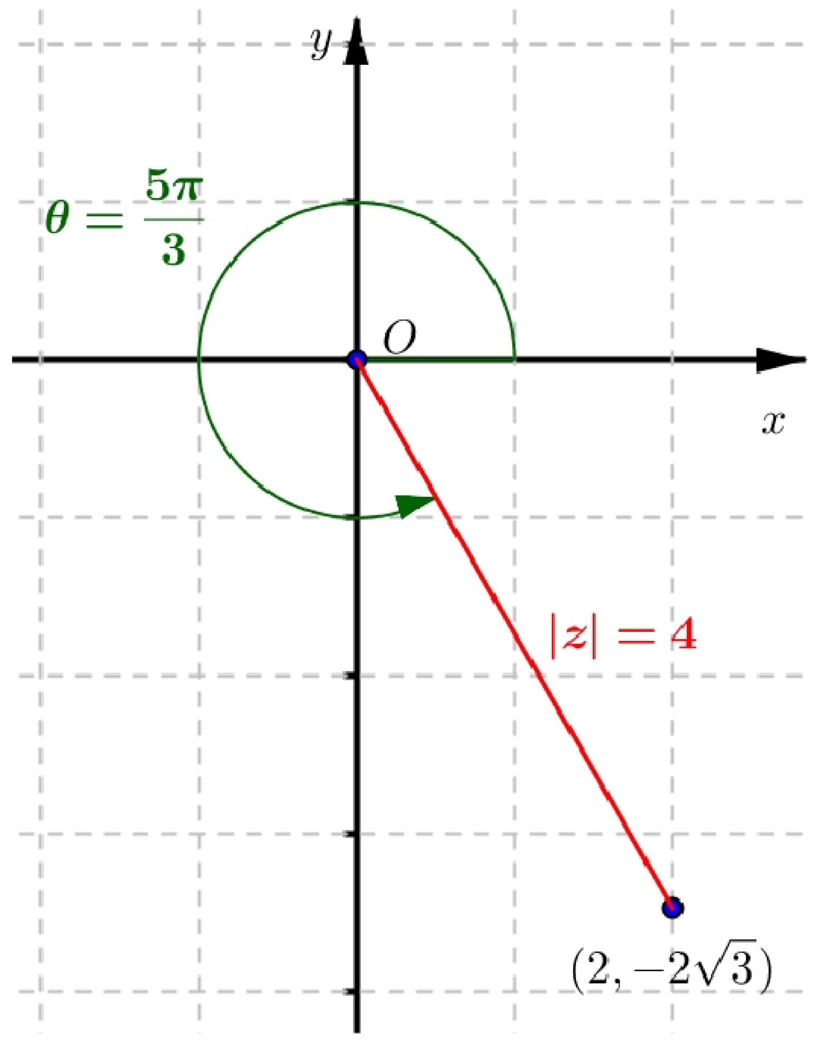
〈圖八〉

其中 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 稱為複數 z 的**絕對值**(或稱**向徑**);有向角 θ 稱為複數 z 的**輻角**。當 $0\le\theta<2\pi$ 時,可以稱 θ 為複數 z 的**主輻角**,以 **Arg(z)** 表示。特別地,當 $z=0$ 時,向徑 $|z|=0$,任意角皆可為其輻角,$z=0$ 無主輻角。

例題 6

試將複數 $z=2-2\sqrt{3}i$ 化成極式,並試求 z 的絕對值及主輻角。

解:



z 的絕對值 $|z|=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=4$,

$z=2-2\sqrt{3}i=4\times(\frac{2}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}i)=4\times(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$,

其中 $\frac{1}{2}=\cos\frac{5}{3}\pi$ 且 $-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{5}{3}\pi$,所以複數 z 的主輻角為 $\frac{5}{3}\pi$,

故 $z=4\times(\frac{2}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}i)=4(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$。

隨堂練習 6

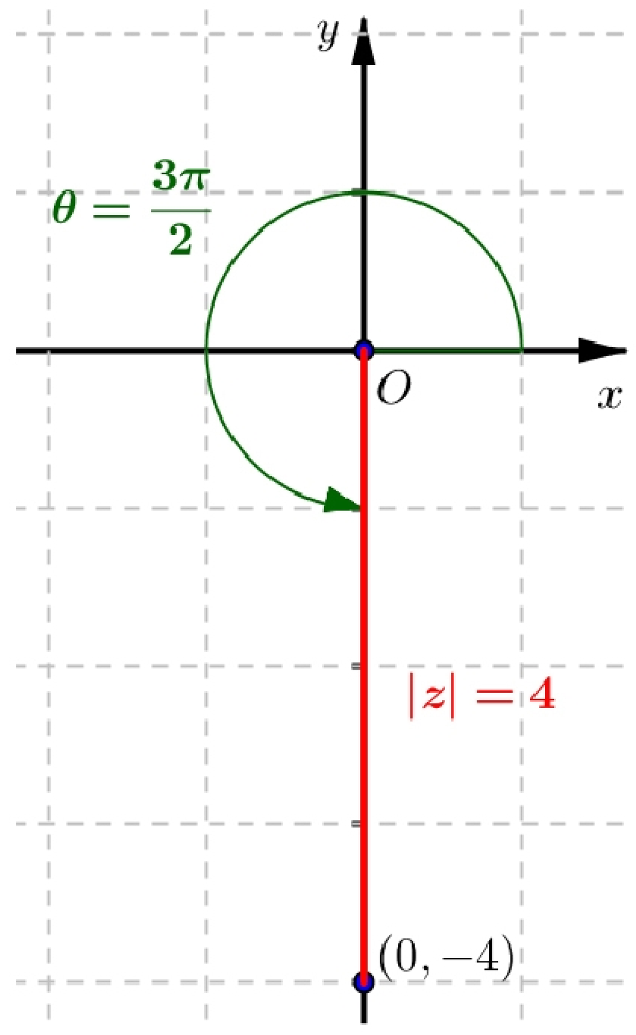
試將複數 $z=-2-2i$ 化成極式,並試求 z 的絕對值及主輻角。

答:$z=2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$,$|z|=2\sqrt{2}$,$Arg(z)=\frac{5\pi}{4}$。

例題 7

試將複數 $z=-4i$ 化成極式，並試求 z 的絕對值及主輻角。

解：



$z=0-4i$ 的絕對值為 $|z|=\sqrt{0^2+(-4)^2}=4$，

$z=0-4i=4\times(0-i)$

其中 $0=\cos\frac{3}{2}\pi$ 且 $-1=\sin\frac{3}{2}\pi$，所以複數 z 的主輻角為 $\frac{3}{2}\pi$，

故 $z=4\times(0-i)=4(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$。

隨堂練習 7

試將複數 $z=5$ 化成極式，並試求 z 的絕對值及主輻角。

答：$z=5(\cos 0+i\sin 0)$，$|z|=5$，$Arg(z)=0$。

2-1 習題

1. 設 $z=3+2i$ 試在複數平面上描繪出 z、$-z$、$\bar{z}$、$-\bar{z}$ 四個點的位置。

2. 試求下列各複數的絕對值：

 ① $z_1=-\dfrac{15}{17}+\dfrac{8}{17}i$ ② $z_2=(3-3i)\overline{(-4+3i)}$ ③ $z_3=\left(\dfrac{2-i}{-3+i}\right)^4$

3. 試依照下列各點的極坐標，將其描繪於極坐標平面上：① $A[1,\dfrac{\pi}{2}]$ ② $B[4,-\dfrac{3\pi}{4}]$

4. 試將下列各點的極坐標化成直角坐標：① $[2,\dfrac{5\pi}{6}]$ ② $[8,-\dfrac{2}{3}\pi]$ ③ $[2,\dfrac{3}{2}\pi]$

5. 試將下列各點的直角坐標化成極坐標，其中輻角請以主輻角表示：

 ① $(-3,\sqrt{3})$ ② $(-4,0)$ ③ $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

6. 試以主輻角表示下列各複數的極式：① $z_1=-\sqrt{3}-i$ ② $z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ $z_3=1-i$

7. 設複數 $z=-\cos 50°-i\sin 50°$，試求 $Arg(z)$ 之值。

簡答

1. $z=3+2i$，$-z=-3-2i$，$\bar{z}=3-2i$，$-\bar{z}=-3+2i$，圖略

2. ① 1 ② $15\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{1}{4}$

3. 略

4. ① $(-\sqrt{3},1)$ ② $(-4,-4\sqrt{3})$ ③ $(0,-2)$

5. ① $(2\sqrt{3},\dfrac{5\pi}{6})$ ② $(4,\pi)$ ③ $(2,\dfrac{7\pi}{4})$

6. ① $z_1=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$ ② $z_2=\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}$ ③ $z_3=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

7. $Arg(z)=230^{\circ}$

2-2 棣美弗定理及其應用

在高中數學第一冊中，我們曾學過複數的四則運算，當我們計算複數的乘法時，運算開始變得逐漸複雜起來，而複數的除法、n 次方以及 n 次方根的運算則更加地繁雜。在這一節中，我們試著利用複數的極式，簡化以上的運算，使這些運算變得輕鬆而簡單。本節提供銜接基本電學相關課程的認識與了解，對於選擇電機、電子學程的同學尤其重要。

2-2.1 複數極式的乘法、除法運算

在高中數學第三冊中，我們曾學過正弦、餘弦函數的和角公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots\cdots(1)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cdots\cdots(2)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cdots\cdots(3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdots\cdots(4)$$

配合上一節所學的將複數表示成極式，接下來我們學習複數極式的乘法、除法運算性質。

假設有兩複數 z_1 和 z_2，其極式分別為：

$$z_1=|z_1|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

$$z_2=|z_2|(\cos\beta+i\sin\beta)$$

(其中 α、β 分別為 z_1 和 z_2 的幅角)

則 $z_1\cdot z_2=|z_1|(\cos\alpha+i\sin\beta)\cdot|z_2|(\cos\beta+i\sin\alpha)$

$$=|z_1|\cdot|z_2|(\cos\alpha+i\sin\beta)(\cos\beta+i\sin\alpha)$$

$$=|z_1|\cdot|z_2|[(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)]$$

由上面的和角公式 (3) 及 (1) 可知

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$$

若 $z_2\neq 0$，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{|z_1|(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{|z_2|(\cos\beta+i\sin\beta)}=\dfrac{|z_1|(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta)}{|z_2|(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\beta-i\sin\beta)}$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{[(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)]}{(\cos^2\beta+\sin^2\beta)}$$

由上面的和角公式 (4) 及 (2) 及平方關係：$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ 可知

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]$$

【整理】複數極式的乘法、除法運算

兩複數 $z_1=|z_1|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$z_2=|z_2|(\cos\beta+i\sin\beta)$

（其中 α、β 分別為 z_1 和 z_2 的幅角）

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]\qquad（其中\ z_2\neq 0）$$

也就是說：當兩複數相乘時，$z_1\cdot z_2$ 的向徑等於 z_1 的向徑 $|z_1|$ 與 z_2 的向徑 $|z_2|$ 相乘，$z_1\cdot z_2$ 的幅角則等於 z_1 的幅角與 z_2 的幅角相加；而當兩複數相除時，$\dfrac{z_1}{z_2}$ 的向徑等於 z_1 的向徑 $|z_1|$ 與 z_2 的向徑 $|z_2|$ 相除，$\dfrac{z_1}{z_2}$ 的幅角則等於 z_1 的幅角與 z_2 的幅角相減。

例題 1

設兩複數 $z_1=4(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$，$z_2=2(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$。

試化簡下列算式為複數的標準式：① $z_1\cdot z_2$　② $\dfrac{z_1}{z_2}$

解：

由上述性質可知：

① $z_1\cdot z_2=4\cdot2[\cos(30^\circ+120^\circ)+i\sin(30^\circ+120^\circ)]$

$=8(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)$

$=8(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i)$

$=-4\sqrt{3}+4i$

② $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{4}{2}[\cos(30^\circ-120^\circ)+i\sin(30^\circ-120^\circ)]$

$=2[\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)]$

$=2(0-i)$

$=-2i$

隨堂練習 1

試化簡 $\dfrac{(\cos86^\circ+i\sin86^\circ)(\cos23^\circ+i\sin23^\circ)}{(\cos33^\circ+i\sin33^\circ)(\cos16+i\sin16^\circ)}$ 為複數的標準式。

答：$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

2-2.2 棣美弗定理

棣美弗定理是由法國數學家**棣美弗** (*Abraham de Moivre*，1667 － 1754) 於 1730 年所發表，主要是提供複數 n 次方運算的一種便捷計算方式。

假設複數 z 的極式為 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 θ 為 z 的幅角，由上述相乘的性質可知：

$$z^2=|z|\cdot|z|[\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)=|z|^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

$$z^3=|z|^2\cdot|z|[\cos(2\theta+\theta)+i\sin(2\theta+\theta)=|z|^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

$$z^4=|z|^3\cdot|z|[\cos(3\theta+\theta)+i\sin(3\theta+\theta)=|z|^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$$

$$\vdots$$

以此類推至：$z^n=|z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，其中 n 為自然數，此即棣美弗定理。

【整理】棣美弗定理

設複數 z 的極式為 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 θ 為 z 的幅角

則 $z^n=|z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，其中 n 為自然數。

例題 2

試化簡下列各式為複數的標準式：

① $\dfrac{(\cos 4^\circ+i\sin 4^\circ)^{10}(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ)^7}{[\cos(-3^\circ)+i\sin(-3^\circ)]^5}$　② $(-1+\sqrt{3}\,i)^6$　③ $(1-i)^{20}$

解：

① 由棣美弗定理可知，

$$(\cos 4^\circ+i\sin 4^\circ)^{10}=(\cos 10\times 4^\circ+i\sin 10\times 4^\circ)=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$$

$$(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ)^7=(\cos 7\times 5^\circ+i\sin 7\times 5^\circ)=\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ$$

$$[\cos(-3^\circ)+i\sin(-3^\circ)]^5=\cos 5\times(-3^\circ)+i\sin 5\times(-3^\circ)=\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ)$$

故 $\dfrac{(\cos 4^\circ+i\sin 4^\circ)^{10}(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ)^7}{[\cos(-3^\circ)+i\sin(-3^\circ)]^5}$

$$=\frac{(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)}{\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ)}$$

$$=\cos[40^\circ+35^\circ-(-15^\circ)]+i\sin[40^\circ+35^\circ-(-15^\circ)]$$

$$=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$$

$$=i$$

② 先將 $-1+\sqrt{3}i$ 化成極式，

$$-1+\sqrt{3}i=2(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2(\cos120°+i\sin120°)$$

則 $(-1+\sqrt{3}i)^6=[2(\cos120°+i\sin120°)]^6$

$$\begin{aligned}&=2^6(\cos6\times120°+i\sin6\times120°)\\&=64(\cos720°+i\sin720°)\\&=64(\cos0°+i\sin0°)\\&=64\end{aligned}$$

③〈方法 1〉

先將 $1-i$ 化成極式，$1-i=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}[\cos(-45°)+i\sin(-45°)]$

則 $(1-i)^{20}=(\sqrt{2})^{20}[\cos(20\times(-45°))+i\sin(20\times(-45°))]$

$$\begin{aligned}&=2^{10}[\cos(-900°)+i\sin(-900°)]\\&=1024[\cos180°+i\sin180°]\\&=-1024\end{aligned}$$

〈方法 2〉

$$(1-i)^{20}=[(1-i)^2]^{10}=(-2i)^{10}=(-2)^{10}(i)^{10}=1024i^2=-1024$$

隨堂練習 2

試化簡下列各式為複數的標準式：

① $\dfrac{(\cos10°+i\sin10°)^8(\cos7°+i\sin7°)^{10}}{(\cos6°+i\sin6°)^5}$　② $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i)^{10}}$

答：① $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　② $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2-2.3 複數的 n 次方根

根據代數基本定理與因式定理得知，若 n 為自然數，n 次方程式 $x^n=a$ (a 是複數) 恰有 n 個複數根，則這 n 個根稱為 a 的 n 次方根。接下來，我們將應用棣美弗定理求此方程式的解。

假設複數 z 是方程式 $x^n=a$ 的根，即 $z^n=a\cdots\cdots(\triangle)$
又假設 z、a 的極式分別為：

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)\text{，}a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

(其中 θ 、α 分別為 z 和 a 的幅角)

將 z 和 a 的極式代入方程式 $(\triangle)$，可得下式：

$$z^n=|z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=a$$

由於兩複數相等時，實部、虛部皆分別相等，所以 $|z|^n=|a|$，得 $|z|=\sqrt[n]{|a|}\cdots\cdots(1)$

且 $\begin{cases}\cos n\theta=\cos\alpha\\ \sin n\theta=\sin\alpha\end{cases}$

可知 $n\theta$ 與 α 為同界角，即 $n\theta=\alpha+2k\pi$，其中 k 為整數，得 $\theta=\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\cdots\cdots(2)$

將 (1)、(2) 的結果代入 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

可得 $x^n=a$ 的根 $z=\sqrt[n]{|a|}(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n})$，其中 k 為整數。

雖然整數 k 有無限多個，乍看之下好像也有無限多個 θ，但 $k=0$，1，2，……，$n-1$，得出的 n 個輻角 θ，和 $k=n$，$n+1$，$n+2$，……，$2n-1$，得出的 n 個輻角 θ 是同界角，而且 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 的週期為 2π，故不妨取 $k=0$，1，2，……，$n-1$。

【整理】複數的 n 次方根

設複數 a 的極式為 $a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，其中 α 為 a 的幅角，
則方程式 $x^n=a$ 的 n 個根 (稱為 a 的 n 次方根) 為

$x_k=\sqrt[n]{|a|}(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n})$，其中 $k=0$，1，2，……，$n-1$。

例題 3

試求 $-2+2\sqrt{3}\,i$ 的平方根。

解：

設 $-2+2\sqrt{3}\,i$ 的平方根為 x

即 $x^2=-2+2\sqrt{3}\,i=4(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

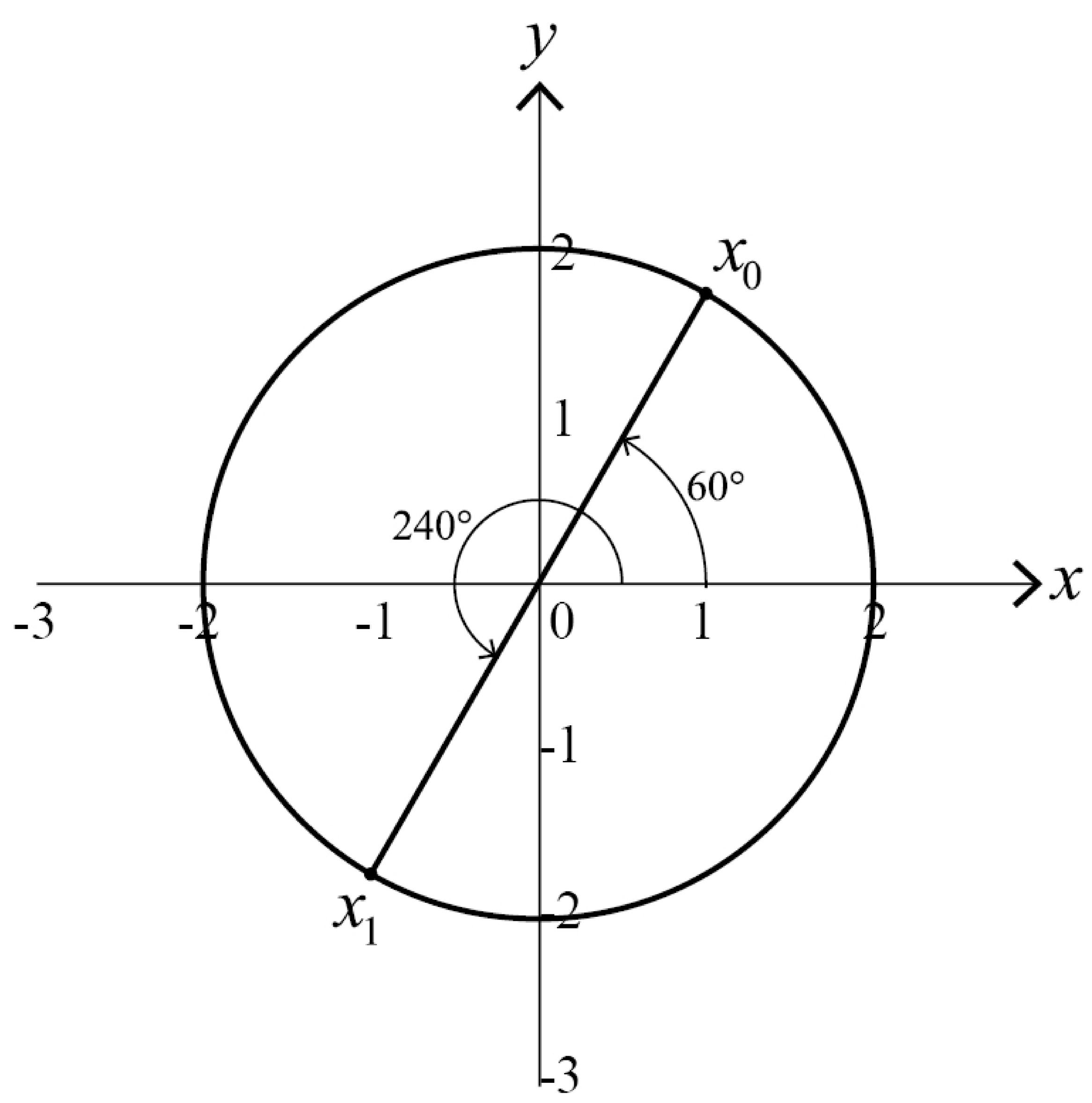
則 $x_k=2(\cos\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2})$

$=2[\cos(\frac{\pi}{3}+k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{3}+k\pi)]$，其中 $k=0$，1。

$k=0$ 時，$x_0=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1+\sqrt{3}i$。

$k=1$ 時，$x_1=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=2(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-1-\sqrt{3}i$。

$x^2=-2+2\sqrt{3}\,i$ 的二個根繪於複數平面上之情形如圖一。



〈圖一〉

當我們將複數化為極式時，幅角可以選擇以「弧度」或「度」為單位，因此若複數 a 的極式為 $a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，其中 α 為 a 的幅角 (以「度」為單位)，則方程式 $x^n=a$ 的 n 個根 (稱為 a 的 n 次方根) 亦可寫成

$$x_k=\sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{\alpha+360^\circ\cdot k}{n}+i\sin\frac{\alpha+360^\circ\cdot k}{n})$$，其中 $k=0$，1，2，……，$n-1$。

例題 4

試求 $-216i$ 的立方根。

解：

設 $-216i$ 的立方根為 x，

即 $x^3=-216i=216(\cos 270°+i\sin 270°)$

則 $x_k=\sqrt[3]{216}(\cos\dfrac{270°+360°\cdot k}{3}+i\sin\dfrac{270°+360°\cdot k}{3})$

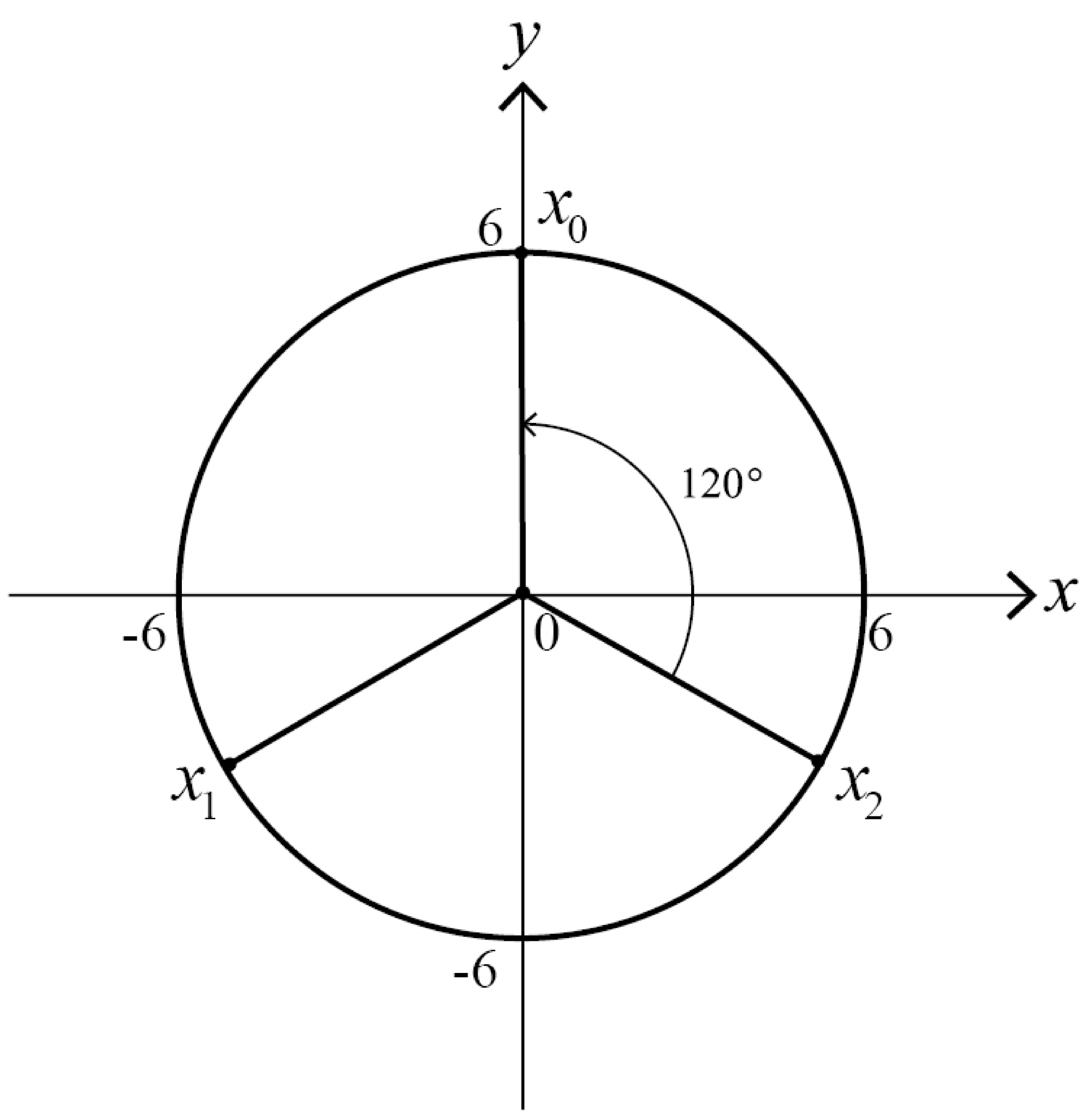
$=6[\cos(90°+120°\cdot k)+i\sin(90°+120°\cdot k)]$，其中 $k=0$，1，2。

$k=0$ 時，$x_0=6(\cos 90°+i\sin 90°)=6i$ 。

$k=1$ 時，$x_1=6(\cos 210°+i\sin 210°)=6(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i)=-3\sqrt{3}-3i$ 。

$k=2$ 時，$x_2=6(\cos 330°+i\sin 330°)=6(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i)=3\sqrt{3}-3i$ 。

$x^3=-216i$ 的三個根繪於複數平面上之情形如圖二。可知 $x^3=-216i$ 的三個立方根在複數平面上對應的點，落在以原點為圓心，半徑為 6 的圓上，並且三等分這個圓。



〈圖二〉

隨堂練習 3

試求 $2i$ 的平方根。

答：$1+i$ ，$-1-i$

隨堂練習 4

試求 i 的立方根。

答：$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$-i$

隨堂練習 5

試解方程式：$x^4=-8+8\sqrt{3}\,i$

答：$\sqrt{3}+i$，$-1+\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}-i$，$1-\sqrt{3}\,i$

1 的 n 次方根

在一元 n 次方程式中，最簡單且重要的方程式就是 $x^n=1$，我們可以利用前面學到的複數 n 次方根的概念，求出 1 的 n 次方根。因為 $x^n=1=\cos 0+i\sin 0$，則方程式的 n 個根（稱為 1 的 n 次方根）為

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\text{，其中 } k=0\text{，}1\text{，}2\text{，}\cdots\cdots\text{，}n-1$$

若令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，則方程式的 n 個根可以用 ω 的形式，簡單表示如下：

$k=0$ 時，$x_0=\cos 0+i\sin 0=1$

$k=1$ 時，$x_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=\omega$

$k=2$ 時，$x_2=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^2=\omega^2$

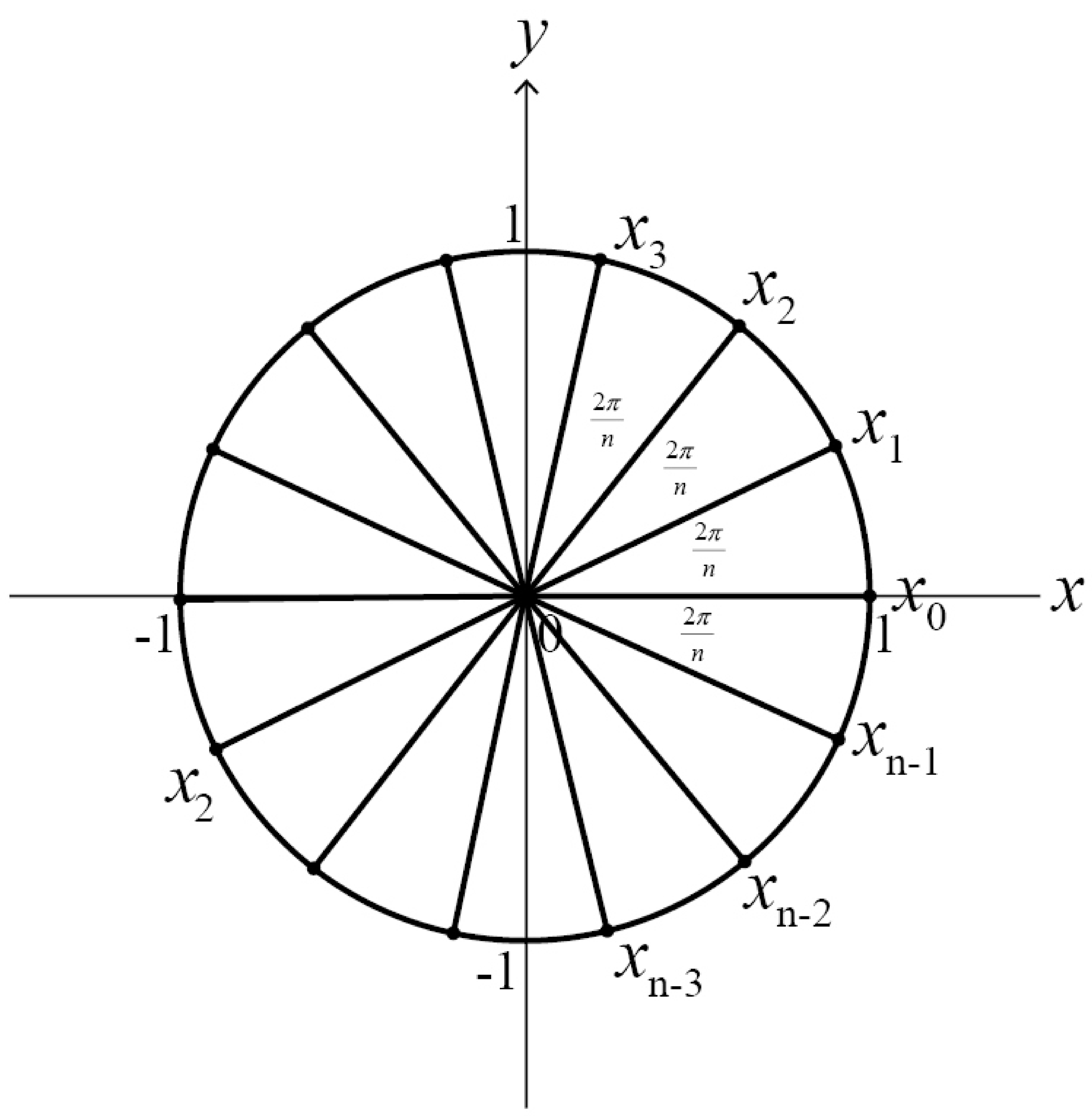
$k=3$ 時，$x_3=\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^3=\omega^3$

$\vdots$

$k=n-1$ 時，$x_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\times(n-1)\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times(n-1)\right)$

$$=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^{n-1}=\omega^{n-1}$$

即 $x^n=1$ 的 n 個根可表示為 1，ω，ω^2，……，ω^{n-1}，其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。由於上式 $|x_k|=1$，表示在複數平面上，n 個根所對應的 n 個點，到原點的距離均為 1，即這些點均落在單位圓上，且相鄰的兩點角度間隔 $\frac{2\pi}{n}$，也就是說 1 的 n 次方根將圓 n 等分，如圖三。



〈圖三〉

因為 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 為方程式 $x^n=1$ 的 1 個虛根，故 ω 滿足方程式 $x^n=1$，即 $\omega^n=1$。或可由棣美弗定理得

$$\omega^n=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^n=\cos\frac{2\pi}{n}\cdot n+i\sin\frac{2\pi}{n}\cdot n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=\cos 0+i\sin 0=1$$

又因 $\omega^n=1$，移項可得 $\omega^n-1=0$，$(\omega-1)(\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\cdots\cdots+\omega+1)=0$，

又 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\neq 1$，即 $\omega-1\neq 0$，故 $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{n-1}=0$。

【整理】1 的 n 次方根

方程式 $x^n=1$ 的 n 個根（稱為 1 的 n 次方根）為
1，ω，ω^2，……，ω^{n-1} 其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。
其性質為 $\omega^n=1$，$1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{n-1}=0$，且此 n 個根在複數平面上對應的 n 個點均落在單位圓上，並將圓 n 等分。

例題 5

設 ω 為 1 的立方虛根，求下列各式之值：

① ω^{15} ② $1+\omega+\omega^{2}+\cdots\cdots+\omega^{12}$ ③ $\omega^{50}+\dfrac{1}{\omega^{50}}$

解：

因 ω 為方程式 $x^{3}=1$ 的一虛根，故 $\begin{cases}\omega^{3}=1\\ 1+\omega+\omega^{2}=0\end{cases}$

① $\omega^{15}=(\omega^{3})^{5}=1^{5}=1$

② $1+\omega+\omega^{2}+\cdots\cdots+\omega^{12}$

$=(1+\omega+\omega^{2})+\omega^{3}(1+\omega+\omega^{2})+\omega^{6}(1+\omega+\omega^{2})+\omega^{9}(1+\omega+\omega^{2})+\omega^{12}=1$

③ $\omega^{50}=(\omega^{3})^{16}\cdot\omega^{2}=1\cdot\omega^{2}=\omega^{2}$，又 $1+\omega+\omega^{2}=0$，得 $\omega+\omega^{2}=-1$

$\omega^{50}+\dfrac{1}{\omega^{50}}=\omega^{2}+\dfrac{1}{\omega^{2}}=\omega^{2}+\dfrac{\omega^{3}}{\omega^{2}}=\omega^{2}+\omega=-1$

隨堂練習 6

設 ω 為方程式 $x^{3}=1$ 的一虛根，求下列各式之值：

① $2+\omega+\omega^{2}+\omega^{3}+\omega^{4}+\omega^{5}+\omega^{6}$ ② $(1-\omega)(1-\omega^{2})(1-\omega^{4})(1-\omega^{8})$

答：①2 ②9

例題 6

試利用 1 的 n 次方根，求方程式 $x^6=64$ 之六個根在複數平面上對應的點所形成之六邊形面積。

解：

由 $x^6=64$，可得 $\dfrac{x^6}{64}=1$，即 $(\dfrac{x}{2})^6=1$，亦即 $\dfrac{x}{2}$ 為 1 的 6 次方根

則 $\dfrac{x}{2}$ 的六個根為 1，ω，ω^2，ω^3，ω^4，ω^5

其中 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{6}+i\sin\dfrac{2\pi}{6}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ 為 1 的 6 次方虛根。

所以 $x=2$，2ω，$2\omega^2$，$2\omega^3$，$2\omega^4$，$2\omega^5$

即 $x=2$，

或 $x=2\omega=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$，

或 $x=2\omega^2=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^2=2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$，

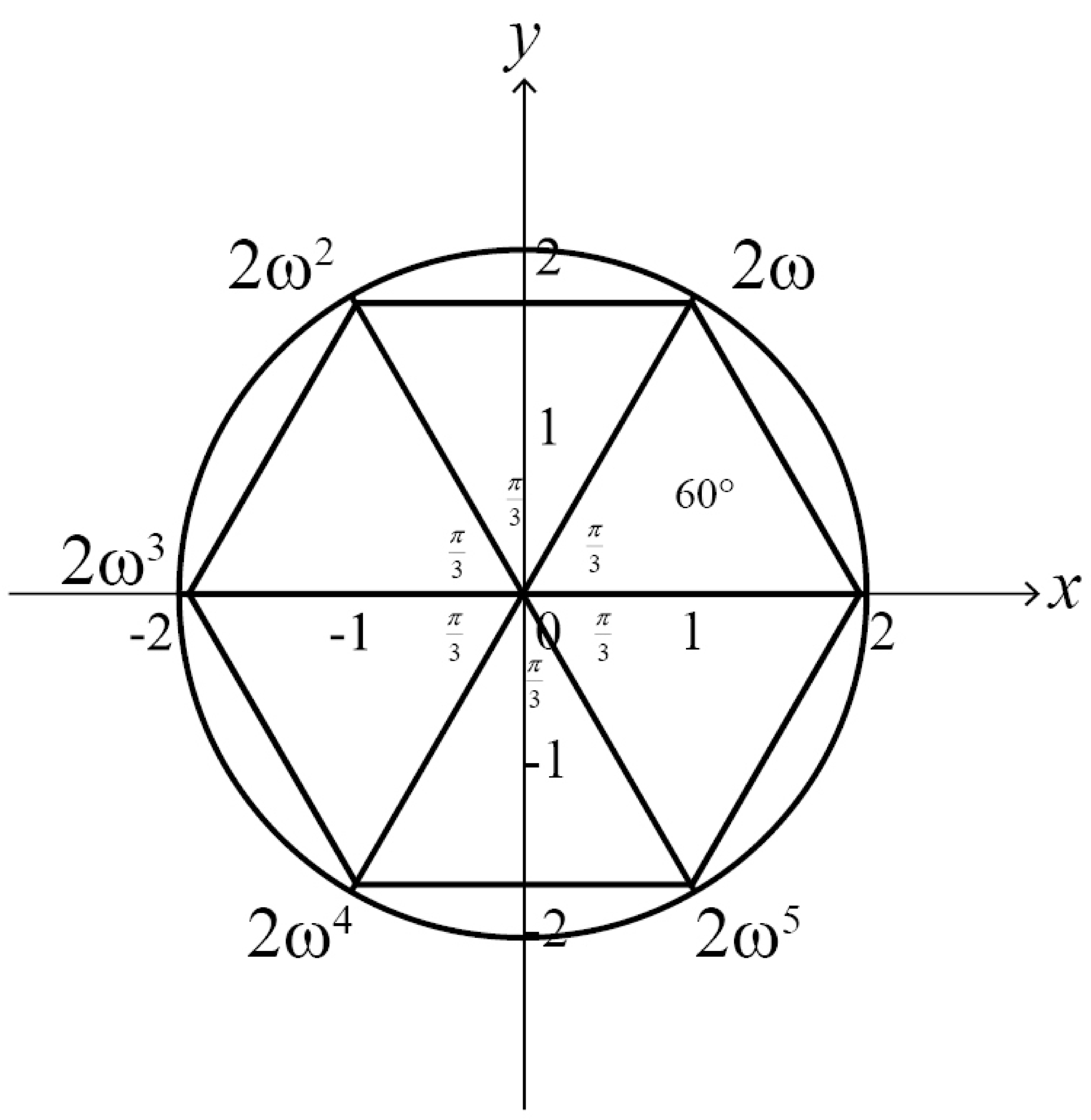
或 $x=2\omega^3=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^3=2(\cos\pi+i\sin\pi)$，

或 $x=2\omega^4=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^4=2(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3})$，

或 $x=2\omega^5=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^5=2(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3})$。

可得 $x^6=64$ 的 6 個 6 次方根在複數平面上對應的點，落在以原點為圓心，半徑為 2 的圓上，並且六等分這個圓，形成正六邊形，如圖四。

因此正六邊形面積 $=6\cdot(\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin\dfrac{\pi}{3})=6\sqrt{3}$。



〈圖四〉

隨堂練習 7

試利用 1 的 n 次方根，求方程式 $x^3=64$ 之三個根在複數平面上對應的點所形成之三角形面積。

答：$12\sqrt{3}$

【整理】**複數的 n 次方根的幾何意義**

若 $x^n=a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，其中 α 為複數 a 的幅角。則此方程式的 n 個根為

$$z_k=\sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n})，\ k=0，1，2，\cdots，n-1。$$

在複數平面上，這 n 個 n 次方根落在以原點為圓心、$\sqrt[n]{|a|}$ 為半徑的圓上，並且 n 等分這個圓。

2-2 習題

1. 試化簡下列各式為複數的標準式：

① $(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$ ② $\dfrac{\cos 170^\circ + i\sin 170^\circ}{\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ}$

2. 設 $\theta = 15^\circ$，求 $\dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}{\cos 3\theta - i\sin 3\theta}$ 之值。

3. 試化簡下列各式為複數的標準式：

① $(\dfrac{1-i}{1+i})^{50}$ ② $(-1-\sqrt{3}i)^6$ ③ $(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^9$

4. 設 $a = 2[(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3})]^4$，$b = (\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})^2$，求 $\dfrac{a}{b}$ 之值 (以標準式表示之)。

5. 求 $-9i$ 的平方根，並以標準式表示之。

6. 試求 8 的三個立方根 (以標準式表示之)，並求此三根在複數平面上所圍成的三角形面積。

7. 試求 1 之四次方根 (以標準式表示之)，並求此四個根在複數平面所決定的四邊形面積。

8. 設 ω 為 1 的立方虛根，試求下列各式之值：

① $(1-\omega^8)^2(1-\omega^{16})^2$

② $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$

③ $\omega^{370} + \dfrac{1}{\omega^{148}}$

簡答

1. ① i ② $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
2. i
3. ① -1 ② 64 ③ -1
4. 16
5. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$
6. 2，$-1+\sqrt{3}i$，$-1-\sqrt{3}i$，三角形面積 $3\sqrt{3}$
7. 1，-1，i，$-i$，面積為 2
8. ①9 ②16 ③ -1

附錄

在綜合高中高二分流後，選擇技術學程之電機與電子群、機械群、動力機械群的同學在學習「基本電學」或「電工概論」交流電單元時，會利用複數標準式與極式的運算處理電流、電阻、電容等運算問題。但在符號的使用上，並不盡相同。茲將運算符號對照列表如下，以供教授上述學程之教師於教學時之參考應用，串連學生學習經驗，提高學習成效。

名稱	數學符號	電學符號	備註
虛數單位	i	j	$i^2=j^2=-1$
複數標準式	$z=a+bi$	$\overline{z}=a+jb$	①a,b為實數 ②電學稱為「直角坐標」
複數極式	$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$	$\overline{z}=r\angle\theta$	① $r=\lvert z\rvert$ ②電學稱為「極坐標」
複數極式乘法運算	$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$	$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=r_1\times r_2\angle(\alpha+\beta)$	$z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$ α、β 分別為z_1和z_2的幅角 $z_2\neq 0$
複數極式除法運算	$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]$	$\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}\angle(\alpha-\beta)$	

例題 1

有兩複數的極座標形式為 $\overline{Z_1}=5\angle 10°$ 與 $\overline{Z_2}=3\angle 5°$ ，則兩複數相乘 $\overline{Z}_1\cdot\overline{Z}_2$ 為

(A) $8\angle 15°$　(B) $15\angle 50°$　(C) $15\angle 15°$　(D) $15\angle 5°$

解：(電學符號觀點) $\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2}=5\angle 10°\cdot 3\angle 5°=(5\cdot 3)\angle(10°+5°)=15\angle 15°$

◎說明

此題若改寫成數學符號，意義如下：

兩複數的極式為 $z_1=5(\cos 10°+i\sin 10°)$ ， $z_1=3(\cos 5°+i\sin 5°)$ ，求 $z_1\cdot z_2$ 。

故 $z_1\cdot z_2=5\cdot 3[\cos(10°+5°)+i\sin(10°+5°)]=15(\cos 15°+i\sin 15°)$

同學在學習專業科目時，往往無法理解各項數學運算的原因，若能在學習數學時補強，相信將有助學生融會貫通，拓展學習經驗。

編著群

國立大甲高級中學 黃嘉男 老師

國立竹北高級中學 黃敏哲 老師

台北市立大安高級工業職業學校 陳吳煜 老師

台北市立大安高級工業職業學校 馬雅筠 老師