

# 素養導向教科書的宏觀與微觀 設計：以七年級數學為例

doi: 10.3966/168063602019070303006

單維彰 中央大學師資培育中心與數學系副教授



## 摘要

有鑑於素養導向的教學須同時兼顧學科的知識與技能（即本文所指的微觀），以及學科知能的發展脈絡與相互連結（即本文所指的宏觀），以期默化態度的形成，故推論教科書內容也須同時兼顧微觀與宏觀的設計。本文附和「語言學轉向」所觸發的四種文本分析方法：（古典）內容分析、故事分析、論述分析、論辯分析，揣度其分析對象的特徵，提議做為素養導向教科書的設計方針。為能進一步闡釋此初步試探的意涵，本文以七年級的數學教科書為例，從數學的精熟練習、問題情境、教學語言、物件名稱與概念膠囊等課題，提出五項在微觀與宏觀上可資研討的對象。

**關鍵詞：**素養導向、教科書、數學素養

## 壹、前言

本文採用的宏觀與微觀概念，或許並非典型，故需略加說明。本文所謂的宏觀，乃是取義於個人心理的整體性（holistic）認知類型（cognitive style），而微觀則取義於相對的解析性（analytic）認知類型。為了有效地進行思考與解決問題，個人或組織都應該平衡地發展與運用這兩種認知類型。之所以用這兩種概念來檢視教科書設計，是希望它們能夠讓學生「見樹又見林」，因而有機會對於所學的對象（可能是學科，但不限於學科）同時產生宏觀與微觀的概念。

礙於作者本身的學識限制，在宏觀與微觀的大概念之下，僅以數學領域做為論述的範例。而且為了能舉出較為複雜的學習內容做為範例，同時又能與數學教育以外的教育先進保持有效溝通，本文僅限於七年級教科書的討論。

本文先以一節簡要補充關於素養的宏觀與微觀論述，並提出執兩用中的平衡之議，亦即再提「知、行、識」的數學課程架構。接著，本文以「語言學轉向」的思考脈絡，論述宏觀與微觀之教科書設計的必要性，並提出實踐方法上的初步建議。再接著的兩節，則分別針對微觀、宏觀舉例說明。最後，做一總結。

## 貳、數學素養補述

關於數學素養以及素養導向的數學教育，本文秉持的理念與立場為：

數學教育前賢，在半世紀前就自發提出素養觀念，而開始形塑我國的數學教育理想。……十二年國教素養導向的課程理念，可以詮釋為數學教育探索「理想」數學課程的持續努力。（單維彰，2018b，頁4）

因此，本文也可以視為探索「理想」數學教科書的持續努力。近一、兩年來，關於素養、數學素養的論述頗豐，本節僅擇要補充幾份最近的文獻。

關於素養的論述，也可以粗分成整體性與解析性這兩種風格。例如，數學素養「是個體回應特定數學情境的挑戰時具有見識的從容」（劉柏宏，2016，頁71）、「使個人可以適應日常生活與面對未來挑戰，進行終身學習」（鄭章華，2018，頁83）、「是一個有機體，……不會以有、無素養做區分，它將隨著社會變遷、文化差異及個體認知發展而改變」（左台益、李健恆，2018，頁31）、「[使個體]能以數學知識為基礎且有信心地應用相關知識於日常生活中」（左台益、李健恆、潘亞衛、呂鳳琳，2018，頁41），都是整體性的看法，將素養和一個人的整體發展及其與社會的互動連結起來。

整體性看法較容易表現其意義與價值，但若想要釐清一個概念究竟「是」什麼，則通常有賴於分析其特徵，那就是解析性的看法了。例如，眾所皆知的「知識、能力、態度」是解析性素養論述的一個典型。隨著投入研究的腦力與時間愈來愈多，解析的細項也就愈辨愈明。劉柏宏

(2016) 整理了西方世界四大地區的數學素養說法(如表1)，羅列出各地區學者解析而得的概念細項，總計超過37項，因而不便在此複述。而左台益等人(2018)為數學素養指認出三面15項的要素，則堪稱為解析性論述之極致表現的典範，如表2。

表1 西方世界數學素養相關名詞

地區	大英國協	美國	丹麥瑞典等	荷蘭與OECD
用語	Numeracy	Quantitative Literacy	Mathematical Competence	Mathematical Literacy

註：「從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵——理論與案例分析」，劉柏宏，2016，*臺灣數學教育期刊*，3(1)，頁72。

表2 數學素養之要素

建模歷程	數學識能	內容知識
形成	溝通	數與量
應用	數學化	代數
詮釋	表徵	幾何
評估	擬定策略	機率統計
	符號使用	
	推理論證	
	工具使用	

註：「臺灣、新加坡及巴西數學教科書中數學素養內涵之比較——以畢氏定理為例」，左台益、李健恆、潘亞衛、呂鳳琳，2018，*教科書研究*，11(3)，頁42。

在各家的數學素養解析項目之中，都共同指認數學知識本身是數學素養的一項要素。諸如「數學學科知識也是數學素養」(張鎮華，2017)、「數學知識是數學素養的核心及必要前提」(左台益、李健恆，2018，頁34)，幾乎是英雄所見略同的意見。可是，把這個概念推到極致，豈不是說所有艱深的人造數學難題，都可

以自稱為數學素養嗎？如此推廣的說法，肯定無法得到教育社群的認同，也違背了言者的本意。可見，如何在數學學科知識中界定出素養的內容，是一個關鍵的議題。本文將在第肆節對此議題提出建議。

過於統整的詮釋，固然會因為過於籠統而不知如何切入。但是，過多細項的解析，也同樣會因為過於龐大而顧此失彼。

俗話說，事不過三，希臘先賢Aristotle也嘗言「三即是全」，因為「每個真實存在的物體，都有長、寬、深」（Galileo, 1632/2001）。本文認為，在整體與解析之間「執兩用中」的中庸之道，就是「知、行、識」課程架構。其中，「知、行」可望文生義地理解：

知、行就是「知道」和「能做」兩個向度，在教學層面上，知當然是指學習內容，而行是操作技能。可是……行則不僅有操作程序的教學，更應該包括「做什麼」的敘寫。……就是一個內容主題的典型應用。（單維彰，2018a，頁102）

至於「識」的意思則比較微妙，是關於理解和連結的後設認知，以及對其價值的認同。以左台益和李健恆（2018）的話來闡述，在他們以解析性的思維為素養導向的數學教材設計提供了豐富的要素、特徵、策略之後，還認為：

必須讓 [學生] 感知各種學習的知識、技能、思維是具有其價值及背後的用途，否則只知道怎麼做卻不懂為什麼要做，將難以持續展現數學素養。（頁49）

這一番深入淺出的話，說的就是「識」的意涵。

「知、行、識」並非素養的另一種解析，而是用來實踐素養導向之教材設計的參考架構（單維彰，2018a）。素養之各種解析，包括所謂「態度」在內，有一共同情況：它們描述的是具備素養的表現，卻不是培育素養的方法或策略。在數學領綱中，與數學學習內容和學習表現直接相關的核心素養項目，例如「符號運用與溝通表達」以及「科技資訊與媒體素養」，都被歸類為數學教育的「結果」面向（鄭章華，2018）。類似地，左台益等人研究三本教科書的內容分析結果，呈現的是教材中符合素養要素的內容，未必等於是促進學生發展數學素養的教材，也不能推論教科書作者是否有意以那些教學活動達成素養導向教材設計的目的。

### 參、宏觀與微觀的必需性

按「知、行、識」課程架構來解析教科書，則認知性學習目標的「知」方面內容，與程序性學習目標的「行」方面內容，必須深入細節，也難免需要按部就班地學習，乃臻於在某種程度上的精熟。像這樣片段的、可條列或可排序的、深入細節的「知、行」方面的教科書內容，便是本文所指的微觀設計。

至於「何以如此？」、「為什麼要學這個？」等後設認知的「識」方面的學習目標，則必須連結與統整學科內容，將片段知識做類比、對比、邏輯或歷史脈絡的排比，甚至可能需要將學習的視野提升

到文明和文化的層次，才能達成。因此，「識」方面的學習目標，必須以教科書的宏觀設計才能表現出來。

十二年國教的數學領綱以「知、行、識」做為課程設計的架構，目的是要「以知、行對應素養所謂的知識和能力，以識包裹態度」（單維彰，2018b，頁13）。意即設計教科書時，以這三個向度來協助考量教學目標的均衡，並用以達成素養——知識、能力、態度——的教育目標。

以上是從素養的目標以及課程設計的架構，闡述教科書應該同時具備微觀與宏觀的設計。以下則附和張芬芬（2012）從「語言學轉向」（linguistic turn）引進的四項文本分析方法，做為教科書應有微觀與宏觀設計的支持理由。

所謂「語言學轉向」，本是二十世紀的一條哲學思想脈絡，大意是以語言分析做為「意義」之類哲學問題的解析方法，但是它的影響面逐漸擴大到許多領域，而影響了眾多領域的認識論和方法論。就連數學也受此思潮影響，最明顯的例證之一就是108數學領域課程綱要開宗明義地指出「數學是一種語言」（教育部，2018，頁1）。數學課程之所以被認為是學校教育的「重要學科」之一，並不是因為其學科本身的價值，而是因為它像國文、英文等語言一樣，是所有學習的共同工具。而素養導向的數學課程與評量，也就採取「支持終身學習的數學語言」（單維彰，付梓中）做為內容界定的參考標準。

張芬芬（2012）認為，「語言學轉

向」思潮影響了整個人文社會科學，進而觸發了文本分析方法論的蓬勃發展。而「教科書研究應可從文本分析的各種方法中汲取養分」（張芬芬，2012，頁161）。該文整理出以下四種文本分析法：其一是學界常用的內容分析（content analysis），相對於後面三種方法，又稱為古典內容分析；其他三種方法是故事分析（narrative analysis）、論述分析（discourse analysis）與論辯分析（argumentation analysis）。這篇文章不僅介紹了三種新的方法論，更重要的是揭示了全新的「看教科書的視角」；而這個新視角，是寫作本文的最主要動機。

從文本分析的觀點來看，教科書的微觀設計屬於文本的用字、修辭與造句的層次，而教科書的宏觀設計則屬於篇章與情節層次。從文本分析的方法論來看，教科書的微觀設計適合做為古典內容分析法的研究標的，目前所見的數學教科書分析文獻，所採用的方法可謂全是古典內容分析，例如前節提過的左台益等人（2018）之教科書比較，以及楊德清與鄭婷芸（2015）以及李健恆與楊凱琳（2012）等研究團隊的教科書研究，皆屬此類。相對地，教科書的宏觀設計，因為表現在整個學習過程的脈絡連結，猶如故事發展的情節，也要交代其發展的合理性與意義所在，所以適合做為故事分析與論述分析的研究標的。特別是對於數學教科書而言，定理或公式的論證（是指適合學生的學習與理解的論證，未必達到「數學證明」的



嚴謹層次），乃至於所謂「一題多解」的解法取捨與判斷，都適合做為論辯分析的研究標的。

儘管三種新的文本分析方法都可能用來做為數學教科書的分析方法，但是目前臺灣還沒見到如此的研究。事實上，按照作者的揣度，臺灣的數學教科書還沒有意識到故事、論述與論辯風格的寫作。因此，這三種文本分析的方法論，在它們做為研究方法的同時，也可以成為教科書寫作的方法論，讓教科書作者藉以檢視其教材在教導細節與片段知識技能的同時，是否兼顧了整體性與意義性的了解？而故事、論述與論辯風格的寫作，便是本文所指的教科書宏觀設計。

#### 肆、七年級數學教科書的微觀商榷

教科書的微觀設計是我們已經熟悉的關注標的，亦即教材的細節片段。雖然教科書長期關注於微觀設計，品質應該甚為可靠，但是在素養導向的總目標之下，相對於學科本位或知識導向的教學設計，教科書理當因應調整。本文僅在精熟練習與情境動機這兩個議題上，提出數學教科書微觀層次的商榷。

本文的主旨並非文本分析，以下的舉例未必來自於臺灣出版的教科書。

##### 一、精熟練習的規準

前面指出，「數學知識是數學素養的

核心及前提」是必須同意的，但是應該以「支持終身學習的數學語言」做為內容範圍的界定。就語言的功能性來判斷，有些數學概念（類比於詞彙）是在生活經驗中常用的，它們才是核心的數學知識；超出此範圍的，則屬於延伸的內容，在教科書中應該有所取捨。

舉例來說，能辨識10以下的質數，應該是素養。七年級學生應該能做正整數的質因數分解，並且可以用它來約分或擴分一個分數，以便完成分數加減或比大小的程序。但是，只有當質因數都在10以內時，才是核心的知識與能力；當質因數落在10與20之間，就該「適可而止」，而20以上的質因數就必須在合理的需求情境下才值得做。又例如，問60有幾個質因數，可以算是素養，但是問它有幾個（正）因數，就該算是延伸的知識了；而且，後者牽涉較高層次的數學思維，即使要做，也不宜在七年級初學正整數的標準分解式的時候做。至於問它共有幾個（正、負）因數，則不但不是素養，甚至也不是延伸，它只是某些教師自創的問題，根本不值得精熟練習。

更進一步，像以下這樣的問題，可以當作「數學謎題」來看：

將甲、乙、丙三個正分數化為最簡分數後，其分子依序為6、15、10，其分母的最小公倍數為540，判斷甲、乙、丙的大小關係為何？

其解題所需的理解與技能，都難以認定在未來學習中的需求性。若是在遊戲的情境中把它當作「謎題」來解，則有其樂趣與成就感，若是當作教科書的內容，責令全體學生都要學習，就有待商榷了。

計算的流暢性攸關概念學習的成效，確實不能偏廢。但是，像以下這些繁複的人造算式，不論在未來的生活中還是數學的學習過程中，都不至於發生，它們在教科書裡的必要性，就值得慎思了：

$$(-15) \div [(-122) \div (-7) - (-4)] \times (22 - 25)$$

$$4 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times \left|-\frac{3}{16}\right| \div (-2)^4$$

以上舉出的例子，或許是所有讀者當初在國中都受過嚴格訓練的練習題。在以學科本位或知識導向為教學典範的時代，大家都不認為它們有何不妥。如今，若嚴謹地用素養導向的理念來檢視教科書，這些微觀的內容，就值得探討了。

## 二、情境的合理性想像

在一般人的印象中，所謂素養導向的數學命題就是情境問題。前面已經指出未必如此，核心的數學知識即使沒有情境，也屬於素養教材的內容。但是「在真實情境中解決問題」，畢竟是素養教學的主要特徵之一。如果真的要設計情境，就必須顧慮它的合理性，否則真的可能造成反效果，讓學生更誤信數學的無用論。

以下情境問題看來合理：

蘋果每顆60元，禮盒每個80元。  
某人買了一些蘋果，用一個禮盒包裝，結帳時給了530元，試問買了幾顆蘋果？

教科書依此情境列式求解之後，因為解得蘋果7.5顆，不是整數，就直接以「此題無解」做為結論。以數學的學科本位來說，此題可謂無解。但是若連結生活經驗，則此結論還有討論的空間。事實上，此題若改為支付若干百元紙鈔之後恰好付清，或者支付600元有找，再問買了幾顆蘋果，可能更吻合支付整鈔的生活經驗。

以下情境是在已知電梯上升速率為每秒二層樓，下降速率為每秒三層樓的前提下，企圖引出二元一次方程式：「某甲由第 $x$ 層搭上電梯，預計花費40秒可達第 $y$ 層」。如果我們就把它當數學題目來思考，別多想它的意義，則乖乖地立式求解就行了。可是，如果多想一想，為什麼會有人不知道自己在第幾層樓，也不知道要去哪一層樓，卻預知所需的時間呢？

根據以上兩個範例，本文主張：若要真正實踐在情境中解決問題的數學教育理想，則教科書在微觀層次上必須掌握情境的真實性與合理性。否則的話，不如乾脆直白地運用明顯荒謬的想像情境，反而可能妙趣橫生。例如寓言式的「雞兔同籠」問題，迷幻式地像愛麗絲那樣隨意放大或縮小，或者科幻式地被外星人綁架而瞬間移動到月球的背面等。

## 伍、七年級數學教科書的宏觀商榷

用宏觀的視野來看數學教科書，簡直是一片新生地，有非常多值得思考與整闢之處。大致而言，國中階段各版本數學教科書的內容都顯得「章章獨立」，除了編輯體例堪稱全書一致以外，在章與章之間可謂毫無關聯，就連串場的漫畫人物都可能不連貫。如果教科書即無宏觀設計，就連一冊書的學習內容都沒有前後呼應的連結，那麼，十二年國教所期望的跨領域統整學習，更待如何實踐呢？既然連跨章的呼應連結都沒有，全書的發展脈絡、由淺入深的層次安排，當然就更不在教材設計的考慮之內了。

因為缺乏以宏觀視野對教科書做文本分析的經驗與典範，面對這個課題感到頭緒萬端。本文做為初步的試探，僅以「語言學轉向」之主要觀點，提出數學的教學語言、物件名稱與概念膠囊這三項議題，討論於下。

### 一、數學教學的語言

數學本身是一種語言，而語言的教學仍須透過語言；猶如學習第二語言受到母語的支持或阻礙，學習數學也受到自然語

言的支持或阻礙。不同的自然語言，可能造成不同的阻礙，而此處我們假設自然語言即華語。以下舉一些容易因為語言而導致觀念混淆的例子。

例如「化簡」具有多重意義。「一字多義」是語言的普遍現象，本來並不奇怪。可是，一旦發生這種現象，理應特別謹慎地處理，而不應任意取用。可是，教科書幾乎都沒有對「化簡」的多重意義做任何處理：把 $2(3x - 1) - (x + 2)$ 運算成 $5x - 4$ 稱為「化簡」，把 $2(3x - 1) = (x + 2)$ 整理成 $5x = 4$ 也稱為「化簡」，到了八年級，將 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 有理化分母為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 又稱為「化簡」。以上三種化簡的概念與程序都極為不同，特別是前兩種，都發生在七年級上學期的初學階段，極容易導致學習的障礙，教科書應當有所處理。<sup>1</sup>

學生被教導「 $\leq$ 」是「不等號」，「 $=$ 」是「等號」。用不等號寫成的式子 $x + 3 \leq 7$ 很自然地被稱為「不等式」，可是為什麼用等號寫成的式子 $x + 3 = 7$ 就不稱為「等式」而成為「方程式」呢？<sup>2</sup>更加令學生混淆的是，方程式有時需要求解，有時又要畫圖。例如把 $2x = 6$ 整理成 $x = 3$ 就不再稱為「化簡」而稱為「求解」，到此步驟

1 處理的方式之一，是刪除非等式的化簡，也就是說，在七年級暫不處理單純的多項式，僅處理多項式等式。「多項式」是組成「方程式」的要件，所以看來應該先教多項式，再教方程式；但這是數學的學科知識，很可能並不適合數學教學。從學生的立場來看，方程式是有意義的，但是多項式是從方程式之中抽象出來的概念，比較難掌握其意義。

2 「方程式」是中文的特殊詞彙，來自經典古籍；英文則直白地稱之為「等式」。



本來就完成了程序，而 $x$ 就不再「未知」。可是，後來教科書又要討論 $x = 3$ 的「圖形」是一條（坐標平面上的）鉛垂線。學生甚至被訓練：在七年級上學期要回答 $x = 3$ 是一元一次方程式，可是到了七年級下學期就要回答 $x = 3$ 是二元一次方程式！可是學生從 $x = 3$ 獲得的字面上的訊息，僅為「 $x$ 等於3」，而直白的理解為「 $x$ 就是3」，哪裡來的未知數和方程式呢？

以上所舉的數學教材並沒有「錯」，那些課題確實應該是七年級的學習內容。本文所關心的，是從宏觀的（故事的或論述的）視野來看教科書時，發現對於以上情況皆毫無著墨，是值得商榷的。從故事角度來看，數學教學語言的多重意義發展，就像說書人的修辭流變似的，只要能夠清楚交代發展的脈絡與前後的差異，不但可以保持故事的吸引力，還具有使用簡單通俗的語言講述複雜故事的好處。從論述角度來看，教學語言的一詞多義等同於概念範圍的擴大，這本是任何理論性論述常會發生的現象，此時應指出擴充或容納了哪些新的概念，最好還能明示概念轉化的過程。

## 二、數學的物件名稱

任何學門皆有專用術語，其中最基本的名詞，即為該領域的主要研討對象。這就好比一篇故事裡總有角色，而為了故事情節的發展，角色總有其個性或特質，否則就只是劇情中的「路人」。在故事裡，路人通常沒有姓名，而一旦正式被介紹出

場，就一定有其必要扮演的角色。

用以上概念來檢視數學教科書裡的名詞，發現一些可議的設計。例如在七年級首次接觸 $5x = 4$ 就稱之為「一元一次方程式」，這七個字包含三個概念：「元」、「次」和「方程式」，其中只有「方程式」是在當下有任務的角色，「元」和「次」的意義其實還沒發生。數學教科書經常發生如此情況，為了數學知識內容的完整性或邏輯性，而提出沒有教學意義或價值的名詞。當「二元」的需求還沒發生之前，定義「元」和「一元」是沒有參照的；當「二次」的需求還沒發生之前，定義「次」和「一次」也是沒有參照的。因為缺乏參照，也沒有其他的辦法介紹「元」和「次」的意義，使得這兩個名詞在當時的故事裡，就像被命名的路人一樣，無法引起讀者的注意，當然也就沒有學習效果。

七年級還引進了「三一律」、「交換律」等高深的代數詞彙。在沒有需求，也沒有參照的情況下，這些詞彙既不增進概念的理解，也不提供程序的指引。作者建議參照數學思想發展史的脈絡，在教材中安排數學物件（名詞）出場的順序。以「交換律」為例，世界各民族都是從不可考的古代開始，就自自然然地在加法與乘法運算中使用交換律，而且也都知道：交換相減和相除的前後兩數，是沒有意義的，完全沒有必要為「交換」的操作程序命名。直到十九世紀「向量」的運算概念誕生了之後，才發現不可交換的乘法概

念，有此參照之後，才創造了「交換律」這個名詞（一個英文字）。

作者非常支持將數學史融入教育的理念（History and Pedagogy of Mathematics, HPM），但認為HPM並不是讓教科書以花絮形式寫出歷史中的「事實」而已，例如複製《九章》關於負數運算規則的原文，或者說某人在某年首度發明了「 $=$ 」和「 $>$ 」符號等，並未實踐HPM的精神，也沒有為數學教科書提供任何附加價值。HPM的意義，應該是參照數學史而安排教材的故事情節與脈絡層次。例如看看七年級的主要學習內容（方程）大約處於數學思想發展的哪一個階段？再看看「三一律」、「交換律」這些概念發生於哪些階段？據此而評估：在七年級把它們放在一起，是否符合學生的認知發展？有沒有教學上的意義？

### 三、數學的概念膠囊

數學教育有個學習心理學的「膠囊化」（encapsulation）理論，大意是說，學習數學的過程，就是把概念與程序一層一層地打包而濃縮成膠囊的過程（Davis, Tall, & Thomas, 1997）。語言本身就有膠囊的功能，一個字或一個詞可以包裹著許多的概念，而人們的知識領域與智識能力，也經常簡約地使用「認得多少字」來衡量。依據膠囊理論，教材理應善用已經打包成膠囊的概念，不輕易拆開已經穩固的膠囊，而且在膠囊化之初，於教材中應盡量提供適於鞏固新膠囊（數學概念或物件）的教

學活動。

有一種探討數學學習之心理歷程的APOS理論（Arnon et al., 2014），認為新膠囊的形成有一定的模式（或譯為「基模」）：首先是在「行動」中發現舊膠囊之不足或衝突，經過探索之後，將其內化為經由思維而操作的「過程」，再壓縮成新的「物件」（膠囊），在概念理解時直接採用膠囊，而在程序執行時將它還原成過程。APOS理論認為，整個數學學習的心理歷程，就是前述模式的循環，不是原地打轉的循環，而是漸層提升的循環，也就是螺旋的概念。

本文認為論辯的文本概念，正好呼應APOS理論。其一，所謂「行動」階段即是高認知層次的論辯：在情境中論辯舊膠囊在需求上或概念上的不適用。其二，在「過程」的內化階段論辯舊物件需擴充、調整或釐清的關鍵之處。其三，在壓縮成新「物件」之後，論辯它已經妥善地解決了在「行動」中面臨的問題。以論辯分析的角度檢視教科書形成概念膠囊的宏觀過程，也會發覺一些可商榷之處。

舉「分數」的四則運算為例。在七年級以前，小學階段以連續五年的時間（從二年級到六年級）安排次第發展的分數課程；在進入國中前，學生應該已經習得「倒數」物件，而一個數（正整數或正分數）除以另一個（非零）數的程序，應該已經被膠囊化為「乘以倒數」的概念。在七年級，新進的觀念只有「負」而已，大體而言的教學目標，就是讓「負」的觀

念與以前的正分數四則運算所建立的膠囊融合起來，包裹新的膠囊。然而，所有教科書卻都把膠囊整個拆開，幾乎是重新教學，卻又不能（沒有時間）重新進行小學的全部教學活動，於是有時候直接引用舊經驗，有時候卻又詳細解釋細節，使整個教學設計顯得紊亂。

再看「負」的教學。新引進負數觀念時，教科書都先做整數的運算，這應該是合理的規劃。完成混合正、負整數的加、減、乘運算的教學之後，<sup>3</sup>很自然地就接著混合正、負分數的加、減、乘、除運算。可是，教科書常常無視於前面封裝完成的膠囊，而近乎另起爐灶地重新教學。宏觀檢視此時的新概念與程序，首要是把已經膠囊化的負整數概念 $-3 = (-1) \times (-3)$ ，推廣到負分數 $-\frac{2}{3} = (-1) \times \frac{2}{3}$ ，再把正分數的倒數觀念延伸到負分數，例如 $-3$ 的倒數是 $-\frac{1}{3}$ ，而 $-\frac{1}{3}$ 的倒數是 $-3$ 。奠基於已經完成膠囊化的正分數運算與正、負整數運算，只要添入前述兩項概念，即可擴張到正、負分數的運算；經過適度的精熟練習之後，就應該可以打包為新的「有理數四則運算」概念。<sup>4</sup>

完成有理數四則運算的教學之後，所有教科書都會為「連除」設計獨特的教學

活動，例如 $(-\frac{3}{4}) \div (-\frac{2}{5}) \div \frac{2}{7}$ ，其教法等於小學階段的試誤行為，完全沒有善用新建立的概念膠囊而提升數學的理解層次，例如將它換成 $(-\frac{3}{4}) \times (-\frac{5}{2}) \times \frac{7}{2}$ ，再換成 $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{2}$ 。實在甚為可惜。

誠然，學生會遺忘，舊的膠囊可能不穩固。但是，複習舊經驗與拆開膠囊重新建立基模，在教材教法上都有很大的區別。在七年級，還有至少三個類似的狀況。一個是從一元一次方程式連結到一元一次不等式，部分教科書無視於前者的存在，而幾乎重新設計後者的教學活動；事實上，這兩個主題之間的唯一關鍵差異，是在不等式兩側同乘以負數時，不等號要變換方向。另一個是在求解二元一次聯立方程式的過程中，部分教科書忽視了求解一元一次方程式的舊經驗，沒有善用早先建立的概念膠囊。最後一個是各版教科書都在二元一次方程式的後面，安排比例式和正比關係，使得教科書的後者是前者的簡化情況，不論在概念上還是操作上，後者都比前者簡單：不論是從比例式 $y : x = a : b$ 轉換而來的 $ax = by$ ，還是正比關係的 $y = kx$ ，雖然都是二元一次方程式的特例（而且是比較簡單的），教科書卻都隻字未提。以前的教科書就是如此規劃，但當

3 此處刻意不提正、負整數的除法運算，那是因為它本來就不是數學結構裡的一個主題，應將它整併到正、負分數的運算裡。

4 所謂有理數（rational numbers），就是包含正、負整數和零在內的正、負分數。

時有個好理由：想要從正比關係 $y = kx$ 連接到一次函數。宏觀而言，那是一個合理的设计，相當於將正比關係當作二元一次方程式與一次函數之間的橋梁。可是，108課綱已經將一次函數從七年級挪到八年級，前述设计的理由就消失了，而教科書卻沒有以宏觀的眼光重新思考七年級的教學邏輯，導致現在這個顯得唐突的編排結果。

## 陸、結語

本文關切的議題是數學教科書的微觀教學設計，以及宏觀脈絡設計。本文認為兩者皆重要的理由，是前者主要用以達成「知、行」方面的數學教學目標，屬於素養導向教學的核心內容與必要前提，而後

者主要用以達成「識」方面的目標，屬於支持數學素養之培育的關鍵成分。

教科書的微觀文本分析，適合採用內容分析法，這項古典的方法為吾人所熟悉，而本文針對素養導向所觸發的新視角，提出兩項值得分析的對象。至於宏觀的文本分析，我們則缺乏典範與經驗，但本文認為張芬芬提出的故事分析、論述分析與論辯分析是三條明徑，值得開闢。本文則僭擬三個分析的項目，盼收拋磚引玉之效。


## 致謝

感謝兩位審查委員提供有見地的評論，其指教已經融入本文之內了。

## 參考文獻

- 左台益、李健恆 (2018)。素養導向之數學教材設計與發展。《教育科學研究期刊》，63 (4)，29-58。
- [Tso, T.-Y., & Lei, K.-H. (2018). Design and development of mathematical literacy-oriented subject material. *Journal of Research in Education Sciences*, 63(4), 29-58.]
- 左台益、李健恆、潘亞衛、呂鳳琳 (2018)。臺灣、新加坡及巴西數學教科書中數學素養內涵之比較——以畢氏定理為例。《教科書研究》，11 (3)，33-62。
- [Tso, T.-Y., Lei, K.-H., Pinheiro, W.-A., & Lu, F.-L. (2018). Comparative implications of mathematical literacy between Taiwanese, Singaporean, and Brazilian textbooks: Using the pythagorean theorem as an example. *Journal of Textbook Research*, 11(3), 33-62.]
- 李健恆、楊凱琳 (2012)。從統計認知面向與圖表理解角度分析國中數學教科書的統計內容。《教科書研究》，5 (2)，31-72。
- [Lei, K.-H., & Yang, K.-L. (2012). Analysis of statistical content in junior high school mathematics textbooks based on statistical cognition and graph comprehension. *Journal of Textbook Research*, 5(2), 31-72.]
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要。取自 <https://www.naer.edu.tw/files/11-1000-1594.php>。
- [Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines for 12-year basic education: Mathematics*. Retrieved from <https://www.naer.edu.tw/files/11-1000-1594.php>.]
- 張芬芬 (2012)。文本分析方法論及其對教科書分析研究的啟示。載於國家教育研究院 (主編)，《開卷有益：教科書回顧與前瞻》(頁161-197)。新北市：編者。
- [Chang, F.-F. (2012). Four approaches to text analysis: Introduction and their implications to textbook research. In National Academy for Educational Research (Ed.), *Enriches the mind textbooks' retrospect and prospect* (pp. 161-197). New Taipei, Taiwan: Editor.]
- 張鎮華 (2017)。數學學科知識也是數學素養。《高中數學學科中心電子報》，123。取自 <http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/ePaper/Default.aspx?id=123>
- [Chang, G.-J. (2017). Mathematical content knowledge is also mathematical literacy. *Newsletters for Highschool Math Teachers*, 123. Retrieved from <http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/ePaper/Default.aspx?id=123>]
- 單維彰 (2018a)。論知行識作為素養培育的課程架構——以數學為例。《臺灣教育評論月刊》，7 (2)，101-106。
- [Shann, W.-C. (2018a). Nurturing literacy by a curriculum construct of knowing, doing and seeing: Take



- mathematics as an example. *Taiwan Educational Review*, 7(2), 101-106.]
- 單維彰 (2018b)。中學數學教育的半世紀回顧及其啟示。《教育研究月刊》，294，4-18。
- [Shann, W.-C. (2018b). A reflection on the secondary math education for the last half-century. *Journal of Education Research*, 294, 4-18.]
- 單維彰 (主編) (付梓中)。《分科教材教法：中學數學教材教法》。
- [Shann, W.-C. (Ed.). (in press). *The teaching materials and methods for high school mathematics*.]
- 楊德清、鄭婷芸 (2015)。臺灣、美國與新加坡國中階段幾何教材內容之分析比較。《教育科學研究期刊》，60 (1)，33-72。
- [Yang, D.-C., & Cheng, T.-Y. (2015). Geometry content of middle school textbooks in Taiwan, the United States, and Singapore. *Journal of Research in Education Sciences*, 60(1), 33-72.]
- 劉柏宏 (2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵——理論與案例分析。《臺灣數學教育數學期刊》，3 (1)，55-83。
- [Liu, P.-H. (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture: Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55-83.]
- 鄭章華 (2018)。淺論十二年國教數學素養導向教學。《臺灣教育》，709，83-91。
- [Chen, C.-H. (2018). Discourse on the literacy-oriented mathematics teaching for 12-year compulsory education. *Taiwan Education Review*, 709, 83-91.]
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York, NY: Springer.
- Davis, D., Tall, D., & Thomas, M. (1997). *What is the object of the encapsulation of a process?* Retrieved from [https://merga.net.au/Public/Publications/Annual\\_Conference\\_Proceedings/1997\\_MERGA\\_CP.aspx](https://merga.net.au/Public/Publications/Annual_Conference_Proceedings/1997_MERGA_CP.aspx)
- Galileo, G. (2001). *Dialogue concerning the two chief world systems: Ptolemaic and copernican* (S. Drake, Trans.). Cambridge, UK: Modern Library. (Original work published 1632)
- (本篇已授權收納於高等教育知識庫，<http://www.ericdata.com>) 

# Holistic and Analytic Views of Literacy-oriented Textbook Design: Seventh Grade Math

Wei-Chang Shann

Associate Professor, Department of Mathematics and Center of Teacher Education,  
National Central University

## Abstract

We came up with the idea that textbooks should be designed with analytic and holistic considerations in mind because of the realization that literacy-oriented teaching shall inevitably take care of the following two ends simultaneously. The analytic end that indoctrinates the individual pieces of knowledge and skills, and the holistic end that cultivates the favorable attitudes by connecting the pieces into contexts. As for the approaches of text analysis that suit our purposes, we followed the *linguistic turn*. It is our suggestion that the four approaches of text analysis could be converted into guidelines for literacy-oriented textbook design. In order to elaborate on the plan, we drew examples from the seventh grade mathematics.

**Keywords:** literacy-orientation, textbook, mathematics literacy