國中數學語用商榷

單維彰．民國 111 年 1 月 19 日（2 月 1 日修）

最近教育圈「覺察」一個新議題：教師覺察力（teachers noticing）；例如，請看林勇吉教授的簡介（2017）。一方面，教師「覺察」是課綱第四條理念的實踐，也是教「識」的相關概念：教師要能覺察自己的教學（語言）是否讓學生「有感」？特別要覺察自己是否說了學生聽過之後無法產生意義(making no sense)的話語？另一方面，教師覺察力也跟作者從「設計思考」引進「同理心」，請教師站在學生立場想像她／他從教材與評量中獲得什麼訊息，是一貫的想法（單維彰，2021）。

本文想要提出討論的，無關於數學教學的內容━━它們當然都是正確的━━而是教學與評量過程中使用的話語。「精確」是眾所皆知的數學特徵之一，數學領域向來以自己的語言精確自豪，相信所有教師同仁也樂於傳授數學的這項美德。教師以及所有媒體在課堂內外使用的數學語言，對於學生都具有潛移默化的效用，而「素養導向」之「態度」屬性的學習，主要來自這些生活中點滴累積的數學經驗。

作者根據近兩年參與國中階段數學教學工作之管見，整理出以下幾項意見，就教於教師同仁以及數學教育社群。

移項

將等式 $3x-2=4$ 轉化為 $3x=4+2$ 的等量公理操作特例，稱為移項。但如果將另一種等量公理操作━━將 $3x=6$ 化為 $x=\frac{6}{3}$ ━━也稱為移項，就值得商榷了。它可能是課室裡的習慣說法，所以《數學領域課程手冊》也在 A-7-3 之釋例第 1 點，將前面兩種等量公理的操作都稱為「移項」。這樣籠統的說法，對於 7 年級剛接觸一元一次方程的學生來說，或許是方便的，但是這樣短暫的方便性，卻可能導致後續的認知衝突。至少，它讓學生獲得「數學語言模稜兩可」的經驗，這並不是有利於培育數學素養的一種經驗。

在一元一次式之後，「項」將會成為數學課程的主要物件之一。我們將要稱 $3x$ 和 $\frac{1}{2}x$ 為「一項」，將來還要稱它們為「一次項」，接著就要學習「同類項合併」，再後來它們要和其他「項」組成「多項式」。即使在初學同類項合併的時候，也可能遇到將 $2x=6-4x$ 化為 $2x+4x=6$ 的需求，此時的「移項」概念就可能無形地造成了認知衝突：以為要將 6 移到等號左邊，或者把 2 除到等號右邊才叫做「移項」。7 年級學生即使感受到認知衝突，通常也無法表達，只能等待哪一天忽然明白了；這樣的學習經驗當然不是我們想要的。

移項確實比等量公理容易表達，但是等量公理是無法迴避的代數教學目標。

等量公理的概念匱乏，累積成更多困難；事實上，等量公理就是「等式」教學的核心目標。例如有些學生因為不理解「等式」的意義，所以會從$(x-1)(x-2)=3$的形式而誤以為x的解是 1 或 2，甚至以為可以令$x-1=3$而解出$x=3+1=4$。

其實「等式」的教學幾乎就是等量公理的教學，與其將等量公理當作一個要背誦的名詞，可能不如在代數操作的過程中，經常趁機提點，讓學生有機會在長時間的操作經驗中「有感地」理解等量公理，而後內化之。

方程

雖然大半數學詞彙是翻譯進來的，但中文固有的傳承也還在。例如「方程」是二千年前《九章》用語，它原指二元或三元一次聯立方程式，現在被用來指稱求解的方程式（例如$x^2+2x-5=0$），同時也指稱畫圖的方程式（例如$2x-y=3$）。事實上，可能不只是學生，一般成人大概都不能理解「方程」是什麼意思？這個文言詞彙頗難解釋；我們只是說習慣了，並不表示我們真能解釋。用同理心想像 7 年級學生初次見到「方程」，是不是個莫名其妙的詞？而它有時候要求解，有時候卻代表一個圖形，不奇怪嗎？

作者並不反對使用「方程」，只是建議給予解釋，並且在初學階段謹慎分類。搭配最近的熱門話題「雙語教學」，我們可以解釋：求解的那種方程是 equation of unknowns，未知數的等式，對應坐標平面上圖形的那種方程式是 equation of variables，變數的等式。而且，不論求解或畫圖，都是根據「等式」的原理而來的。對初學者而言，英文說法不但直接指出程序與目的，還幫助釐清「元」──也就是x或y──所代表的意義：未知數或變數。等到學生較為成熟，確實能了解那兩種意義可以自由交換之後，才有機會真正感受中文「方程」的簡潔方便。

延續前述謹慎分類的概念，作者也建議不要對初學者混用「解」的說法。從一元一次方程開始，到二元一次聯立方程式，「解」都是對未知數而言的，而具體的概念心像，總會把未知數x或y對應一個應該確定但還不知道是多少的數。求解是一系列的代數程序：目標明確地一連串使用移項或等量公理。學生並不會試著將$x=1$代入$3x-2=4$發現它不是解，然後試著代入$x=2$而發現它是解。因此，我們應可想像：當學生初次遭遇「$2x-y=3$有無窮多組解」這句話時的迷惘。

將未知數等式的「解」推廣為「滿足」等式的數（或數對），這個概念是數學抽象化的結果，它標誌著數學思想史上的偉大進展，也是從古代的代數轉化為現代的解析幾何（包括微積分）的關鍵步驟。這一組觀念需要謹慎發展，而不能等閒視之。謹慎發展的具體行動之一，就是謹慎使用教學語言。在剛開始的時候，建議說「有無窮多組滿足$2x-y=3$的x和y」，然後以有感的教學活動，幫助學生從經驗中把「滿足」和「解」這兩個觀念連結起來。

事實上，將中國古代的「方程」知識傳到現代的最主力推手是李善蘭（1811—82），他也是將西方代數與解析幾何譯入華文世界的第一人。本文附圖顯示：李善

蘭並未使用「方程式」表述坐標平面上的圖形，他說的是「代數式」；作者認為「代數式」是更合適的名稱。

比例

「比」是生活中常用的語言，例如手機螢幕是 16:9，人像照片是 3:4 之類的。比的妙用就在於它跟分數不同，但是如果我們定義（二項）比$a:b$的後項 b 不得為 0，相當於把比和分數完全等化，這樣反而讓比喪失了它的存在價值。試想，我們都說比例式$x:y=3:2$等價於$3y=2x$，既然兩者等價，為什麼一個不准 $y=0$，而另一個就可以呢？

在日常生活中本來就不會出現「比 0」的情境（棒球比賽的分數不是數學的「比」），數學課本刻意規定$a:b$的 $b\neq 0$只是為了方便定義比值。但是這個短暫的便利性卻導致後面多重的數學內部不一致性，實在是得不償失的。「比」本來就不一定有比值，譬如三連比就沒有比值。想一想連比，就知道「比值」並不是「比」的內在性質。我們大可以定義：如果二項比$a:b$的$b\neq 0$則它的比值是$\dfrac{a}{b}$，但三連比或後項為 0 的二項比，就沒有比值。

關於比與比例式的所有運算性質及應用，全都不需要經過比值──因為比值不是比的內在性質，只要使用比的原始定義即可：例如$x:y=3:2$的定義是$x=3k$且$y=2k$；此處仍然不需要關心 k 是不是 0。將來$\begin{cases} x=3k \\ y=2k \end{cases}$就是直線參數式，$k=0$就對應原點，為什麼要擔心直線通過原點呢？

雙變數的比例式未必是正比關係，例如$x:y=3:2$以及它的所有等價形式（例如$x:3=y:2$）都表示 x 與 y 成正比，但是$x:3=2:y$卻表示 x 與 y 成反比。此時仍然不必特別規定 $y\neq 0$，因為 $y=0$本來就不滿足比例式（$x=0$也不滿足）。由此可見，比例式與方程式$3y=2x$或$xy=6$等價，與一次函數$y=\dfrac{2}{3}x$或反比函數$y=\dfrac{6}{x}$也等價，前者的概念心像是通過原點的直線，這些觀念的連結，不但是融通國中數學的重要機會，也是一把解題的利器。

一般化的正比關係是$x-x_0:y-y_0=a:b$，它的圖形（稱之為 L）是通過點(x_0,y_0)的直線，而$b:a$的比值（如果存在）就是直線斜率 m。按照斜率定義$\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=m$則直線 L 上的點(x,y)皆有斜率，且斜率皆為 m，唯獨(x_0,y_0)這一點沒有斜率。本來一個點就不必討論斜率，但是當牛頓等人將 x 和 y 的關係詮釋為動點的時間ー位置關係，而每一點的斜率被理解為那一瞬的速度，則每一瞬都應該有速度，所以就需要直線上每一點都有斜率了。直線代表等速運動，因此在相位點(x_0,y_0)的速度也必須是 m。換句話說，在直線 L 上，明明是$0:0$的比值$\dfrac{y_0-y_0}{x_0-x_0}$也應該是 m。這個石

破天驚的觀念，大家都知道就是微分。而上述問題最後就凝聚成極限概念：$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=m$。在極限觀念下，$a:0$的比值還未必不存在哩。

國中 7 年級的「比」在後面還有非常豐富的發展，在 7 年級一言難盡，但至少不必增加非必要的 $b\neq 0$ 規定。

拋物線

「拋物線」雖然是 parabola 的漂亮翻譯，卻很不幸地容易在教學上倒果為因。它不像「方程」難以做字面解釋，「拋物線」相當容易望文生義，問題是它實在不容易跟 $y=ax^2$ 發生關係。同一族曲線 $y=ax^2$ ，從「平方線」到「拋光線」到「拋物線」的發現歷程，足以成為西方數學發展史的三塊里程碑，卻在國中 9 年級被莫名其妙地打發掉了（名副其實的「莫名其妙」），實在可惜。更何況嚴格來說二次函數 $y=ax^2$ 只是拋物線方程式的變形，拋物線的標準式應該是 $x^2=4cy$ 。

故事通常從古希臘「阿波羅神諭」的倍立方傳說開始，目標是解 $x^3=2$ ，可推廣至 $x^3=a$ ，其中 a 為正數。按希臘人的想法，所謂求解是根據一條給定的 a 單位長線段，做出一條新的線段，使其長度 x 的立方為 a。他們開闢的解題進路是設計一條中繼線段，令它的長度為 y 且 $x^2=y$ ，則 $y^2=x^3\cdot x=ax$ 。希臘人用比例式 $1:x=x:y=y:a$ 來理解問題，而 $y^2=ax$ 的幾何理解是：互相垂直的 x、y 兩線段，y 線段所作的正方形「恰等於」x 線段與給定之 a 線段的矩形面積。當 x 線段的一端點固定（成為頂點），另一端點也是 y 線段的端點，則 y 線段的另一端點所經的軌跡就是最初的「平方線」。古希臘並沒有 xy 直角坐標系，但 $x^2=y$ 和 $y^2=ax$ 這兩條平方線的對稱軸互相垂直，且 x 和 y 確實是平方線上一點到兩軸的距離，所以希臘人已經幾乎要發明直角坐標了。

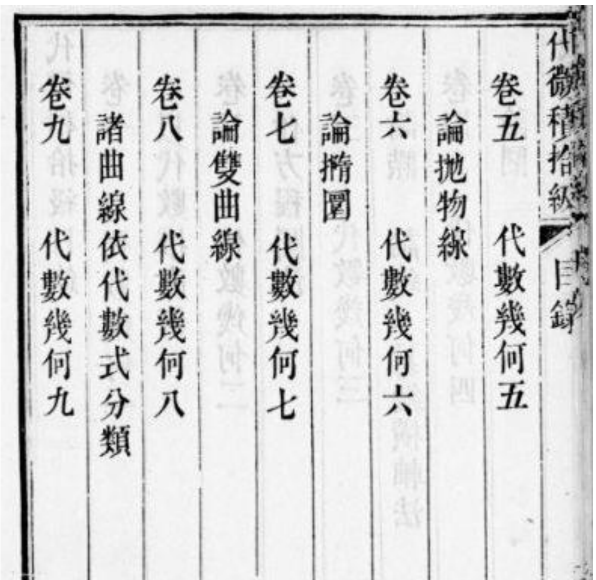
這條文明路上的第一座里程碑，是發現「平方線」為圓錐截痕，在那之後才把它理解為一條靜態的曲線，並且用「恰等於」給它命名，演變至今就是 parabola。第二座里程碑是發現了「準線、焦點」作圖法（它不是尺規作圖），參數 a 就是現在所謂的正焦弦長，而「焦點」出場也表示發現了它的光學性質；在那之後，它也可以稱為「拋光線」。最後是伽利略、刻卜勒、牛頓等人的運動理論，這才發現自由拋射物的軌跡原來又是「平方線」，於是可以稱為「拋物線」。（Taylor, 1881）

當偉烈亞力（Alexander Wylie，1815－1887）把 parabola 介紹給李善蘭（1811－1882）的時候，西方已經走完了 parabola 的三座里程碑（不知道還有沒有第四座？）。因為音譯實在難以傳遞意義（例如把 algebra 譯為「阿爾熱巴拉」顯然不如譯為「代數」），所以用它最後的成就來意譯，確實值得喝采。只是這個太過聰明的翻譯，卻可能誤了教學的大計。

就像「方程」一樣，「拋物線」已經是標準的中文數學詞彙，必須接受。作者想要商榷的是「 $y=ax^2$ 的函數圖形是拋物線」這樣的話。這麼說的言下之意，彷

佛讀者（學生）已經知道拋物線。相對地，類似「$2x-y=3$的方程式圖形是直線」或「$x^2+y^2=2$的方程式圖形是圓」就是合理的話語，因為讀者已經知道直線和圓。除非我們確定 9 年級上學期的物理課，已經使學生認識了拋物線，否則 9 年級下學期的數學課就不適合這樣說。教科書經常用噴水或拋擲籃球為例，這兩者充其量只能先邀請學生想像一條理想軌跡，稱那條軌跡為拋物線，然後從經驗歸納，取適當的係數 a，二次函數圖形很像拋物線。老師們都知道「$64=65$」那個詭異的例子，它無非就是要彰顯數學對於精確的要求，視覺經驗是不可靠的。因此，從視覺感受來定論「二次函數圖形是拋物線」總是不太理想。

如果我們還在乎數學領綱理念三：「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」，可不可以在 9 年級的「拋物線」教學講得更細緻一點？讓學生有機會感動於歷代先人對同一條曲線挖掘出來的奇妙性質（這就是「數理人文」的典範例）。如果 9 年級一言難盡，不說也沒關係，直接把 $y=ax^2$ 的函數圖形稱為「二次曲線」並不減損國中生的數學理解，而且這個名稱將可順利地銜接高中數學課程。



代微積拾級 目錄

卷五 代數幾何五

論拋物線

卷六 代數幾何六

論橢圜

卷七 代數幾何七

論雙曲線

卷八 代數幾何八

諸曲線依代數式分類

卷九 代數幾何九

圖：偉烈亞力與李善蘭合譯《代微積拾級》的目錄，可看到三種圓錐曲線的譯名，並可看到當時稱方程式為代數式。咸豐己未年（西元 1859 年）出版，書影取自法國數位圖書館。

國中數學語用商榷續篇

解與根

「解」和「根」經常被混用，但它們不是同義詞，它們彼此的關係是：$x=1$是方程式$x^2-3x+2=0$的解（solution），而它是多項式x^2-3x+2的根（root），他也是函數 $f(x)=x^2-3x+2$的根。一般性的用語是：函數 $f(x)$的根是等式 $f(x)=0$的解；嚴格來說，前述 $f(x)$應該限於多項式函數，但是可以如果交代清楚，可以容許它泛指一般的函數。

混用「解」和「根」的更根本原因，可能是源於「多項式」與「函數」的語言混淆。「多項式」作為一個數學物件，應該被理解為獨立的物件，而不必跟方程式、方程、函數連結在一起來說。雖然老師不跟國中生這樣說──多項式是將整數一般化而成的代數結構（可交換環）──但教師自己應該明白這個道理，所以當我們說一個多項式，我們就直接說它，例如 x^2-3x+2或ax^2+bx+c ，而不必說 $y=x^2-3x+2$ 或 $f(x)=x^2-3x+2$ ，因為 $y=x^2-3x+2$是一個多項式方程式，而 $f(x)=x^2-3x+2$是一個多項式函數，它們都不是「單純的」多項式。如果為了溝通的需要而想要給x^2-3x+2一個名字，習慣上可以稱它為 P 或 Q 或 R——就好像我們習慣稱一個整數為 m 或 n，稱一個有理數為 p 或 q 那樣——但是不需要把它變成方程式或函數。

截點與截距

國家教育研究院的雙語詞彙資訊網將 intercept 翻譯為「截距」是有待商榷的，因為 intercept 主要是指截點，它是一個點坐標，而非一個數。不論要講截距或截點，都必須先有圖形，所以我們只討論方程式或函數的截點、截距。

以下是英文的容易混淆之處：x-intercept 應該指函數圖形與 x 軸的交點，例如(1,0)是函數 $f(x)=x^2-3x+2$的 x-intercept，但是在學校裡，有時候卻也說 1 是 $f(x)$的 x-intercept；前者是正確的說法，而後者是延伸的說法。這個混淆是英語的問題，我們不必替他們操心。幸運的是，intercept 可以翻譯成「截點」或「截距」，所以中文可以準確地分辨它們兩者，而不至於混淆。我們只要留意：準確說出「截點」或「截距」，不要混用兩者就行了。例如(1,0)是函數 $f(x)=x^2-3x+2$的 x 截點，而 1 是 $f(x)$的 x 截距。

一般而言，x 截點是函數圖形與 x 軸的交點，它的坐標必為$(x_0,0)$之形式，而x_0是該函數的 x 截距，也就是函數圖形與 x 軸交點的 x 坐標。在此語彙之下，必須提醒學生注意的是：「截距」雖然稱為「距」卻不是「距離」的意思，它不必取絕對值：可以有負的截距。

重根

有些國中生常為例如 $x^2-2x+1=0$ 這種題目的解應該寫「$x=1$」還是「$x=1$、1」還是「$x=1$（重根）」而煩惱。這實在是最不需要讓國中學生煩惱的問題了。首先，作者想要指出「重根」根本就不該出現在這個脈絡之中，因為有「重根」的是多項式 x^2-2x+1 而不是方程 $x^2-2x+1=0$。其次，就教學的意義來說，人們必須先知道二次方程「應該」有兩個解，然後說「重根」(或「重解」) 才有意義。大家都知道，國中生並不知道「複數」，也不知道「代數基本定理」，所以當然不知道二次方程必然有兩個（複數）解。因此，我們應該可以「同理」國中生的感受：硬要說 $x^2-2x+1=0$ 有兩個解，是個沒有意義而必須記憶的數學知識；像這樣的學習，顯然悖離「素養導向」，而是徹底的「學科導向」。什麼「導向」屬於意識形態，它畢竟是次要的，更重要的是：硬要說 $x^2-2x+1=0$ 有兩個解，對於國中階段的數學學習，應該完全沒有幫助吧？

很久以前，國中生學到的是：像 $x^2+1=0$ 這種方程「無實根」或者沒有實數解（作者本人就是這樣學的）。當時這種說法在國中還算有意義，因為當年的國三選修課程就有複數，所以作者的確在國三知道 x^2+1 有虛根。後來複數內容從國中刪除了，經過許多年，國中教育現場總算戒除了「無實根」的習慣用語，而改說「無解」。如今，本文提倡國中教師連「重根」也一併戒掉，直接說「有一個解」就好了。如此一來，二次方程可能有 2 個解、1 個解，或者沒有解，合併而言可以說二次方程「至多有兩個解」，不是也很「漂亮」嗎？類似地，二次函數可能有 2 個、1 個，或者沒有 x 截點，合併而言可以說二次函數「至多有兩個 x 截點」。

參考文獻

Taylor, C. (1881). A*n introduction to the ancient and modern geometry of conics*. London: George Bell and sons. (Reprint 2019 by Alpha Editions.)

林勇吉（2017）。真的只有教師知識和信念嗎？數學教師覺察力：從另一個觀點來看待教師的專業能力。**科學教育月刊**，402，2-15。

單維彰（2021）。數學素養課程的轉銜。**課程研究期刊**，16(1)，1-16。