

高中數學學科中心 108 進階研習

數學素養教學與評量

高一（上）

雲彰投區·斗六高中

單維彰

國立中央大學師資培育中心與數學系

108 數學課綱高中組

民國108年4月10日

單維彰·計算機融入·高一上·2019/5/20

1

大綱

- ◆ 首要的興革：計算機融入
- ◆ 教學意念：數感與圖感
- ◆ 從平面幾何到坐標幾何的連結
- ◆ 素養評量的商榷
- ◆ 高一（下）提要

單維彰·11年級分組課程·2019/4/7

2

計算機融入數學教學與評量

- ◆ 數學課程的首要興革
- ◆ 會「用」計算機
- ◆ 用來「理解」數學
- ◆ 用來解決（擬真）問題
- ◆ 附帶的「溝通」約定

單維彰·11年級分組課程·2019/4/7

3

附件 1.

計算機的輸入

單維彰·計算機融入·高一上·2019/5/20

4

附件 2. 計算機的輸出

單維彰·計算機融入·高一上·2019/5/20

5

附件 3. 有效數字的 溝通意涵

單維彰·計算機融入·高一上·2019/5/20

6

附件 4. 有效位數的 遞移

單維彰·計算機融入·高一上·2019/5/20

7

教學目標的意念轉變

- ◆ 高中數學課程的素養
- ◆ 數感：實數的素養學習目標
- ◆ 圖感：函數的素養學習目標

單維彰·11年級分組課程·2019/5/17

8

目標 (一) 實數的數感

- ◆ 分數、小數的次方
- ◆ 特例： 10^x
- ◆ 每個正數都是 10 的某次方
- ◆ $\log 100$ ：10 的幾次方 (是) 100
- ◆ 科學記號數字 (絕對值)

$$\text{係數} \times 10^{\text{次方}} = 10^{\text{尾數}} \times 10^{\text{首數}}$$

9

單維彰 · 11 年級分組課程 2019/07

目標 (二) 函數的數感

- ◆ (幾乎就是) 數學成敗之所在
- ◆ 是偉大的「發明」不可等閒
- ◆ 親手做：(方格紙、計算機) 描點
 - ◆ 不是「做中學」，不為「發現」也非「建構」
- ◆ 無窮多點「聚集」而成的圖像
- ◆ Desmos (手機、網頁、可離線)

10

單維彰 · 11 年級分組課程 2019/07

多項函數的圖形

- ◆ 都「連續」
- ◆ 完成：直線方程式
- ◆ 複習與完備：二次函數
- ◆ 進展：三次函數
- ◆ 大域特徵：首項冪函數
- ◆ 局部特徵：像一條直線

11

單維彰 · 11 年級分組課程 2019/07

直線方程式...

- 藉以在坐標平面上，統整複習
國中階段的平面幾何
- ◆ 完成：直線方程式
 - ◆ 複習與完備：二次函數
 - ◆

12

單維彰 · 11 年級分組課程 2019/07

坐標算法：中學幾何的真貌

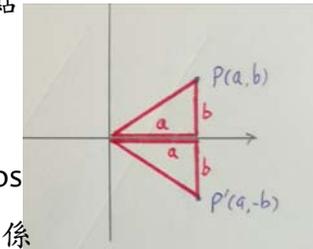
- ◆ 平面幾何到向量方法的中介
- ◆ 中學數學真正需要的幾何
- ◆ 關鍵技術：輔助（直角）三角形
- ◆ 統整複習國中幾何，提升視野
- ◆ 為向量鋪路；沒有向量符號的向量

13

單維彰 · 11年級分組課程 2019/07

基本對稱點的坐標算法

- ◆ 國中的全等三角形
 - ◆ 邊長與坐標（象限）的轉換
 - ◆ 三種基本對稱點
- 連結函數圖形的對稱性；
連結 \sin 、 \cos 負角、補角關係

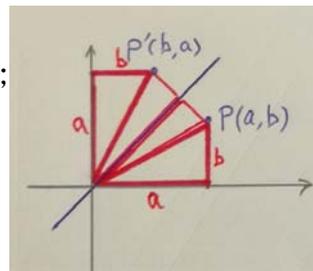


14

單維彰 · 11年級分組課程 2019/07

45° 對稱點的坐標算法

- ◆ 國中的全等三角形
- ◆ 一、三象限 vs 二、四象限
- ◆ 連結指對函數的圖形對稱性；
連結 \sin 、 \cos 餘角關係

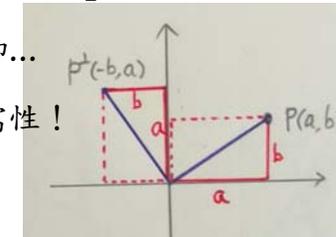


15

單維彰 · 11年級分組課程 2019/07

繞原點旋轉 90° 的坐標算法

- ◆ 畫輔助長方形的效果夠好
 - ◆ 再旋轉 90° 連結對稱於原點
- 口訣「交換相反」
- ◆ 轉「回去」卻...
 - ◆ 方向角的必需性！
 - ◆ P(1,0) 之特例



16

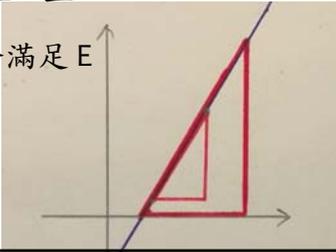
單維彰 · 11年級分組課程 2019/07

直線 L 與二元一次方程式 E

- ◆ 坐標平面上兩點決定一直線 L
- ◆ 兩點坐標決定一方程式 E (插值)
- ◆ 滿足 E 的點全在 L 上
- ◆ L 上的點坐標全滿足 E

比例式

$$(y - k) : (x - h) = b : a$$



17

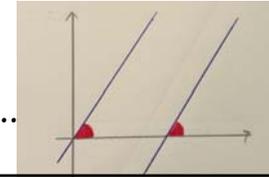
單維彰 · 11 年級分組課程 2019/07

斜率：比例式的比值

- ◆ 輔助三角形的 tan
- ◆ 斜率相同的兩直線平行
- ◆ 平行的兩直線斜率相同
- ◆ 所有直線都是過原點同斜率的平移

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} = m$$

假如有人擔心 (0,0) ...

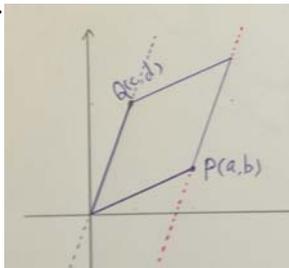


18

單維彰 · 11 年級分組課程 2019/07

兩點「決定」的平行四邊形

- ◆ 給定兩點 $P(a,b)$ $Q(c,d)$
- ◆ 用 \overline{OP} \overline{OQ} 作為兩邊的平行四邊形
- ◆ 國中的平行四邊形性質
- ◆ 「高」：平行線間的距離

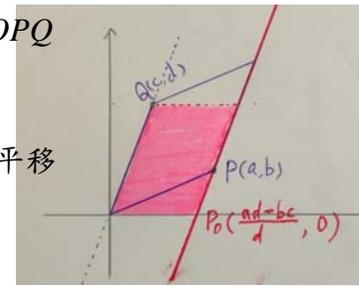


19

單維彰 · 11 年級分組課程 2019/07

平行四邊形面積的坐標算法

- ◆ $|ad - bc|$ 簡記為 $|P, Q|$
- 口訣「交叉相減」
- ◆ 自動推論 ΔOPQ 的面積
- ◆ 不用教就會平移



20

單維彰 · 11 年級分組課程 2019/07

壟中高一經驗

- ◆ $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 接受度低 (不需要也會做)
- ◆ 可推論 $d(P,L)$ 可理解但
記不起來也不愛用
- ◆ 高一學生似難負荷 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
甚至不會代入
(數學成熟度)

21

單維彰 · 11年級分組課程 2019/07

一點數學史

- ◆ 平行四邊形 (三角形) 面積的
坐標算法與直角坐標系一同誕生
求兩直線交點 (約 1637-1659)
- ◆ Leibniz 在 1672 年從 Huygens 學
導出三元一次方程的「克拉瑪公式」
- ◆ 克拉瑪 1750 發表論文, 附錄中用
「公式」解五元一次方程

22

單維彰 · 11年級分組課程 2019/07

「純」數學的行列式定義

- ◆ 骨子裡就是平行四邊形面積
 $[e_1, e_2, \dots, e_n] = 1$
若 $u_j = u_k$ 則 $[... u_j ... u_k ...] = 0$
 $[... cu_k ...] = c [... u_k ...]$
 $[... u_k + v_k ...] = [... u_k ...] + [... v_k ...]$
- ◆ 可推論 $[... u_j ... u_k ...] = - [... u_k ... u_j ...]$
- ◆ 可推論降階公式、展開公式

23

單維彰 · 11年級分組課程 2019/07

一點數學思維

- ◆ 行列式就是 Measure of Simplex
- ◆ 方向性是本質
- ◆ 降階和展開演算法是必要的
而不是設計的

24

單維彰 · 11年級分組課程 2019/07

數學素養的評量

- ◆ 數學學科知識的素養
- ◆ 應用到情境的素養
 - ◆ 個人的、社會的、學習的、STEAM 的
- ◆ 正確使用計算機工具的素養
- ◆ 有效與他人溝通的素養
- ◆ 邏輯推理的素養

25

數學學科中心數學素養評量命題單

單維彰·11年級分組課程 2019/07

附件 5. 並非所有數學知識 皆為素養

26

單維彰·計算機融入·高一上 2019/5/20

附件 6. 數學評量的目標 與情境負荷的平衡

27

單維彰·計算機融入·高一上 2019/5/20

高一(下)提要

- ◆ 直線的斜率與斜角
- ◆ 計算機：三角比的正查與反查
- ◆ 親手做：(同心圓方格紙)極坐標
- ◆ 從極坐標到廣義角的三角比
- ◆ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ 是定義不是公式
- ◆ 三角：平面幾何到坐標幾何的連結

28

單維彰·11年級分組課程 2019/07

請提出討論

The End

單維彰·計算機融入·高一上·2019/5/20

29