要改變這樣的現況，惟有從「改變態度」開始，我們對世界的態度不應是照單全收接受一切，惟有經常對比現下狀況與以往經驗的異同；在既有的「知識整體」基礎下，「尋求當代尚待突破的瓶頸」，讓思緒從「漫無目標的發散性思考」過渡到「有目標的發散性思考」。也惟有經過這樣的發展，水到渠成時，能夠歷經時代考驗的「創意」，才會自然從人群中湧現。

關於選舉的數學理論

單維彰

讓我們從一個假設的情境開始。假如十五位同學負責籌辦一場同樂會，因爲經費和人力的限制，他們決定只提供一種冰飲。至於提供哪一種，因爲有三種意見僵持不下，分別是冰紅茶（用T表示）、啤酒（用B表示）還有雞尾酒（用C表示），於是他們決定用最民主的方式解決紛爭，即不記名投票。大家不假思索地舉行了最常見的一人一票選舉模式，投給自己認爲最適當的飲料，獲得最高票數的飲料便獲勝。開票的結果是T:B:C=6:5:4，冰紅茶獲勝。

也許這個籌備會議可以繼續進行下一項討論，但某個人開始咕噥，另一個人聽到了也大聲跟著附和，第三個人隨即開始埋怨，一股不安的情緒突然間爆發開來。投票給冰紅茶的人要其他人表現民主風度，他們說：「少數服從多數嘛。」可是有人說：「畢竟有九個人不喜歡冰紅茶啊。」在一陣騷動中，會場情緒似乎有點失控，一群人七嘴八舌地嚷嚷著，說他們「最」不喜歡冰紅茶。

好吧，大家都是好朋友嘛，別爲了這種小事傷和氣。有人提議，他聽說另一種投票方法比較「公平」，那就是所謂的「兩輪制」，也就是把第一輪投票結果中最好的兩名取出，所有人對這兩個候選飲料再投一次票。如果能夠幫助大家和和氣氣的達成共識，再投一次票也無妨，於是他們

開始進行，而第二輪的投票結果，竟然是B:T=9:6，啤酒獲勝。

這樣的結果真的解決歧見了嗎？很不幸地，不但沒有，他們之間變得更針鋒相對！看起來，喜歡喝茶的人一票也沒有動搖，但是那些失去雞尾酒選項的人全部改爲支持啤酒。贊成喝茶的人難掩氣憤之情，他們說：「你們這些想要喝酒的人聯合起來欺負我們。」剛才他們至少還會熱烈爭辯，現在情況更不妙，他們彼此不說話了。

爲了打破空氣中令人尷尬的沉默，又有一個人小心的提議，請大家拋棄成見，再來一次投票。這次他提議一個「最科學」的作法，請每個人給每種飲料一個分數，最喜歡的給兩分，次喜歡的給一分，不喜歡的不給分，然後計算每種飲料得到的分數總和，最高分的飲料獲勝。這聽起來畢竟是一個新奇的作法，雖然大家意興闌珊，還是勉強同意了。十五個人小心的在選票上填寫了分數，計算的結果是C:B:T=19:14:12，雞尾酒獲勝。

有人哀號：「怎麼會三次結果都不一樣？」，有人大叫：「我不玩了。」爲什麼三次投票得到三種結果？是有人搞鬼嗎？有一些人要和另外一些人作對嗎？有人經常改變主意做牆頭草嗎？總歸來說，是這十五個人不夠理性或是民主素養不足嗎？選舉理論想要闡述的是，可能並不是這十五個人的錯，而是不同的選舉程序會造成不同的結果。

選舉程序

所謂選舉程序，是一套根據選民所表達的意願，將候選對象排序的規則。這套規則包括了蒐

集選民意見的規則和計算結果的規則。在數學上，選舉程序被視爲一個函數，它的輸入是一個集合，稱爲「選民卷宗」，而輸出就是候選對象的排序。如果有N個選民，卷宗裡就有N個元素；如果有K個選擇對象，卷宗裡的每個元素就有K個項目。拿前面的情境來說，N=15而K=3。卷宗裡面的一個元素，就代表一位選民心目中對於選擇對象的優先順序。再用前面的例子，那十五位籌備委員對於三種冰飲其實都已經心存定見，那個卷宗裡面應該有十五個元素。爲了節省空間（反正那是個不記名投票），我們將同樣的優先順序合併在一起，只記錄持同樣定見的選民人數，記成以下表格：

卷宗一

人數	心目中的定見
6	T>C>B
5	B>C>T
4	C>B>T

當然，除了透過選票表達之外，一般來說選民並不知道其他人心目中的定見。參照以上卷宗，我們可以清楚的看到，那十五位籌備委員在三次投票當中，其實都是誠實而且理性的表達個人心目中的定見。第一次「單票制」，每個人投票給心目中的第一優先飲料，因此T:B:C=6:5:4。第二次則是讓T和B對決，每個人按照心目中T和B的相對順序投票給較優先者，所以B:T=9:6。第三次讓他們有機會完全表達對三種飲料的喜好程度，有六個人給T兩分、給C一分，有五個人給B兩分、給C一分；有四個人給C兩分、給B一分，因此T共得十二分、B共得十四分、C共得十九分，也就是C:B:T=19:14:12。

選舉理論中定義選民的「誠實」就是按照自己的定見投票（否則也不叫做不誠實，而是說他「有策略」，選舉語言所謂的「棄誰保誰」，就是有策略）；而所謂選民的「理性」就是其心目中

的定見符合遞移律，也就是說，如果Ａ＞Ｂ，而且Ｂ＞Ｃ，那就一定要Ａ＞Ｃ。如果問他冰紅茶或啤酒，他選擇冰紅茶，問他啤酒或雞尾酒，他選擇啤酒，再問他雞尾酒或冰紅茶，他選擇雞尾酒，那就違背了遞移律，也就是不理性。

讀者或許會抗議，也許我昨天中午和今天晚上的心情不同，所以會做出像這樣的選擇，那是「人性」，怎麼說是「不理性」呢？但是我們現在談的是投票當下的心中定見，若因爲情緒而改變心意的藉口就比較不合適了吧？就好像那些籌備委員，如果在第一次投票後就決定了冰紅茶，雖然當時有九個人不爽，或許在同樂會當晚也會改變心意，覺得冰紅茶確實是最適當的飲料也不一定。不過選舉理論要議論的是，選舉結果是否反應了選民在投票當下的心中定見呢？

籌備會議最終如何收場，已經不關我們的事，這個情境故事可以到此結束。我們已經清楚的看到，就算十五位選民都誠實而且理性，只因爲採用的選舉程序不同，就得到不同的結果。指責他們任何一個人都是無謂且錯誤的，只是選舉程序決定了選舉的結果。

讀者當然可以明白，雖然剛才的故事講的是十五個人的選舉，但就算改成一千五百萬人的選舉，類似的情境還是可能發生。讀者可能還沒想到，剛才的故事只有三個選擇對象，其實，只要選擇對象的個數Ｋ＞２，那些聰明的選舉理論學者就可以設計一套卷宗，找到Ｋ種選舉程序，使得根據那同一份卷宗，Ｋ種程序可以讓Ｋ個對象每一個都獲勝一次！（這聽起來就像是數學家玩的把戲，不是嗎？可是，科學和社會的歷史可以表明，不要嘲笑數學家玩的把戲，不管是多麼荒誕而不切實際的想法，只要給數學家冥想出來，經常就會發現吻合了科學或社會的某些現象。）

每一個候選人可以擁抱一種讓自己獲勝的選舉程序？這聽起來還不夠荒誕嗎？如果我們不去仔細了解各種選舉程序造成的影響，而因規就習的直接將某種選舉程序奉爲圭臬，讓它來主宰我們的生活，豈不是更荒唐而可悲？這就是選舉理論要探討的問題，究竟有沒有最「公道」的選舉程序？回答這個問題之前，當然要先討論，什麼叫做「公道」？

孔多塞和波達

一般認爲，選舉理論的正式開端是法國人孔多塞（一七四三至一七九四）在一七八五年發表的論文〈論數學分析應用於多數決之機率問題〉。孔多塞的全名很長（請見參考資料四），雖然他在十六歲就首次發表數學論文，二十五歲因爲在積分學方面的研究表現而被選入法國科學院，不過威爾森仍然評論他在數學與科學上的貢獻微不足道（請見參考資料九）。相對地，孔多塞被認爲是「法國最後一位啓蒙哲學家」，他在法國大革命中扮演的角色，幾乎就是美國獨立運動中的傑佛遜。作爲一個關心平民的貴族知識份子，他起草憲法、鼓吹宗教自由、擘畫教育、反對蓄奴。然而，大家都知道法國大革命後來混亂的失去了控制，一夜之間孔多塞從英雄變成通緝犯，入獄後第三天就暴斃於地板上，未經審判，死因不明。

孔多塞在一七八五年發表的論文裡面，提出一種選舉程序，他認爲一個「公道」的勝選者，是必須與其他所有的候選人，在捉對投票中都能夠獲勝的那個人。拿卷宗一做例子，孔多塞的程序要求選民對Ｔ和Ｃ投票一次，對Ｔ和Ｂ投票一次，還要對Ｂ和Ｃ投票一次。如果選民像卷宗一

所示的誠實投票，則T:C=6:9，T:B=6:9，B:C=5:10，所以只有C能夠在兩次捉對投票中都獲勝，因此C是勝選者。

孔多塞自己也在論文中表明，他的選舉程序可能無法產生結果。例如遇到以下這種卷宗：

卷宗二	
人數	心目中的定見
5	T>C>B
5	C>B>T
5	B>T>C

那麼三次捉對投票的結果就是T:C=10:5，C:B=10:5，B:T=10:5，解讀爲T>C>B>T，甚至於不符合遞移律。即使所有選民都是理性且誠實的，投票的結果卻顯得不理性！我們可以將這種情形解釋成「平手」，但那只是我們的解釋而已，就實際開票結果而言，並不是平手。因此，當孔多塞程序產生勝選者的時候，那的確是一個眾望所歸，似乎沒有異議的勝選者。問題在於，它有太大的失敗機率；而且就算它可以成功，所耗費的社會成本也未免太高了些。

這就是波達（一七三三至一七九九）對孔多塞提出的質疑。一般的說法是波達在與孔多塞的辯論中提出了他的方法，如今所謂波達計數法，其實就是依照前述選飲料的假想情境，第三次投票的方法，每個選民對K個候選人嚴格排序，給自己心目中排序第一的K-1分，排序第二的K-2分……直到排序倒數第二的一分，最後一名零分。但是根據薩瑞的研究，波達早就對法國科學院提出這個選舉程序的建議，只是這個議題不太熱，後來就被淡忘了，波達只是在孔多塞發表論文之後舊事重提，這一次就受到了重視。

就像許多數學或科學的歷史一樣，更晚期的史料表明，孔多塞和波達都不是他們提倡的選舉

程序最初發明人。中古世紀一位傳奇的狂人盧爾就曾經發明過孔多塞的方法，而一四三三年尼古拉批評盧爾的方法，並提出他自己的方法，您猜到了嗎？尼古拉提出的方法就是今天所謂的波達計數法。

波達也是個有貴族背景的法國知識份子，他在二十歲提出一份幾何學方面的論文，二十二歲在軍中獲得數學家的職位；他的生涯一直是學術與軍旅並行。一七七六至七八年間，他還擔任艦長，帶著法國海軍越洋幫美國人打了獨立戰爭。波達影響我們最深的一件事，可能是他定義了「公尺」。原本有人建議以週期爲一秒的單擺長度作爲公尺的定義，但是波達大力提倡用地球沿著某條經線從北極到赤道的一千萬分之一作爲公尺的定義。他的理由是要推動公尺作爲國際標準；如果使用地球的尺度作爲長度定義，那麼國際間就沒有反對的理由。其實，我猜想波達還有兩個私下的理由。其一，波達是當時最精於地表測量的專家，這種公尺的定義使得他更有理由要製造更精確的儀器，對地球做更精確的測量。其二，波達是一個十進制的熱中推動者，他的另一項計畫是推動一天十小時，每小時一百分鐘，每分鐘一百秒的新時間單位。如果成功了，那秒的定義就改變了，而根據秒所定義的長度單位豈不是也要跟著改變，那就太麻煩了。

選舉理論學者基本上同意，如果不計成本，應該先執行孔多塞方法的選舉，如果產生優勝，那就好，否則就應該採用波達的計分方法。問題是，實際上很難不計成本。不過，理論學者倒是利用孔多塞方法來協助判斷其他選舉程序的優劣。他們在理論上探討許多（或者所有）可以讓孔多塞方法產生優勝的卷宗，假設這個優勝是最具有代表性的當選者，然後比較其他選舉程序產生

其他優勝（也就是不夠恰當的結果）的機率如何。結果呢，也許您已經猜到了，在比較過的各種選舉程序當中，最容易不符合孔多塞優勝的選舉程序，就是現在最常用的「一人一票相對多數制」，也就是最前面那個假設情境中第一個採用的選舉方法。

雖然孔多塞和波達的爭辯開啓了選舉理論，也爲後代的學者鋪設了研究的方法和典範。不過，他們並沒有替「公道」下一個定論，當然也就不能討論什麼選舉程序最「公道」。這個問題，還要再等一百六十六年，在二十世紀中葉，出現一個令人難受但是卻被普遍接受的結論。

亞羅的不可能定理

二十世紀出產了好幾個偉大的「不可能」定理。這些數學定理在哲學、經濟、科學上，都產生深遠而根本的影響。其中一個是亞羅（一九二一年生）在一九五一年提出的博士論文〈社會選擇與個人價值〉。亞羅於一九七二年獲頒諾貝爾經濟學獎，亞羅的定理，又稱爲亞羅矛盾，基本上是定義了一套所謂「公道」的標準：

一、每一個選民的影響力都一樣；更進一步說，就是非獨裁。

二、選民除了不能不理性之外，沒有其他任何關於其心目中排序的限制。

三、如果所有選民都認爲A＞B，則選舉結果也要顯示A＞B。

四、選舉結果關於A和B的排序，應該只由卷宗內A和B的相對順序決定，與任何第三者無關。

五、如果所有選民都是理性的將選擇對象排序，而且誠實投票，則選舉的結果也要顯示理性的排序。

讀者仔細想想，似乎上述五條「公道」的標準是再基本不過的了，這不都是我們對於民主和平等的直覺認識嗎？大家實在沒有反對或挑剔的餘地。

如果您也同意，任何一個「公道」的選舉程序，都要符合上述五個條件。那麼，我們就可以根據那五個條件來設計「公道」的選舉程序，然後在所有「公道」的程序中，再設法挑選「最公道」的。但是，亞羅說：「省省吧！」如果選擇對象超過兩個，那就根本「不存在」這種選舉程序！

如果只有兩個候選人，那麼許多已知的選舉程序其實是相等的，它們都等於「相對多數制」（因爲只有兩名，相對多數就是絕對多數）。所以我們最熟悉的選舉程序就是一個「公道」的程序，而此時並沒有「最公道」的問題，因爲其他公道的程序都會得到同樣的結果。所以，就像台灣二〇〇四年的大選一樣，只有兩個候選人的時候，選舉程序不是一個值得擔心的問題。

但是，如果超過兩個候選人，居然就不存在任何公道的選舉程序！請讀者注意，這是一個被證明的數學定理，而不是經驗法則，也不是實驗歸納的結論。就好像許多人在高中時代學習過的一種不可能定理，不可能找到兩個正整數n和m，使得$n^2=2\times m^2$。不是我們運氣不好，不是我們不夠努力或者不夠聰明，而是——不可能！

我們已經知道孔多塞方法違背了第五條，但是波達方法哪裡出了問題？其實，我們之前舉出

的三種選舉程序，都會違背第四條。我只舉一個簡單的狀況，假設在三種飲料之外，後來又加了冰咖啡（用K表示），而十五位籌備委員並沒有改變原來三種飲料的相對順序，只是把K插入某個位置而已。假設卷宗一變成了卷宗三：

卷宗三	
人數	心目中的定見
4	T>K>C>B
2	K>T>C>B
5	B>C>K>T
4	C>B>T>K

如果用一人一票的方式來投票，每個人誠實投給自己的第一優先一票，就得到B:T:C:K=5:4:4:2，與原來的結果T:B:C=6:5:4比較，我們發現T和B的相對順序顛倒了，T和B的相對順序，受到第三者K的干擾。

對於亞羅定理最易懂的解讀，就是我們必須在殘缺的選舉程序和獨裁者之間，做一個選擇，這是多麼無奈的情況啊！有些政治學者將這個無奈訴諸於道德，而不是理性，認爲人間本無完美，他們用亞羅定理當作證據，告誡政治人物即使勝選也要謙沖爲懷，與人善處。另一些堅持理性的學者，則企圖修改或鬆動亞羅的五個「公道」條件，譬如「同意票制」就鬆動了第一條，每個選民決定是否對每個候選人投同意票，因爲每個人在心中畫下的界線不同，有些人或許認爲只同意自己心目中的第一優先，另外一些人或許會同意所有的候選人，因此每個選民投出去的票數就不一樣多了。也有些人企圖設計稍微違背第二條的選舉程序。然而，在亞羅之後半世紀，另一位數學經濟學教授薩瑞想要證明，真正值得鬆動的是第四條。

薩瑞的修訂理論

西元兩千年，薩瑞在「經濟學理論」期刊上發表兩篇各五十頁的論文，已經引起相當的重視和討論。薩瑞的論點之一，是亞羅的第四條和第五條條件會互相「抵銷」。他說：「既然假設選民是理性的（亞羅的證明當中用了這個假設），選舉程序應當要儘可能地檢查選民是否真的理性，儘可能有效地從卷宗當中剔除那些不理性的選民（譬如說，使得被檢查出不理性的選票變成廢票）。而亞羅的第四條條件，恰好就限制了選舉程序檢驗選民是否理性的能力。」

在這個觀點下，「單一選票相對多數制」又顯示出它最大的弱點，它是最不能檢驗不理性的制度，因此是最差勁的制度。因爲在這個制度之下，選票只反應出選民的第一優先，而完全遺失其他的候選人資料，在選舉程序中無法得知選民對第二優先以後的候選人，是理性的對待還是不理性的對待。

在這個哲學引領之下，薩瑞提議修改亞羅的第四條，將之稍微放寬，只加上三個字：

第四條：選舉結果關於A和B的排序，應該只由卷宗內A和B的相對順序和距離決定，與任何第三者無關。

所謂「距離」的技術性定義並不困難，但是需要多一點的篇幅敘述，在這裡我們只好割捨這個細節。

如果我們可以接受將亞羅的第四點換成薩瑞的第四條而還是認爲那是「公道」的話，那麼薩瑞證明了波達計數法選舉程序是「公道」的！當然，我們這裡關心的是超過兩個候選人的情形。

這一篇報導文章當中提到的其他選舉程序，在修改後的標準之下，都還是不夠公道。

結語

讀者或許已經一邊讀一邊產生疑問，譬如爲什麼不討論兩票制選舉程序呢？爲什麼沒提到對每個候選人投同意票的方法呢？爲什麼不容許選民對部分選擇對象不分高下呢？例如冰紅茶＞（啤酒＝雞尾酒）？如何遏止或減少選民運用策略投票呢？其實，選舉理論有非常豐富的發展，除了這裡介紹的「公道」定義之外，還有其他見仁見智的看法，也還有可辯論的空間。選舉理論還跟社會福利法案的經濟數學有關，當然又可以推展成工業、經濟各種方面的決策理論，那裡又有許多有趣而且和我們的生活密切相關的問題，讀者可以參考以下書目做延伸閱讀。不過，以下書目傾向於數學和經濟數學的觀點，有些讀者或許有興趣看看政治學觀點，例如萊可和布拉姆斯這兩位學者的看法。

參考資料

1. E. Klarreich, *Election Selection*, Science News Online, 162 (2002). <www.sciencenews.org/20021102/bob8.asp>
2. D. Mackenzie, *Making sense out of consensus*, SIAM News, 33 (2000), p.1.8.
3. D. Newman,《選舉理論及比例代表制》香港嶺南學院政治學與社會學系報告（中譯本），1998.

<www.hkdf.org/seminars/980301/newman-c.doc>
4. J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet*, The MacTutor History of Mathematics archive, 1996. <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Condorcet.html>
5. J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *The history of voting*, The MacTutor History of Mathematics archive, 2002. <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Voting.html>
6. J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *Jean Charles de Borda*, The MacTutor History of Mathematics archive, 2003. <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Borda.html>
7. D. G. Saari, *Chaotic elections! A mathematician looks at voting*, American Mathematical Society, 2001.
8. D. G. Saari, *Decisions and elections, explaining the unexpected*, Cambridge University Press, 2001.
9. E. O. Wilson, *Consilience, the unity of knowledge*, 梁錦鋆譯，《知識大融通》天下文化書坊，2001.